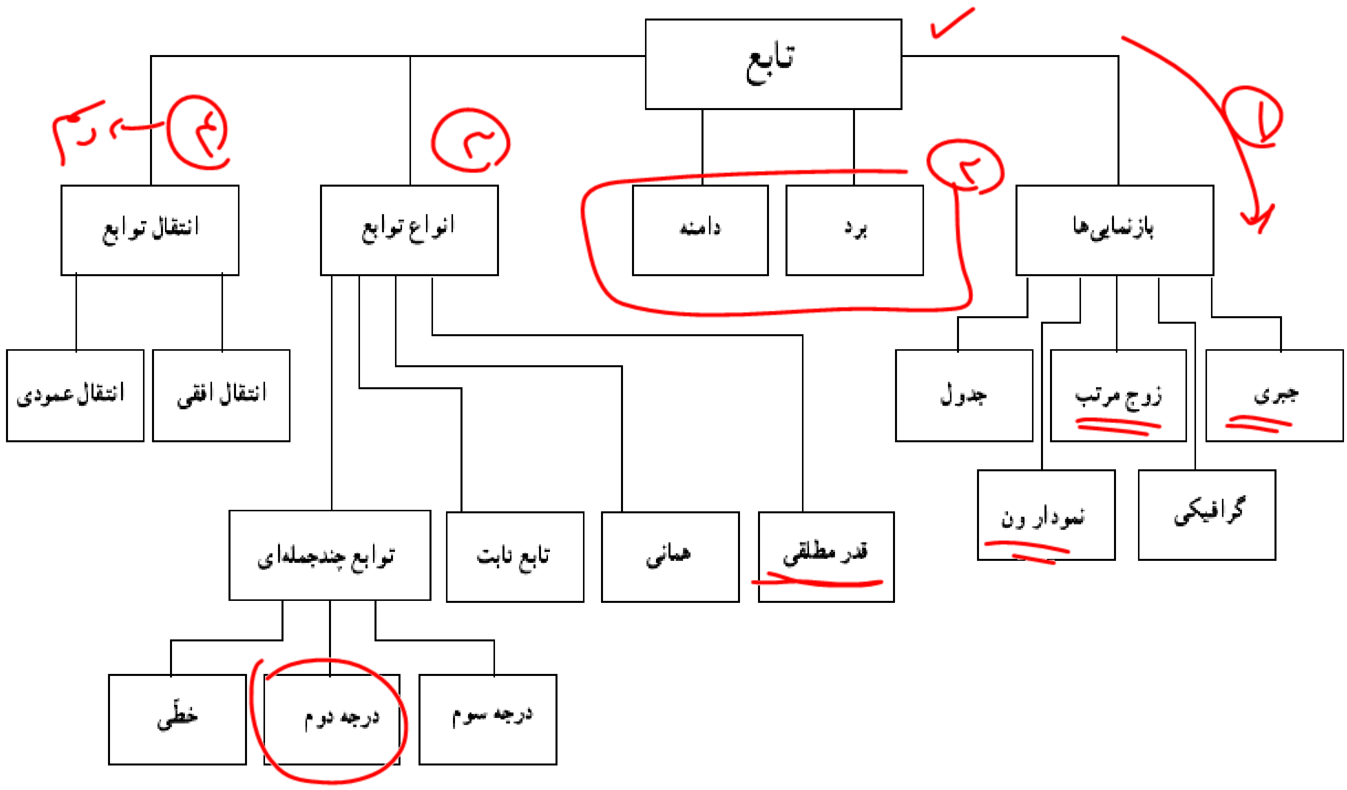

فصل پنجم
تابع


تابع
بازنمایی‌ها
برد
دامنه
انواع توابع
انتقال توابع
جبری
زوج مرتب
جدول
گرافیکی
نمودار ون
قدر مطلق
همانی
تابع ثابت
توابع چندجمله‌ای
خطّی
درجه دوم
درجه سوم
انتقال افقی
انتقال عمودی
۱
۲
۳
۴

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن

$A=\{۲,۳\}$
$B=\{۵\}$

۱- تعریف زوج مرتب: هرگاه برای معرفی دو عنصر مانند **a** و **b** ترتیب اهمیت داشته باشد، آن را به صورت زوج مرتب (a,b) نشان می دهیم. **a** را مؤلفه اول و **b** را مؤلفه دوم زوج مرتب می‌نامیم.

$A\times B=\{(۲,۵),(۳,۵)\}$

مثال ۱ مختصات نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۳\\ ۲\end{bmatrix}$ را می توانیم با زوج مرتب به صورت $A(-۳,۲)$ نمایش دهیم.

برابری دو زوج مرتب: $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c,b=d)$

مثال ۲ در تساوی $(x-۲,y+۴x)=(۱,۳)$ مقادیر x و y را حساب کنید.

$x-۲=۱\longrightarrow x=۳$

$y+۴x=۳ \quad y+۱۲=۳ \quad y=-۹$

۲- تعریف رابطه: اگر A و B دو مجموعه باشند، منظور از «یک رابطه از A به B»، مجموعه ای است که عضو های آن، زوج مرتب هایی مانند (a,b) هستند که در آن $a\in A$ و $b\in B$. معمولا رابطه را با R نشان می دهیم.

مثال ۳ برای دو مجموعه $A=\{۱،۲،۳\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$، مجموعه $R_۱=\{(۳,c)\}$، یک رابطه از A به B است.

۳- تعریف تابع: یک تابع از A به B»، رابطه ایســت از A به B که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی یافت نشــود که دارای مولفه اول برابر باشند. بنابراین در یک تابع، اگر مولفه های اول دو زوج مرتب برابر باشند، باید مولفه های دوم آنها نیز با هم برابر باشند. توابع را معمولا با f یا g یا h نمایش می دهیم.

مثال ۴ رابطه های $f=\{(۱،۲)،(۵،۶)\}$ و $g=\{(۱،۲)،(۱،۲)\}$ تابع هستند. ولی رابطهٔ $R=\{(۱،۲)،(۱،۴)\}$ تابع نیست.

مثال ۵ مقادیر x و y را چنان بیابید که رابطهٔ زیر یک تابع باشد.

$$f=\{(۳,۵),(x,۹),(۳,x-۲),(۷,y+۴)\}$$

$x-۲=۵ \quad \boxed{x=۷}$

$y+۴=۹ \quad \boxed{y=۵}$

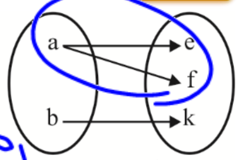
$=\{(۳,۵),(۷,۹),(۳,۵),(۷,۹)\}$

۴- نمایش هندسی تابع (نمودار تابع): از دیدگاه هندسی تابع را می توان به دو روش نمایش داد:

الف) نمودار پیکانی (وِن): برای نمایش تابع f از A به B با استفاده از نمودار وِن، دو مجموعه A و B را به شکل منحنی های بسته نمایش داده، هر زوج مرتب (a,b) از تابع f را به صورت پیکانی که ابتدای آن روی a و انتهایش روی b باشد، نمایش می دهیم. در اینصورت، از هر عضو A، فقط یک پیکان خارج می شود.

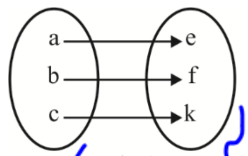
مثال ۶

$\{(a,e),(a,f)\}$



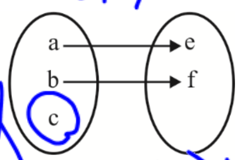
تابع نیست

$\{(a,e),(b,f),(c,k)\}$



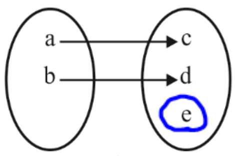
تابع است

(a,e) (b,f) ×



تابع نیست

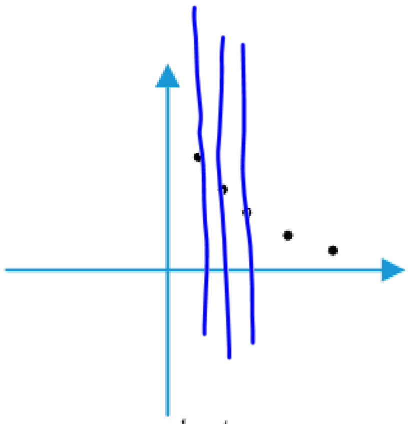
(a,c) (b,d)



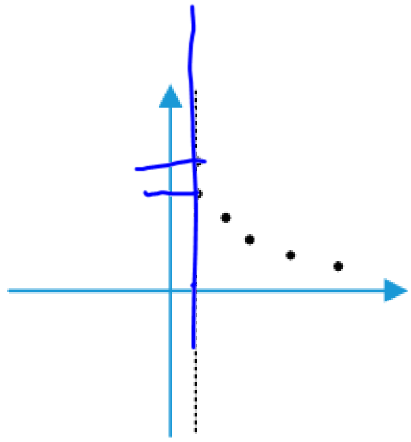
تابع است

ب) نمودار مختصاتی (دکارتی): برای نمایش تابع f از A به B با نمودار دکارتی، یک دستگاه محور مختصات رسم کرده عضو های A را روی محور افقی و عضـــو های Bرا روی محور قائم نمایش میدهیم. اکنون هر زوج مرتب (a,b) از f را به صـــورت نقطه ای در این دســـتگاه نمایش می دهیم. بنابراین بر اســـاس تعریف تابع، هیچ دو نقطه ای روی خطی موازی محور قائم قرار نمی گیرند یعنی شـــرط هندسی تابع بودن این است که ...... هر خط عمودی نمودار را فقط در یک نقطه قطع کند.

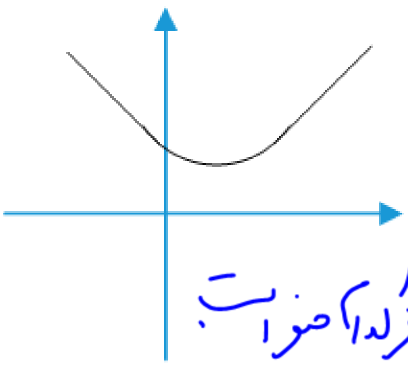
مثال ۷

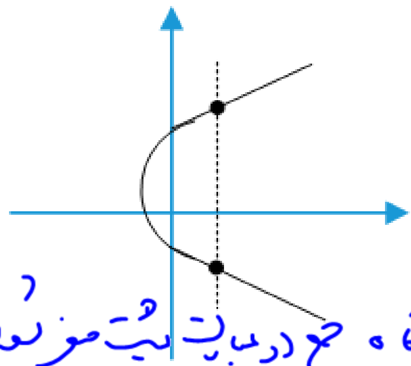


تابع است



تابع نیست





هرگاه ۲ جفت در یک ستون تکرار شود دو مولفه اول جواب

تابع است

تابع نیست

مثال ۸ مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$(x^2+y^2-6x+2y,7)=(-10,7)$$

$x^2+y^2-6x+2y=-10$

$x^2-6x+y^2+2y+10=0$ 　 $10 = 9+1$

$x^2-6x+9+y^2+2y+1=0$

$(x-3)^2+(y+1)^2=0$

$\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2=0}$

$x=3$ 　 $y=-1$ 　 $\{(3,-1)\}$

مثال ۹ x و y را چنان بیابید که رابطهٔ زیر یک تابع باشد.

$$g=\{(1,4),(2,3),(1,x^2-3x),(x-2,y+1)\}$$

$y+1=3$ 　 $y=2$

$x^2-3x=4$ 　 $x^2-3x-4=0$ 　 -1 　 4

مثال ۱۰ به ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $R=\{(3,a^2),(2,1),(-2,a),(3,a+2),(a,4)\}$ یک تابع است؟

$a^2=a+2$

مثال ۱۱ به ازای کدام مقادیر x و y ، رابطهٔ زیر یک تابع است؟

$\{(۳,۴),(۳,x+۱),(۴,۷),(۴,y-۲)\}$

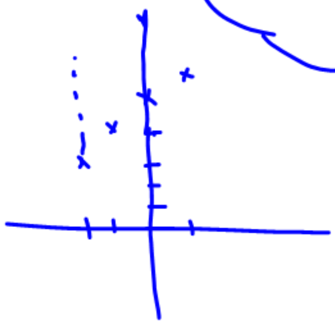
function

$g=\{(۱,۴)\} \cup f=\{(۱,۲)\}$

مثال ۱۲ اگر f و g دو تابع باشند، کدام رابطه‌ی زیر می‌تواند تابع نباشد؟

۱) $f-g$ ۲) $g-f$ ۳) $f \cup g$ ۴) $f \cap g$

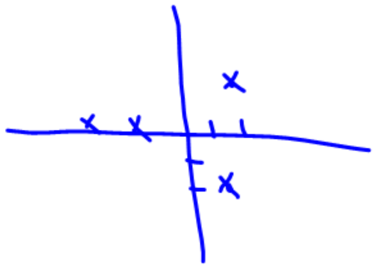
$\{(۱,۲),(۱,۴)\}$



مثال ۱۳ هر یک توابع زیر را هم با نمودار وِن و هم با نمودار مختصاتی نمایش دهید.

الف) $f=\{(-۲,۳),(-۱,۴),(۰,۵),(۱,۶)\}$

ب) $g=\{(۱,-۲),(۲,۱),(-۱,۰),(-۲,۰)\}$



مثال ۱۴ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع محیط مربع را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر دانش آموز گروه خونی او را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به هر عدد مثبت، ریشه های دوم آن عدد را نسبت می دهد.

هـ) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

(A, C)
(B, C)

(A, R)
(A, H)

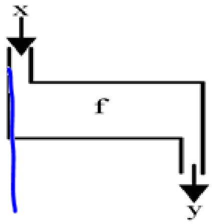
مثال ۱۵ کدام یک از موارد زیر یک تابع است؟

$h=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۱),(۴,-۱),(۵,۲)\}$

$l=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),...\}$

تعبیر تابع به عنوان یک ماشین

تابع f را می توان ماشینی تصور کرد که دارای یک ورودی و یک خروجی است. مولفه های اول (x ها) را از ورودی، وارد ماشین می کنیم و مولفه های دوم (y ها) را از خروجی تحویل می گیریم. این تعبیر به درک برخی از قوانین تابع کمک شایانی می کند.



معرفی دو نماد: اگر f یک تابع باشد، آن گاه:

الف) به جای اینکه بنویسیم «f تابعی از مجموعه A به مجموعه B است»، می نویسیم «$f : A \longrightarrow B$»

ب) به جای اینکه بنویسیم «$x \xrightarrow{f} y$» می نویسیم «$y = f(x)$»

نمایش جبری تابع

x y

نخســـت باید بدانیم که در هر تابع، مولفه های اول را «متغیر مســـتقل» و مولفه های دوم را «متغیر وابســـته» می نامیم و به ترتیب با x و y نمایش می دهیم. در برخی از توابع بین مولفه های اول و دوم رابطه ای به شـــکل یک معادله وجود دارد. این معادله را نمایش جبری یا «ضابطه» تابع می نامیم.

$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2$

مثال ۱۶ در تـــابع $f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),\ldots\}$ هـــر مولفـــه دوم (یعنـــی y)، مربـــع مولفـــه اول (یعنـــی x) خـــودش است. پس بین این دو متغیر معادله $y = x^2$ برقرار است. این معادله ضابطه این تابع است.

$y=x^2$

مثال ۱۷ ضابطه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f = \left\{(1,1),(2,\frac{1}{2}),(3,\frac{1}{3}),\ldots\right\} \longrightarrow \boxed{y=\frac{1}{x}}$

ب) $g = \{\ldots,(-2,-5),(-1,-3),(0,-1),(1,1),\ldots\}$

مثال ۱۸ اگر نمودار یک تابع، یک سهمی باشد که از نقاط $(1,-2)$ و $(2,-3)$ می‌گذرد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، ضابطه آن را به‌دست آورید.

$(0,1)$

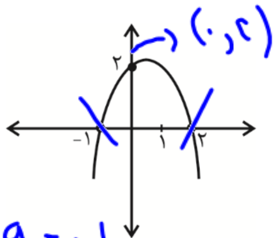
$\boxed{y=x^2-4x+1} \rightarrow y=ax^2+bx+c \quad \boxed{c=1}$

$1=a(0)+b(0)+c \longrightarrow$

$a+b+1=-2 \qquad \begin{cases} a+b=-3 \\ 4a+2b=-4 \end{cases}$

$2a=2 \quad \boxed{a=1} \quad \boxed{b=-4}$

مثال ۱۹ نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ را تعیین کنید.



$(0,2)$

$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

$y=a(x+1)(x-2)$

$2=a(1)(-2)$

$a=-1$

$y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$

$a=-1 \quad b=1 \quad c=2 \quad \boxed{=1}$

مثال ۲۰ تابع مثال قبل را به دو روش به زبان ریاضی نمایش می دهیم:

$۱)f=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y=-x^۲+x+۲\}$

$۲)\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=-x^۲+x+۲ \end{cases}$

مثال ۲۱ دو تابع $f=\{(-۱,۲),(۳,-۴),(۱,۶)\}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ را در نظر بگیرید و مقادیر $f(۳)$ و $g(۲)$ و $g(-۱)$ را بدست آورید.

$f(۳)=-۴$

$g(۲)=\dfrac{۲+۱}{۲-۱}=\dfrac{۳}{۱}=۳$

$g(-۱)=\dfrac{-۱+۱}{-۱-۱}=\dfrac{۰}{-۲}=۰$

مثال ۲۲ در هر مورد، با توجه به تابع داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

الف) تابعی که به محیط دایره، شعاع آن را نسبت می دهد:

$P=۲\pi R$

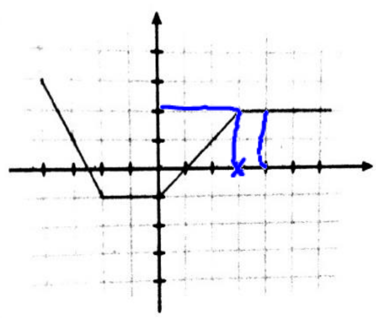
$\{(\pi,\ldots),(\ldots,۴),(\frac{\pi}{۴},\ldots),(\ldots,۵)\}$

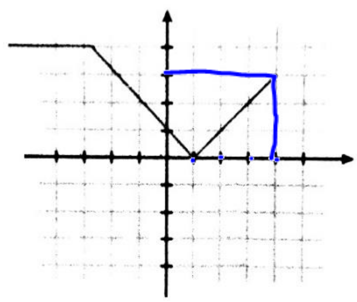
ب) تابعی که به هر عدد حقیقی یک واحد بیشتر از سه برابر مربع آن را نسبت می دهد.

$y=۳x^۲+۱$

$\{(-۱,\ldots),(\ldots,۱۳),(\sqrt{۲},\ldots),(\ldots,۲)\}$

مثال ۲۳ نمودار های تابع f و g داده شده اند. حاصل هر یک از عبارت های داده شده را از روی نمودار به دست آورید.


تابع f


تابع g

$۱)۲\overset{۲}{f(۳)}-۳f(۴)=۲\times۲-۳\times۲=۴-۶=-۲$

$۲)f(\overset{۳}{g(۴)})=۲$

$۳)g(f(۰))=$

$۴)f(f(g(۰)))=$

$۵)g(f(g(۱)))=$

مثال ۲۴ تابع f و نمودار تابع g داده شده‌اند. حاصل مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$f=\{(۲,-۱),(۰,۱),(۱,-۲),(۳,۲),(-۴,۰)\}$

۱) $f(g(-۱))=$ $f(2)=-1$

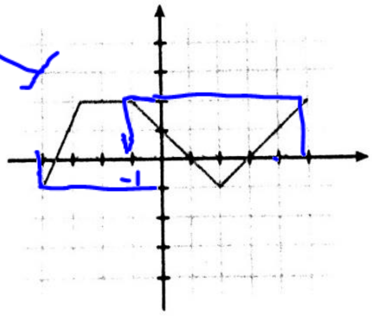
۲) $g(g(-۴))=$ $g(-1)=2$

۳) $f(۴f(۲))=$ $f(-4)=0$

۴) $g(۵f(۰))=$ $g(5\times1)=g(5)=2$

۵) $g(f(g(۱)))=$

۶) $f(g(۵))+g(f(-۴))=$



تابع g

$A \to R$

مثال ۲۵ دو مجموعه $A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ و $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و رابطهٔ داده شده را به شکل مجموعه بنویسید.

۱) رابطه ای که به هر عضو A نصف مربع آن را در $\mathbb{R}$ نسبت دهد.

$x^2/2$

$f=\{(-3,9/2),(-2,2),(-1,1/2),(0,0),(1,1/2),(2,2),(3,9/2)\}$ $y=x^2/2$

۲) رابطه ای که به قدر مطلق هر عضو A، دو برابر همان عضو را در $\mathbb{R}$ نسبت دهد.

$g=\{(-3,3\times2)$
$(-2,4)$

۳) رابطه ای که به هر عضو A قدر مطلق آن را در $\mathbb{R}$ نسبت دهد.

$h=\{(-3,2),(-2,2)\ldots\}$

مثال ۲۶ نمودار دکارتی روابط مثال قبل را رسم کنید و تابع بودن آن ها را بررسی کنید.

درس دوم: دامنه و برد تابع

فرض کنیم f یک تابع باشد، در این صورت دو مجموعه مهم زیر را برای آن خواهیم داشت:

تعریف دامنه: D_f (Domain) ←

۱- مجموعه همه مولفه های اول زوج مرتب های موجود در تابع f را «دامنه» می نامیم و با D_f نمایش می‌دهیم.

به زبان ریاضی: $D_f=\{x|(x,y)\in f\}$

تعریف برد: Range ←

۲- مجموعه همه مولفه های دوم زوج مرتب های موجود در تابع f را «برد» می نامیم و با R_f نمایش می دهیم.

به زبان ریاضی: $R_f=\{y|(x,y)\in f\}$

مثال ۲۷ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید.

$۱)f = \{(۱,۱), (۲,۴), (۳,۹), ...\}$

$\begin{cases} D_f = \{1, 2, 3, ...\} \\ R_f = \{1, 4, 9, ...\} \end{cases}$

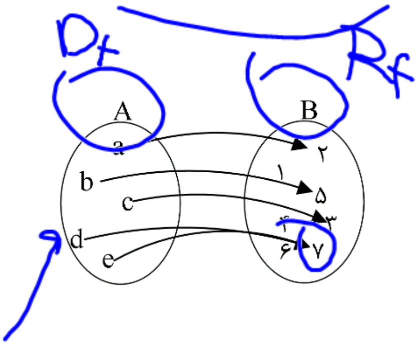
$۲)g = \{..., (-۲,-۵), (-۱,-۳), (۰,-۱), (۱,۱), ...\}$

$\begin{cases} D_g = \{..., -2, -1, 0, 1, ...\} \\ R_g = \{..., -5, -3, -1, 1, ...\} \end{cases}$

به دست آوردن دامنه و برد تابع:

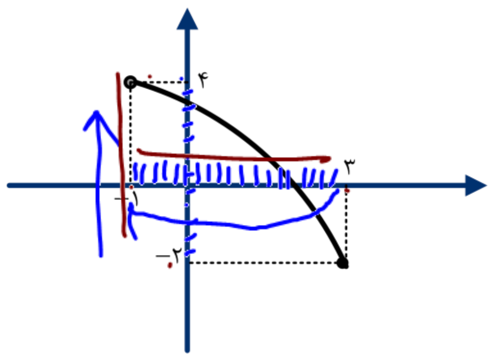
الف) از روی نمودار پیکانی: اگر f تابعی از A به B باشد، کل مجموعه A دامنه تابع است. برد تابع، مجموعه همه عضو هایی از B است که به هر یک از آنها دست کم یک پیکان وارد شده باشد.

مثال ۲۸ دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.



ب) از روی نمودار مختصاتی: نمودار تابع را روی دو محور تصویر می کنیم. تصویر نمودار روی محور طول ها دامنه را مشخص می کند و تصویر آن روی محور عرض ها برد تابع را نشان می دهد.

مثال ۲۹ دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.



$\begin{cases} D_f = (-1, 3] \\ R_f = [-2, 4) \end{cases}$

پ) از روی ضابطه: برای تعیین دامنه تابع از روی ضابطه، به دو نکته زیر توجه می کنیم:

۱) مخرج کسر نمی تواند صفر باشد. ۲) در رادیکال با فرجه زوج عدد زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

بنابراین، اگر ضابطه تابع کسری باشد، مخرج آن را برابر صفر قرار می دهیم و جواب های این معادله را بدست می آوریم. دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی است که جواب های این معادله را از آن حذف کرده ایم.

مثال ۳۰ دامنه توابع زیر را بدست آورید:

$f(x) = \dfrac{۲x-۳}{۴x-۲}$ $\quad 4x-2=0 \to x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad D_f = \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

$g(x) = \dfrac{\sqrt[۳]{۳x+۱}}{x^۲-x-۶}$ $\quad x^2-x-6=0 \quad (x-3)(x+2)=0 \to \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \quad D_g = \mathbb{R}-\{-2, 3\}$

همچنین اگر ضابطه تابع: دارای رادیکالی با فرجه زوج باشد، عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا برابر صفر قرار می دهیم و نامعادله را حل می کنیم. مجموعه جواب این نامعادله دامنه تابع است.

مثال ۳۱ دامنه توابع زیر را به دست آورید:

$f(x)=\sqrt{9-x^2}$

$g(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x^2-1}$

$9-x^2\geq 0$, $-2\leq x\leq 2$, $D_f=[-2,2]$

$-x^2+x+6\geq 0$, $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1$, $x\neq\pm1$

$D_f=[-2,3]-\{\pm1\}$

نکته اگر ضابطه تابع قابل تغییر دادن یا ساده کردن باشد، پیش از تعیین دامنه آن، مجاز نیستم آن را تغییر دهیم زیرا ممکن است این ساده کردن باعث شود که دامنه تغییر کند.

مثال ۳۲ دامنه های دو تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.

$x=\pm1$

$D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$, $D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

تشخیص تابع از روی ضابطه

فرض کنیم معادله ای شامل متغیرهای x و y داده شده باشد، می خواهیم بررسی کنیم که آیا این ضابطه بیانگر تابع است یا نه. برای این که ثابت کنیم که تابع است از تساوی $x_1=x_2$ شروع کرده به کمک ضابطه داده شده و انجام عملیات جبری تساوی $y_1=y_2$ را نتیجه می گیریم.

مثال ۳۳ آیا ضابطه $y=x^2-2x$ یک تابع است؟ چرا؟

$y=x^2-2x$, $(1,-1)$, $(2,0)$

اما اگر بخواهیم ثابت کنیم که تابع نیست، کافی است بتوانیم به x عددی را اختصاص دهیم که به ازای آن دو مقدار مختلف برای y بدست آید.

مثال ۳۴ آیا رابطه $x^2+y^2=4$ یک تابع است؟ چرا؟

$x^2+y^2=4$, $(2,0)$, $(-2,0)$

$y=0 \Rightarrow x^2+0=4$, $x^2=4$

$x=0 \Rightarrow y^2=4$, $y=\pm2$, $(0,2)$, $(0,-2)$ ✗

$x^2+y^2=R^2$

نکته اگر مجموع چند عدد نامنفی برابر صفر شود، نتیجه می گیریم که همه آن اعداد برابر صفر هستند. برای مثال پاسخ معادلهٔ $|x-3|+(y+5)^2=0$ برابر است با:

$$\begin{cases} x-3=0 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$$

$\{(3,-5)\}$ ✓

مثال ۳۵ ضـابطهٔ $x^2+y^2-2y+1=0$ بیانگر یک تابع اسـت زیرا می توانیم این ضـابطه را به صـورت $x^2+(y-1)^2=0$ در آوریم که نشان می دهد مجموع دو عدد نامنفی صفر شده است. پس طبق نکته بالا نتیجه می گیریم که این دو عدد هر دو صفر هستند و این مطلب نیز نتیجه می دهد $x=0$ و $y=1$. بنابراین این رابطه فقط شامل یک زوج مرتب $\{(0,1)\}$ است. پس تابع است.

ضابطه = فرمول

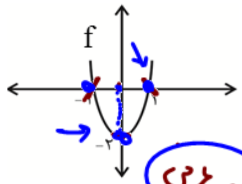
رابطه = (x, y)

$x^2+y^2-2y+1=0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=0 < \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \quad \{(0,1)\}$ ✓

مثال ۳۶ مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

✓ الف) $f=\{(1,2),(2,-1),(0,3),(4,5)\} \Rightarrow \dfrac{f(1)+f(0)}{f(4)} = \dfrac{2+3}{5} = \dfrac{5}{5} = \boxed{1}$

✓ ب)



صدا کن $f(0)+2f(1)+3f(-1) = -2+2\times0+3\times0 = \boxed{-2}$

✓ ج) $f(x)=2x+1 \Rightarrow \begin{cases} f(2)=5 \\ f(-1)=-1 \\ f(0)=1 \end{cases}$

✓ د) $f(x)=x^2-1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=3 \\ f(-2)=3 \end{cases} \Rightarrow ?$ $(-1,0)\ (2,3)\ (-2,3)$

مثال ۳۷ در هر مورد، مقادیر خواسته شده را به دست آورید:

$(3x)^2-2x\ 2x\ 3x$

۱) $f(x)=\sqrt{9x^2-12x+5},\quad f(\dfrac{\sqrt5+6}{3})=?$

$\sqrt{(3x)^2-2\times2\times3x+4+1} = \sqrt{(3x-2)^2+1}$

$=\sqrt{(3\times\dfrac{\sqrt5+6}{3}-2)^2+1} = \sqrt{(\sqrt5+4)^2+1}$

$\sqrt{5+16+8\sqrt5+1}$

$\sqrt{22+8\sqrt5}$

۲) $g(x)=8x^3-12x^2+6x+2,\quad g(\dfrac{\sqrt[3]{7}+1}{2})=?$

$-1+3$

$(x-1)(x^2+x+1)$

۳) $h(x)=\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2+3x},\quad h(\sqrt[3]{11})=?$ $\sqrt[3]{11}-1$

$x^2-2x+1+3x = x^2+x+1$

$g(x)=(2x-1)^3+3$

$8x^3-12x^2+6x-1$

$=(2\times\dfrac{\sqrt[3]{7}+1}{2}-1)^3+3$

$7+3=\boxed{10}$

مثال ۳۸ در هر مورد، مقادیر خواسته شده را به دست آورید:

۱) $f(x)=3x^2+2x-1,\quad \begin{cases} f(-1)=?=0 \\ f(1)=?=4 \\ f(-2)=?=7 \end{cases}$ $(-1,0)\ (1,4)\ (-2,7)$

✓ ۲) $g(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9},\quad \begin{cases} g(100)=? \\ g(-2)=? \\ g(1)=? \end{cases}$

۳) $h(x)=\sqrt{16-x^2},\quad \begin{cases} h(-4)=?=0 \\ h(0)=?=4 \\ h(2)=?=\sqrt{12} \end{cases}$ $(-4,0)\ (0,4)\ (2,\sqrt{12})$

مثال ۳۹ کدام‌یک از روابط زیر تابع است؟ چرا؟

الف) $x=|y|$

$2=x \Rightarrow 2=|y| \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$ $\{(2,2),(2,-2)\}$

و) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$x^2-6x+9 \quad y^2-4y+4$

$(x-3)^2+(y-2)^2 \leq 0$

ب) $x^2+y=4$

$y=4-x^2$

ز) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y}{x^2}=2$

ج) $|x-1|+|y-2|=0$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\{(1,2)\}$

چ) $x^y=y^x$

د) $|x^2-1|+|y-2|=0$

$\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ $y=2$

ط) $\sqrt[4]{x^2+1}+|y-3|=0$

$y=2$

هـ) $(x+1)^2+(y-3)^2=0$

$\{(1,2),(-1,2)\}$

مثال ۴۰ اگر f تابعی باشد که به مساحت یک مربع اندازه قطر مربع را نسبت دهد و g تابعی باشد که به اندازه ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع مساحت آن را نسبت دهد، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$f(x)=S=\dfrac{x^2}{2}$

$g(x)=S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

۱) $f(g(\sqrt{\dfrac{8\sqrt{3}}{3}}))=$

$g(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8}{4}=2$

$f(2)=\dfrac{2^2}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

۲) $f(f(8))=$

۳) $g(g(2\sqrt[4]{3}))=$

۴) $g(f(f(8)))=$

۵) $g(f(2))-f(\sqrt{3}g(2))=$

$x \to -x \quad x=0$

$a \to -a$

مثال ۴۱ به کمک هر یک از معادله های زیر ضابطه تابع $y=f(x)$ را بدست آورید.

۱) $2f(x)-3f(-x)=2x-3$

۲) $xf(x)+f(-x)=2x^2-x+1$

۳) $f(x)+2f(-x)=3x-1$

۴) $f(x-2)+3f(2)=4x-3$

$x \to -x$

$\begin{cases} 2f(x)-3f(-x)=2x-3 \\ 2f(-x)-3f(x)=-2x-3 \end{cases}$

$\begin{cases} 4f(x)-6f(-x)=4x-6 \\ 6f(-x)-9f(x)=-6x-9 \end{cases}$

$-5f(x)=-2x-15$

$f(x)=\dfrac{2x+15}{5}$

$f(x)=\dfrac{2}{5}x+3$

به دست آوردن ضابطه تابع $y=f(g(x))$ از روی ضابطه تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و بر عکس:

الف) فرض کنیم ضابطه تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ داده شده باشد و بخواهیم ضابطه تابع $y=f(g(x))$ را به دست آوریم. کافی است در ضابطه تابع $y=f(x)$ به جای همه x ها $g(x)$ را قرار داده و آن را تا حد امکان ساده کنیم.

مثال ۴۲ اگر $f(x)=x^{۲}-۳x$ باشد $f(۲x-۱)$ را حساب کنید.

$f(2x-1)=(2x-1)^2-3(2x-1)$
$=4x^2-4x+1-6x+3$
$=4x^2-10x+4$

مثال ۴۳ اگر $f(x)=x^{۲}-۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$، حاصل $f(g(x))$ و $f(g(۱))$ را بیابید.

$f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-1=x-1$

مثال ۴۴ اگر $f(x)=۳x-\frac{۳}{x}$ باشد، $f(x^{۲}-۱)$ را حساب کنید.

مثال ۴۵ اگر $f=\{(۲,۳),(۴,۳),(۰,۱)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۳,۵),(-۳,۱)\}$ حاصل $f(g(-۱))$ و $g(f(۲))$ را بیابید.

$f(g(-1))=f(2)=3$

$g(f(2))=g(3)=5$

ب)فرض می کنیم ضابطه تابع $y=f(g(x))$ داده شده باشد و بخواهیم ضابطه تابع $y=f(x)$ را به دست آوریم. برای این کار قرار می دهیم $g(x)=t$ و از این معادله x را بر حسب t بدست آورده در ضابطه داده شده به جای x قرار می دهیم و ساده میکنیم . در پایان به جای همه t ها حرف x را قرار می دهیم.

$2-x=2$

مثال ۴۶ اگر $f(۲-x)=x^{۲}+۱$ باشد $f(x)$ و $f(۲)$ را حساب کنید.

$2-x=t$
$2-t=x$

$f(t)=(2-t)^2+1$

$t\to x$ $\boxed{f(x)=(2-x)^2+1}$

$f(2)=1$

$f(2)=0+1=1$

مثال ۴۷ دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

$D_f=x$

۱) $y=-۲$ $\longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۲) $y=۲x+۱$ $\longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۳) $y=x^{۲}-x+۱$ $\longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۴) $y=x^{۳}-x+۲$ $\longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

$\Longrightarrow y=ax^n+bx^{n-1}+\dots+c \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۵) $y=\frac{x}{x-۲}$ $\longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

$x=2$

۶) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$, $x^2-1=0 \quad x=\pm1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

۷) $y=\frac{2x}{x^2+4}$ $\to x^2+4=0 \quad x^2\neq-4 \to D_f=\mathbb{R}$

۸) $y=\sqrt{x-2}$ $\Rightarrow x-2\geq0 \quad x\geq2 \to D_f=[2,+\infty)$

۹) $y=\sqrt{4-x}$ $\Rightarrow 4-x\geq0 \quad -x\geq-4 \Rightarrow x\leq4 \to D_f=(-\infty,4]$

۱۰) $y=\sqrt{x^2-1}$ $\to x^2-1\geq0 \quad \begin{matrix}1\\-1\end{matrix}$ $\quad D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

۱۱) $y=\sin x+1$

۱۲) $y=2\cos x-2$ $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۱۳) $y=|x-1|+|x-2|$ $\to D_f=\mathbb{R}$

۱۴) $y=|x^2-1|$ $\to D_f=\mathbb{R}$

۱۵) $y=\sqrt{|x-1|-|x|}$ $\to |x-1|-|x|\geq0$ $\quad (|x-1|\geq|x|)^2$ $\quad \cancel{x^2}-2x+1\geq\cancel{x^2}$ $\quad -2x+1\geq0 \quad -2x\geq-1 \quad x\leq1/2 \quad D_f=(-\infty,1/2]$

۱۶) $y=\sqrt{|x-1|-2}$ $\to |x-1|-2\geq0 \quad |x-1|\geq2 \quad x-1\geq2 \quad \boxed{x\geq3} \quad x-1\leq-2 \quad x\leq-1$

۱۷) $y=\sqrt{x^2-3x-15}$

۱۸) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ $\quad \begin{cases}x-1\geq0 & x\geq1\\ 3-x\geq0 & x\leq3\end{cases} \quad \cap=[1,3]$

۱۹) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4-1}}$

۲۰) $y=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}-1}$

۲۱) $y=\frac{x+2}{|x-1|-5}$

۲۲) $y=\frac{1}{|x-1|+|x-2|}$

۲۳) $y=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

۲۴) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$ $\quad x-1\geq0 \quad x\geq1 \quad 1-x\geq0 \quad x\leq1 \quad \cap=\{1\}$

۲۵) $y=\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{4-x}}$ $\to x\geq4 \quad x<4 \quad \cap=\varnothing$

$\mathrm{sign}(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

مثال ۴۸ در هر قسمت مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.

$$1)\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-1} & , \ x\geq \frac{1}{2}\\ x^2+2x & , \ x<\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{4})=? & (\frac{1}{4})^2+2(\frac{1}{4})=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}\\ f(5)=? & \sqrt{2\times 5-1}=\sqrt{9}=3\\ f(-1)=? & (-1)^2+2(-1)=1-2=-1\end{cases}$$

$$2)\quad g(x)=\begin{cases}|3x+1| & , \ x<-1\\ \frac{2x-1}{x+2} & , \ x\geq -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-2)=? & =|3x-2+1|=|-5|=5\\ g(-1)=? & =\frac{2\times -1-1}{-1+2}=\frac{-3}{1}=\boxed{-3}\\ g(0)=? & =\frac{2\times 0-1}{0+2}=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

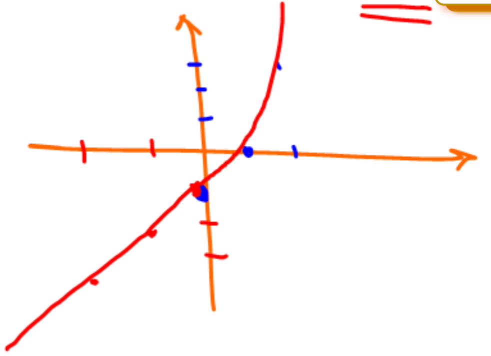
مثال ۴۹ نمودار تابع زیر را جداگانه رسم کنید.

$$1)\quad f(x)=\begin{cases}x^2-1 & , \ x\geq 0\\ 2x-1 & , \ x<0\end{cases}$$

x	0	1	2
y	−1	0	3

x	−2	−1	0
y	−5	−3	−1

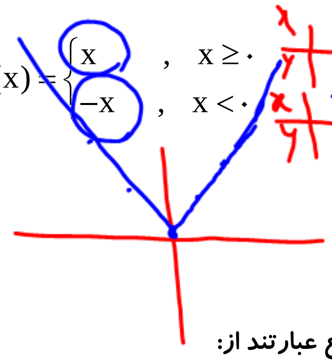
توخالی



$$|x| \quad 2)\quad g(x)=\begin{cases}x & , \ x\geq 0\\ -x & , \ x<0\end{cases}$$

x	0	1	2
y	0	1	2

x	−2	−1	0
y	2	1	0



درس سوم: انواع توابع

برخی از توابع به دلیل اهمیتی که دارند، دارای نام های ویژه خود هستند. مهم ترین این توابع عبارتند از:

۱- تابع چند جمله ای: هر تابع با ضابطه زیر را یک تابع چند جمله ای درجه n می نامیم.

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow ?$$

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+k \qquad , \quad a\neq 0$$

تابع چند جمله ای خود شامل توابع مهم دیگری نیز می شود که مهم ترین آن ها عبارتند از:

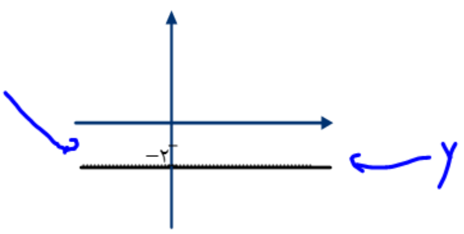
الف) تابع ثابت: اگر c یک عدد حقیقی ثابت باشد، تابع زیر یک تابع ثابت نامیده می شود:

$$\begin{cases}f:\mathbb{R}\longrightarrow \{c\}\\ f(x)=c \rightarrow c\end{cases}$$

دامنه این تابع، مجموعه R و برد آن مجموعه $\{c\}$ است. نمودار این تابع خطی موازی محور x ها است.

مثال ۵۰ نمودار تابع $f(x)=-2$ ، خط $y=-2$ ، دامنه آن $\mathbb{R}$ و برد آن $\{-2\}$ است.

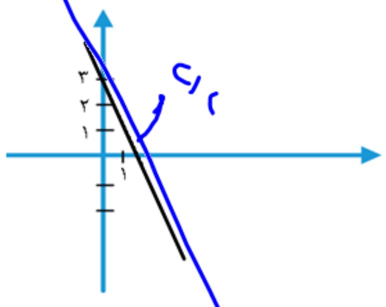
$$f=\{\ldots(1,-2),(0,-2),\ldots(100,-2)\ldots\}$$



$\leftarrow y$

ب) تابع خطی: هر تابع با ضابطه $f(x)=ax+b$ (تابع چند جمله ای درجه ۱) یک تابع خطی نامیده می شود. با شرط $a\neq 0$ دامنه و برد این تابع مجموعه R و نمودار آن خطی به معادله $y=ax+b$ است.

مثال ۵۱ دامنه و برد تابع $f(x)=-2x+3$ مجموعه $\mathbb{R}$ و نمودار آن به شکل زیر است:

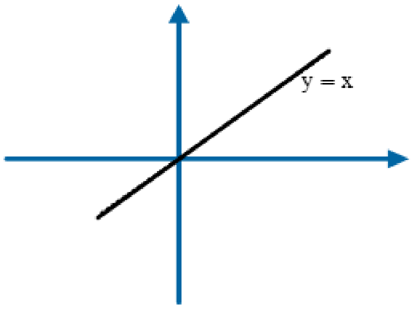


$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=\mathbb{R}$

پ) تابع همانی: تابع به معادله $f(x)=x$، تابع همانی نامیده می شود. دامنه و برد آن برابر R و نمودار آن نیمساز نواحی اول و سوم است

$y=x$

$\boxed{D_f=R_f=\mathbb{R}}$



ت)تابع درجه دوم: تابع به معادله $f(x)=ax^2+bx+c$، با شرط $a\neq 0$ تابع درجه دوم نامیده می شود. دامنه آن مجموعه R و برد آن مجموعه زیر است:

$a>0 \Rightarrow R_f=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$

$a<0 \Rightarrow R_f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$

$x=-\frac{-4}{2(1)}=2$

x	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1

$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=[-2,+\infty)$

نمودار تابع درجه دوم سهمی است.

مثال ۵۲ نمودار توابع $f(x)=-x^2+2x+3$ و $g(x)=x^2-4x+2$ را رسم کنید.

$f(x)=-x^2+2x+3$
$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1$

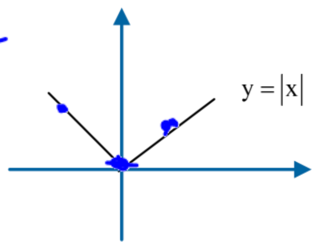
x	0	1	2
y	3	4	3

$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=(-\infty,4]$

$-\frac{4-4(-1)(3)}{4(-1)}=\frac{-16}{-4}$

۲- تابع قدرمطلق: تابعی که به هر عدد حقیقی قدرمطلق آن را نسبت دهد، تابع قدرمطلق نام دارد. ضابطه این تابع به صورت $f(x)=|x|$ و نمودار آن به شکل زیر است:

$D_f=\mathbb{R}\,,\quad R_f=[0,+\infty)$



$y=|x| \leftarrow$

x	-1	0	1
y	1	0	1

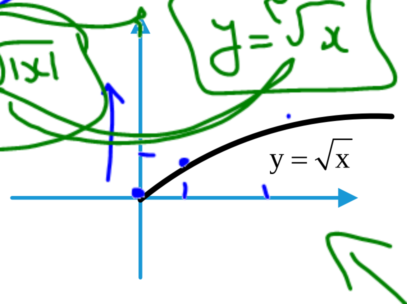
$|x|=0$ قدرمطلق

جزو ۲

۳- تابع رادیکالی: تابعی است که به هر عدد حقیقی نامنفی جذر آن عدد را نسبت می دهد. ضابطه این تابع بصورت $f(x)=\sqrt{x}$ و نمودار آن به شکل زیر است.

$f(x)=\sqrt{x},\quad \boxed{D_f=[0,+\infty)},\ \boxed{R_f=[0,+\infty)}$

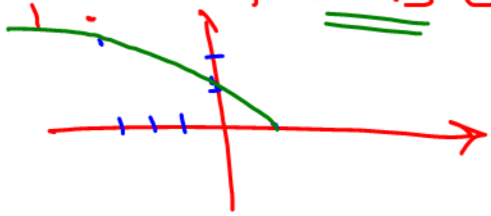
$y=\sqrt{|x|}$ $\quad$ $\boxed{y=\sqrt[3]{x}}$



$f(x)=\sqrt{1-x}\geq 0$ $\quad 1-x\geq 0$ $\quad -x\geq -1$ $\quad \boxed{x\leq 1}$

$D_f=(-\infty,1]$

x	-3	0	1
y	2	1	0



تابع چندضابطه‌ای

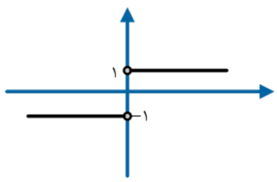
برخی از توابع دارای بیش از یک ضـابطه هسـتند؛ به این ترتیب که دامنه آن ها به تعدادی زیر مجموعه دو به دو جدا از هم تقسـیم می شود و برای هر زیر مجموعه یک ضابطه تعیین می گردد. شکل کلی تابع چند ضابطه ای به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in D_1 \\ f_2(x), & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x\in D_n \end{cases}\qquad D_i\cap D_j=\phi \qquad \{i,j\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$$

۴- تابع علامت: این تابع سه ضابطه ای را معمولا با نماد $y=\operatorname{sgn}(x)$ نمایش می دهند.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -1 & , \quad x<0 \end{cases}\qquad D_{sgn}=R \quad , \quad R_{sgn}=\{-1,0,1\}$$

نمودار این تابع به شکل روبرو است:



مثال ۵۳ برای تابع سه ضـابطه ای

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1}, & x\geq 1 \\ x^2-2x, & -2<x<1 \\ \dfrac{2}{x}, & x\leq -2 \end{cases}$$

مقادیر $f(1)$ و $f(2)$ و $f(0)$ و $f(-1)$ و $f(-2)$ و $f(-3)$ را بدست آورید.

نکته برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای، نمودار هر ضابطه را در محدوده دامنه آن ضابطه رسم می کنیم. به این ترتیب یک نمودار چند نکته به دست می آید.

مثال ۵۴ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & , \quad x<2 \\ 2x-1 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

مثال ۵۵ تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x-3 & x<0 \end{cases}$$

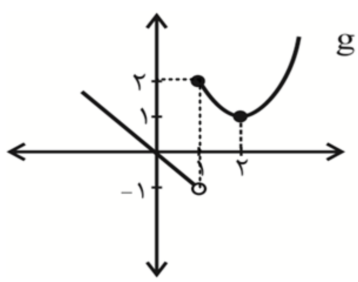
مثال ۵۶ اگر $f(x)=\begin{cases} |x-2| & , \quad x<-2 \\ x^2+1 & , \quad x\geq -2 \end{cases}$ باشد حاصل $f(-2)$ و $f(f(-3))$ را بیابید.

مثال ۵۷ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

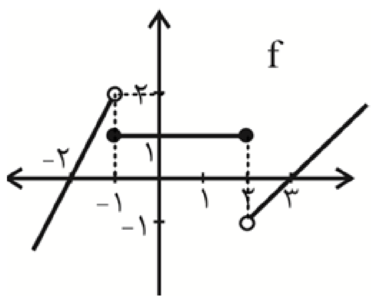
$$h(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ |x| & -1\leq x\leq 1 \\ 3x+2 & x<-1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-4 & x>1 \\ \frac{5}{2} & x=1 \\ -x & -4<x<1 \end{cases}$$

مثال ۵۸ ضابطهٔ تابع متناظر با شکل مقابل را تعیین کنید.



ب)

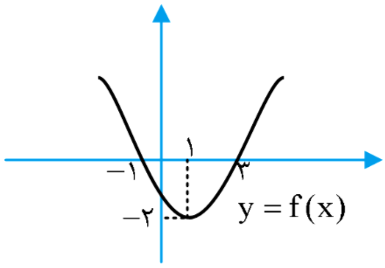


الف)

رسم نمودار برخی از توابع به کمک تبدیلات:

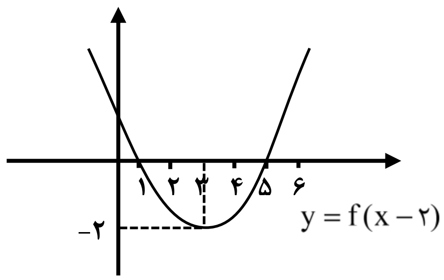
به کمک تبدیلات هندسی و جبری، می توانیم نمودار برخی از توابع را از روی یک نمودار بسازیم.

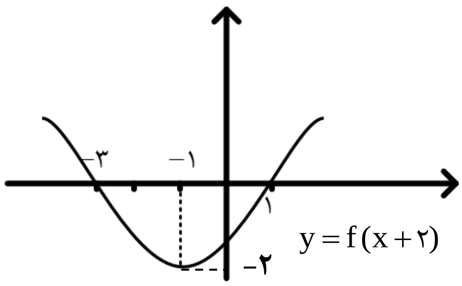
فرض کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو در دست باشد:



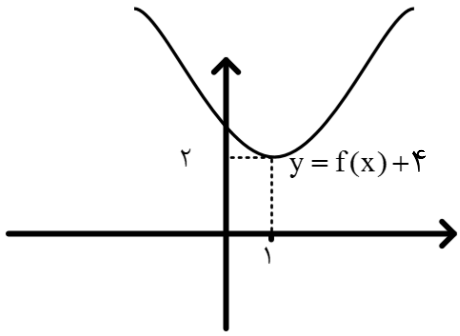
الف) انتقال: فرض کنیم a یک عدد ثابت مثبت باشد.

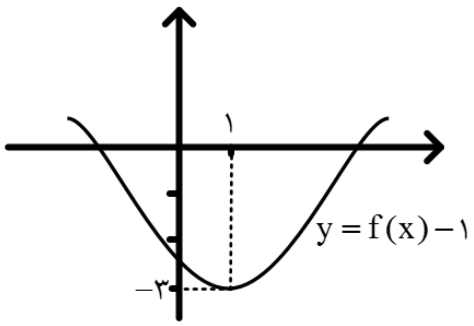
برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ نمودار $y=f(x)$ را به اندازه a به چپ و برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$ به راست منتقل می کنیم.





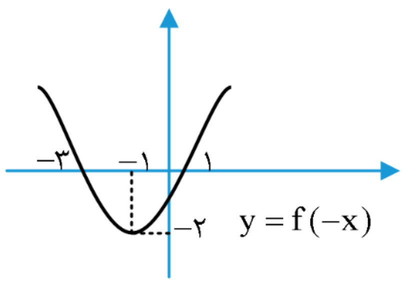
۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ نمودار $y=f(x)$ را به اندازه a به بالا و برای رسم $y=f(x)-a$ به اندازه a به پایین منتقل می کنیم.



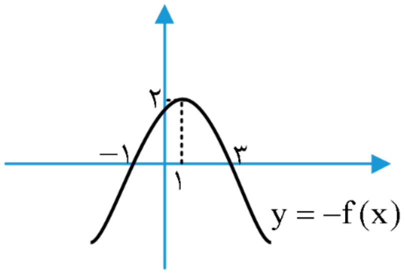


ب) تقارن:

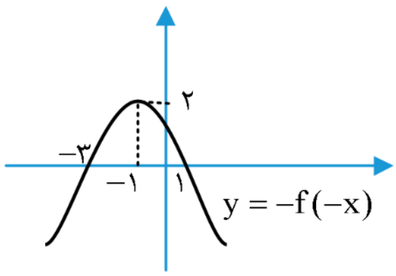
۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می کنیم.



۲) برای رسم نمودار $y=-f(x)$ ، نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می کنیم.



۳) برای رسم نمودار $y=-f(-x)$ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به مبدا مختصات قرینه می کنیم.

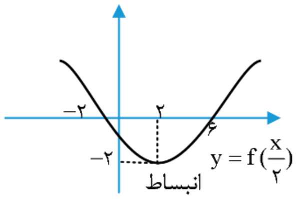


پ) انبساط یا انقباض: فرض کنیم a یک عدد مثبت باشد.

۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(ax)$ ، x های نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{a}$ ضرب می کنیم.

با شرط $0<a<1$ نمودار پهن می شود (انبساط در راستای محور x ها)

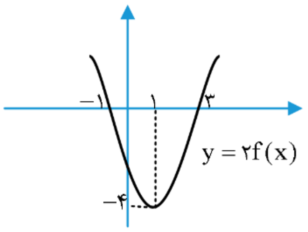
با شرط $a>1$ نمودار باریک می شود (انقباض در راستای محور x ها)



۲) برای رسم نمودار تابع $y=af(x)$ ، y های نمودار $y=f(x)$ را در a ضرب می کنیم.

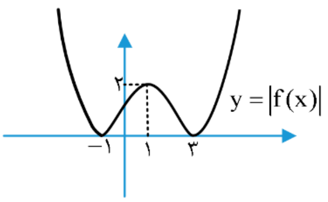
با شرط $0<a<1$ نمودار کوتاه می شود (انقباض در راستای محور yها)

با شرط $a>1$ نمودار دراز می شود (انبساط در راستای محور yها)

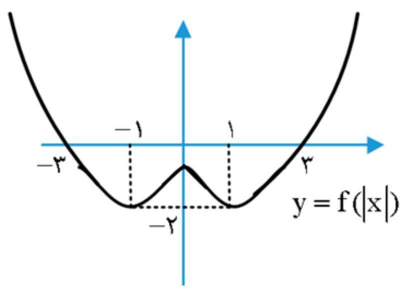


ت) قدر مطلق:

۱) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ بخشی از نمودار $y=f(x)$ را که زیر محور xها قرار دارد، نسبت به این محور قرینه می کنیم و بخش زیرین را پاک می نماییم.



۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ بخشی از نمودار $y=f(x)$ را که سمت چپ محور yها قرار دارد پاک می کنیم و بخش سمت راست را نسبت به این محور قرینه می نماییم.



مثال ۵۹ مقادیر a و b را به گونه ای بیابید که تابع زیر یک تابع ثابت گردد.

$f=\{(-2,2a+b),(3,-a-b),(0,-1)\}$

مثال ۶۰ مقدار a را به گونه ای به دســت آورید که تابع با ضـابطه $f(x)=\dfrac{2x+3}{ax-6}$ یک تابع ثابت گردد، سـپس ضـابطه آن را به دست آورید.

مثال ۶۱ مقادیر m و n را به گونه ای به دست آورید که تابع زیر یک تابع همانی باشد.

$$f(x)=\frac{(m+2)x}{(n-1)x-4n}$$

مثال ۶۲ اگر تابع $f(x)=(a-2)x^2+(a+1)x+b$ یک تابع خطی باشد که از نقطه $(1,4)$ می گذرد، نمودار آن را رسم کنید.

مثال ۶۳ به کمک تبدیلات در هر مورد از روی نمودار تابع $y=f(x)$ نمودار تابع $y=g(x)$ را رسم کنید.

۱) $f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=x^2-2x+1$

۲) $f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=-x^2+4x-5$

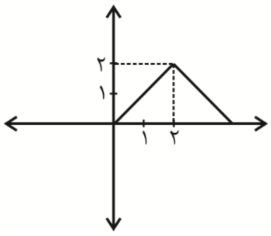
۳) $f(x)=|x| \quad , \quad g(x)=|x+2|-3$

۴) $f(x)=|x| \quad , \quad g(x)=|2x-1|$

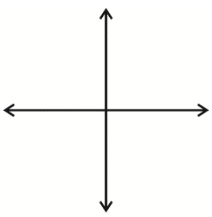
۵) $f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=2\sqrt{1-x}$

مثال ۶۴ فرض کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو داده شده است، به کمک تبدیلات، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

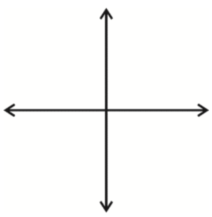
$D_f=[0,4]$
$R_f=[0,2]$



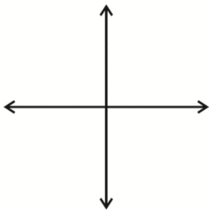
۱) $y=f(x)+1$



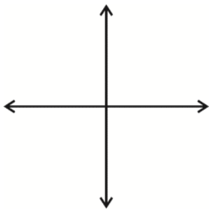
۶) $y=f(x+1)$



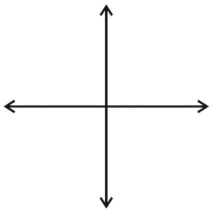
۲) $y=f(x)-۱$



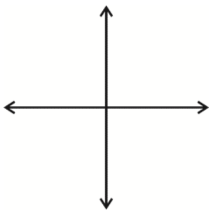
۳) $y=۲f(x)$



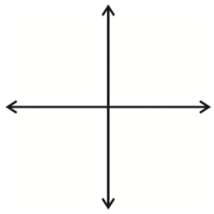
۴) $y=\frac{۱}{۲}f(x)$



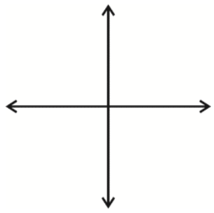
۵) $y=f(x-۱)$



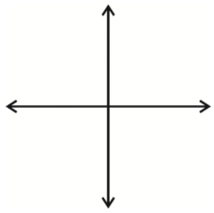
۷) $y=f(۲x)$



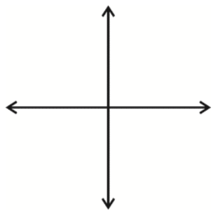
۸) $y=f(\frac{x}{۲})$



۹) $y=-f(x)$



۱۰) $y=f(-x)$



مثال ۶۵ تابع $y=x^{۲}-۱$ را به وسیله انتقال رسم کنید.

مثال ۶۶ تابع $y=۲x^{۲}+۴x$ را به وسیله انتقال رسم کنید.