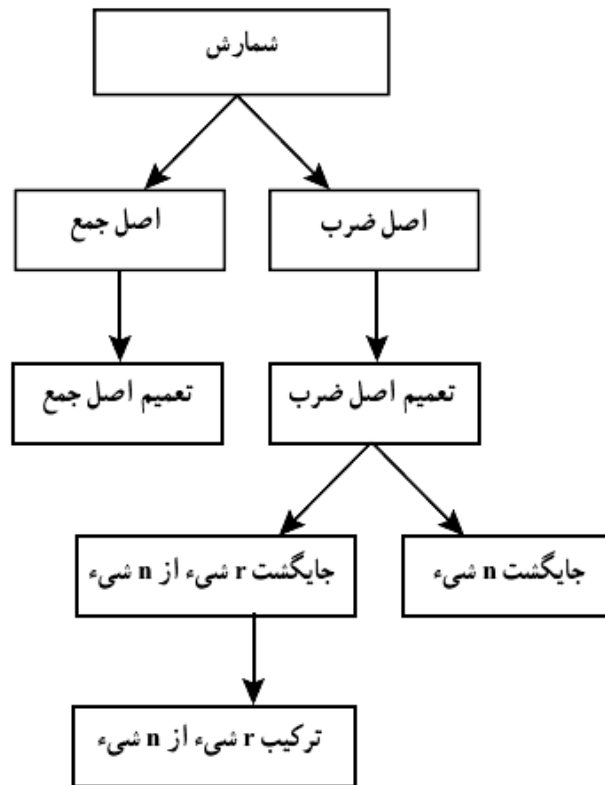




فصل ششم

شمارش، بدون شمردن



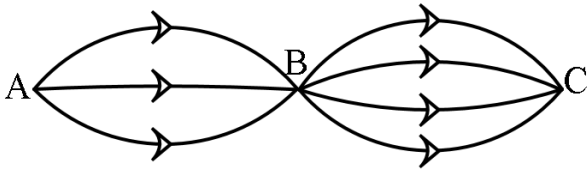


بخش اول: اصول شمارش

(۱) اصل ضرب

این بخش را با یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۱. فرض کنیم برای رفتن از شهر A به شهر C، باید از شهر B بگذریم. از A به B سه راه و از B به C چهار راه وجود دارد. بنابراین برای انجام این کل این سفر $3 \times 4 = 12$ راه وجود دارد.



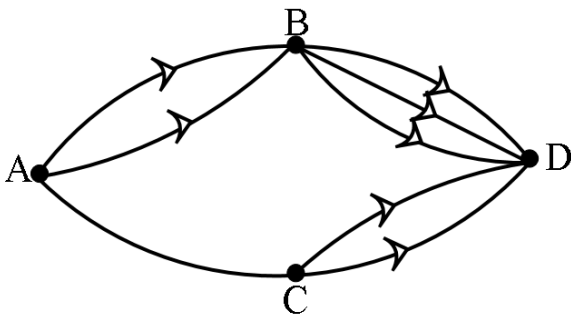
در این مثال مسافرت شامل دو مرحله بود و تعداد انتخاب‌های این دو مرحله را در هم ضرب کردیم. به این عمل اصل ضرب گفته می‌شود.

اصل ضرب در حالت کلی: فرض کنیم کارهای A_1, A_2, \dots, A_k به ترتیب به n_1, n_2, \dots, n_k راه انجام پذیر باشند. در این صورت برای انجام همه این کارها به شکل پی در پی تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$. نتیجه: هر جا که حرف «و» بکار رفته باشد، تعداد راه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

(۲) اصل جمع

این بخش را با یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۲. فرض کنیم برای رفتن از شهر A به شهر D، دو روش وجود دارد. یکی از روش‌ها این است که از شهر B عبور کنیم و روش دیگر این است که از شهر C عبور کنیم. (مطابق شکل زیر).



پس برای رفتن A به D، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

B مسیر : $2 \times 3 = 6$

C مسیر : $1 \times 2 = 2$



$8 = 2 + 6$: تعداد کل راه‌ها

در این مثال، تعداد روش‌های دسته اول (عبور از شهر B) را با تعداد روش‌های دسته دوم (عبور از شهر C) جمع می‌کنیم. به این عمل اصل جمع گفته می‌شود.

اصل جمع در حالت کلی: فرض کنیم کاری را بتوانیم به هریک از روش‌های A_1, A_2, \dots, A_k به طور مستقل انجام دهیم که برای انجام این روش‌ها، به ترتیب n_1, n_2, \dots, n_k راه موجود باشد. در این صورت، تعداد کل راه‌های ممکن برای انجام کار مورد نظر برابر است با:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

نتیجه: هر جا که حرف «یا» بکار رفته باشد، تعداد راه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

تفاوت اصل‌های ضرب و جمع در اصل ضرب، کار مورد نظر از k مرحله تشکیل شده است که باید همگی انجام شوند و بدون انجام حتی یکی از آنها کار انجام نمی‌شود؛ اما در اصل جمع، کار مورد نظر فقط به یکی از روش‌ها انجام می‌شود.

مثال ۳ فرض کنید یک کافی شاپ، سه نوع بستنی و ۴ نوع آبنبوه دارد. به دلیل صرفه‌جویی، می‌خواهید دوست خود را فقط به بستنی یا آبنبوه مهمان کنید. به چند روش می‌توانید این کار را انجام دهید؟ توضیح دهید.

$$3 + 4 = 7$$

مثال ۴ فرض کنید در مثال بالا به دلیل علاقه‌ای که به دوستان دارید می‌خواهید برای او هم بستنی و هم آبنبوه بخرید. این کار به چند روش قابل انجام است؟

$$3 \times 4 = 12$$



عدد سازی به کمک اصول شمارش

در این بخش حالت‌های مختلف عددسازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

حالت اول: عددسازی با امکان تکرار رقم

در این حالت تکرار رقم مجاز است و از سمت چپ (بدون در نظر گرفتن صفر) شروع می‌کنیم.

۵. مثال چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

۶. مثال چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟

۷. مثال با ارقام ۱۰، ۴، ۲، ۵ و ۹ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟

حالت دوم (عددسازی بدون تکرار رقم)

باز هم از سمت چپ شروع می‌کنیم با این تذکر که از هر خانه که عبور می‌کنیم تعداد حالات یک واحد کم می‌شود.

۸. مثال چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقم می‌توان نوشت؟

۹. مثال چند عدد چهار رقمی بدون تکرار رقم می‌توان نوشت؟

۱۰. مثال با ارقام ۱۰، ۷، ۴، ۸ و ۹ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟



حالت سوم: عدد سازی با شرایط ویژه در این حالت عدد مورد نظر دارای ویژگی‌های خاصی نظیر زوج بودن یا فرد

بودن یا مضرب ۵ بودن یا غیره است. برای پیدا کردن تعداد این عددها، از جایگاهی که بیشترین محدودیت را دارد آغاز می‌کنیم.

مثال ۱۱. با ارقام ۰ تا ۷ تعداد ۷۲۰ عدد چهار رقمی فرد بدون رقم تکراری می‌توان ساخت. زیرا به علت فرد بودن، رقم سمت راست فقط می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ باشد. رقم سمت چپ، صفر نمی‌تواند باشد. رقم یکان محدودیت بیشتری دارد. پس از این جایگاه آغاز می‌کنیم، سپس به جایگاه سمت چپ می‌رسیم.

دلیل	تعداد انتخاب‌ها	جایگاه رقم	شماره مرحله
وجود ۴ رقم فرد (۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷)	۴	یکان	۱
حذف شدن صفر و رقم مصرف شده در جایگاه یکان	۶	هزارگان	۲
حذف شدن دو رقم مصرف شده	۶	صدگان	۳
حذف شدن سه رقم مصرف شده	۵	دهگان	۴

$$۷۲۰ = ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۶ : \text{تعداد کل}$$

مثال ۱۲. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

مثال ۱۳. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ چند عدد سه رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

مثال ۱۴. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟



مثال ۱۶. با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد سه رقمی فرد می توان نوشت؟

مثال ۱۶. با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۳۰۰ می توان نوشت؟

در ساختن کد یا رمز امکان وجود عدد صفر در ابتدا یعنی سمت چپ وجود دارد.

مثال ۱۷. رمز یک گاوصندوق سه رقمی است. چند رمز می توان برای آن ساخت، در صورتی که:

الف) تکرار رقم مجاز نباشد.

ب) تکرار رقم مجاز باشد.

مثال ۱۶. اگر کد تلفن شهرستان های ایران چهار رقمی باشد و رقم صفر در ابتدا و تکرار ارقام غیر صفر مجاز باشد، چند

کد تلفن وجود دارد؟

اصل متمم

در برخی از مسائل، به جای اینکه تعداد حالات خواسته شده را بدست آوریم، بهتر است که تعداد حالات ناخواسته را از

$$n(A) = n(S) - n(A')$$

کل

تعداد کل حالات کم کنیم. به زبان مجموعه ها:

مثال ۱۶. در چند عدد سه رقمی، رقم ۲ وجود دارد؟ (تکرار مجاز)



مثال ۱۷. در چند عدد چهار رقمی، رقم صفر وجود دارد؟ (تکرار مجاز)

مثال ۱۸. در چند عدد چهار رقمی، رقم‌های ۲ و ۳ با هم وجود ندارند؟ (تکرار مجاز)

مثال ۱۹. یک آزمون شامل ۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد در صورتی که پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد؟

مثال ۲۰. یک آزمون شامل ۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد در صورتی که پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی نباشد؟

مثال ۲۱. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰ بدون رقم تکراری می‌توان نوشت؟

بخش دوم: جایگشت

معرفی فاکتوریل: فاکتوریل نمادی است که به صورت زیر تعریف می‌شود و به کمک آن، برخی از محاسبات شامل ضرب یا تقسیم، ساده‌تر انجام می‌شوند.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$



$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

ویژگی‌های فاکتوریل:

$$1) n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

$$2) \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$3) 0! = 1$$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

مثال ۲۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{15!}{14!}$

ب) $\frac{20!}{17!}$

ج) $\frac{10!}{3! \times 7!}$

د) $\frac{n!}{(n-2)!}$

ه) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

مثال ۲۳. اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 156$ مقدار n را به دست آورید.

تعریف جایگشت: به هر آرایش سطری یا دایره‌ای از هر تعداد دلخواهی عنصر متمایز، یک جایگشت گوئیم. به بیان

دیگر جابه‌جا شدن n عنصر متفاوت در n مکان دلخواه را جایگشت گوئیم.تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز در یک ردیف برابر است با $n!$

مثال ۲۴. ۶ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟



در جایگشت، اگر اشیاء خاصی مورد نظر باشند که بخواهند همواره در کنار یکدیگر قرار گیرند،

آنها را یک شیء در نظر می‌گیریم. البته باید توجه کرد که خودشان با هم جابه‌جا می‌شوند.



مثال ۲۵. در چند جایگشت از حروف a, b, c, d, e, f, g حروف c, d, e کنار هم قرار می‌گیرند؟



مثال ۲۶. چهار افسر و سه سرباز می‌خواهند در کنار یکدیگر قرار گیرند، این کار به چند طریق ممکن است. هرگاه:

(الف) هیچ محدودیتی نباشد.

(ب) فقط افسرها کنار یکدیگر باشند.

(ج) سربازها کنار یکدیگر باشند.

(د) افسرها کنار یکدیگر و سربازها کنار یکدیگر باشند.

جایگشت یک در میان:

حالت اول: هرگاه n شیء از یک نوع با n شیء از نوع دیگر را به صورت یک در میان در یک ردیف

جایگشت دهیم، در این صورت تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$2 \times n! \times n!$$

حالت دوم: هرگاه n شیء از یک نوع با $(n-1)$ شیء از نوع دیگر را به صورت یک در میان در یک ردیف

جایگشت دهیم، در این صورت تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$n! \times (n-1)!$$



مثال ۲۷. به چند طریق می‌توان ۴ افسر و ۴ سرباز را در یک ردیف قرار داد، به طوری که بصورت یک در میان باشند؟



مثال ۲۸. به چند طریق می توان ۳ افسر و ۴ سرباز را بصورت یک در میان در یک ردیف قرار داد؟

مثال ۲۹. در چند جایگشت از حروف کلمه triangle حرف اول بی صدا و حرف آخر صدادار است؟

مثال ۳۰. در تساوی $\frac{(n+1)!}{n!} = 42$ مقدار n چند است؟

مثال ۳۱. ۶ سرباز و ۵ افسر به چند طریق می توانند در یک ردیف بایستند به طوری که هیچ دو سربازی کنار هم نباشند؟

مثال ۳۲. در چند جایگشت از حروف کلمه رستاخیز عبارت خیز وجود دارد؟

مثال ۳۳. در چند جایگشت از حروف کلمه درخشان بین حروف د و ش دقیقاً یک حرف قرار می گیرد؟

مثال ۳۴. بدون در نظر گرفتن معنی با حروف کلمه دبیرستان چند کلمه هشت حرفی مختلف می توان نوشت که با حرف

ب شروع و به حرف س ختم شوند؟



بخش سوم: انتخاب

الف) ترتیب

در صورتی که بخواهیم از بین n عنصر دو به دو متمایز، r عنصر متمایز را کنار هم قرار دهیم و آن‌ها را بچینیم (ترتیب مهم است) برای یافتن تعداد حالات، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

و ترتیب مهم باشد

$$P(\underbrace{n}_{\text{کل}}, \underbrace{r}_{\text{جزء}}) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۳۵. چند کلمه سه حرفی با حروف a, b, c, d, e, f, g می‌توان نوشت؟

مثال ۳۶. چند جایگشت ۵ حرفی با حروف (د - م - ن - س - ب - ج - ص - ض - ط) می‌توان نوشت که با حرف م شروع و به حرف ص ختم شوند؟

مثال ۳۷. چند کلمه ۴ حرفی با حروف کلمه شباویز می‌توان نوشت که حرف ی در آن‌ها موجود باشد؟

جایگشت‌های تکراری

اگر از بین n شیء، n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم و ... و n_k تا از نوع k ام باشند به طوری که $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ و جابه جایی اشیاء هم نوع بی‌تاثیر باشد، آن‌گاه تعداد کل جایگشت‌های n عنصر داده شده برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$



مثال ۳۸. با اعداد ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳ چند عدد شش رقمی می توان ساخت؟

مثال ۳۹. با حروف کلمه آبادان چند کلمه شش حرفی با معنی یا بی معنی می توان ساخت؟

مثال ۴۰. با حروف کلمه اساسنامه چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت؟

جایگشت دایره‌ای

قرار گرفتن حروف، افراد، ... در یک دایره باعث تکرار می شود و در نتیجه اگر n نفر داشته باشیم در این حالت جایگشت آن‌ها:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

مثال ۴۱. ۵ نفر دور یک میز دایره‌ای شکل می نشینند. به چند حالت ممکن است؟

مثال ۴۲. هشت نفر به چند طریق می توانند دور یک میز دایره‌ای بنشینند؟

مثال ۴۳. پنج زوج به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند طوری که هر نفر کنار همسر خود بنشیند؟



مثال ۴۴. هشت زوج می‌خواهند در یک ردیف روی صندلی بنشینند طوری که هر فرد کنار همسرش قرار گیرد. این کار به چند طریق ممکن است؟

مثال ۴۵. چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که رقم اول و آخر آن، عدد اول باشد؟

مثال ۴۶. از تساوی $P(n, 5) = 18P(n-2, 4)$ مقدار n را حساب کنید.

تذکره به یاد داشته باشیم:

$$۱) P(n, 0) = 1$$

$$۲) P(n, 1) = n$$

$$۳) P(n, n-1) = n!$$

$$۴) P(n, n) = n!$$

(ب) ترکیب

اگر بخواهیم از میان n عنصر دو به دو متمایز، r عنصر را انتخاب کنیم بدون اینکه ترتیب عناصر انتخاب شده مهم باشد، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$



مثال ۴۷. به چند روش می‌توانیم از میان ۱۰ دانش‌آموز، ۴ نفر را برای تشکیل یک گروه انتخاب کنیم؟



$$C(n, r) = \binom{n}{r}$$

تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با:



مثال ۴۸. یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟



تذکره در مسائل مربوط به شمارش، اگر با کلمات یا، حداقل و حداکثر روبه‌رو شویم و یا اینکه ناچار به حالت‌گیری شویم، جمع تعداد حالات مدنظر است و اگر با حروف و یا هر دو روبه‌رو شویم از ضرب حالات می‌توانیم استفاده کنیم. این واقعیت در احتمالات نیز وجود دارد.



در واقع مطلب بالا تذکری به اصل جمع است. اگر مفهوم مسئله به نوعی بیان شود، تعداد حالات به دست آمده در مراحل حل مسئله، در نهایت با یکدیگر جمع می‌شوند.

مثال ۴۹. از میان ۷ دانش‌آموز کلاس اولی، ۶ کلاس دومی و ۴ کلاس سومی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را انتخاب کرد که همکلاسی باشند؟



مثال ۵۰. از میان ۸ زن و ۷ مرد به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره متشکل از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل داد؟





$$۱) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$۲) \binom{n}{1} = C(n, 1) = n$$

$$۳) \binom{n}{n-1} = C(n, n-1) = n$$

$$۴) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \text{ بسیار مهم}$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{10}{7} + \binom{10}{6} = \binom{11}{7}$$

مثال ۵۱. در تساوی‌های زیر مقدار n را به دست آورید.

الف) $\binom{n+1}{7} = \binom{n+1}{5}$

ب) $\binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n} = 19$