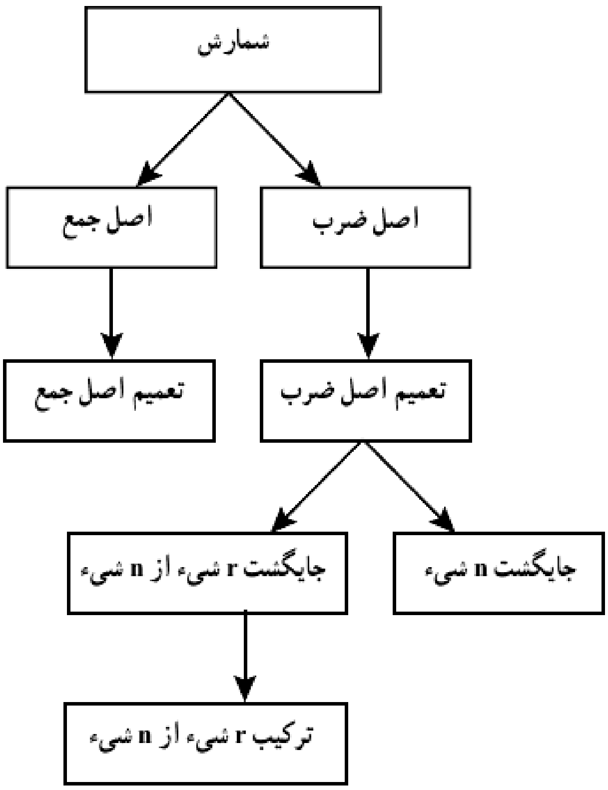
فصل ششم

شمارش، بدون شمردن

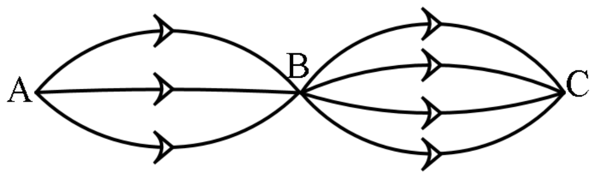


بخش اول: اصول شمارش

۱) اصل ضرب

این بخش را با یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۱. فرض کنیم برای رفتن از شهر **A** به شهر **C**، باید از شهر **B** بگذریم. از **A** به **B** سه راه و از **B** به **C** چهار راه وجود دارد. بنابراین برای انجام این کل این سفر $۳\times۴=۱۲$ راه وجود دارد.



در این مثال مسافرت شامل دو مرحله بود و تعداد انتخاب‌های این دو مرحله را در هم ضرب کردیم. به این عمل اصل ضرب گفته می‌شود.

اصل ضرب در حالت کلی: فرض کنیم کارهای $A_1, A_2, ..., A_k$ به ترتیب به $n_1, n_2, ..., n_k$ راه انجام پذیر باشند. در این صورت برای انجام همهٔ این کارها به شکل پی در پی تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$

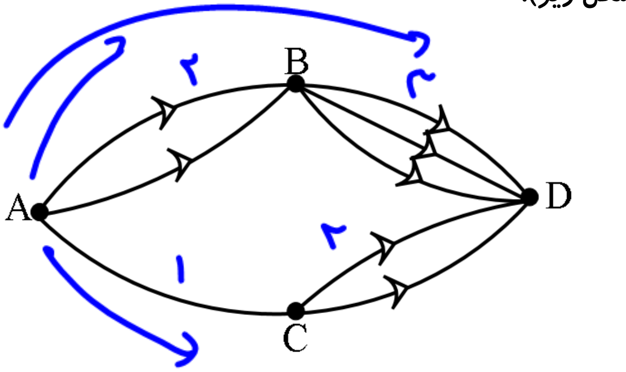
نتیجه: هر جا که حرف «و» بکار رفته باشد، تعداد راه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

+ یا

۲) اصل جمع

این بخش را با یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۲. فرض کنیم برای رفتن از شهر **A** به شهر **D**، دو روش وجود دارد. یکی از روش‌ها این است که از شهر **B** عبور کنیم و روش دیگر این است که از شهر **C** عبور کنیم. (مطابق شکل زیر).



پس برای رفتن **A** به **D**، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

از مسیر **B**: $۲\times۳=۶$

از مسیر **C**: $۱\times۲=۲$

یا = ۲+۶=۸

$۶+۲=۸$: تعداد کل راه‌ها

در این مثال، تعداد روش‌های دسته اول (عبور از شهر B) را با تعداد روش‌های دسته دوم (عبور از شهر C) جمع می‌کنیم.

به این عمل اصل جمع گفته می‌شود.

اصل جمع در حالت کلی: فرض کنیم کاری را بتوانیم به هریک از روش‌های $A_1, A_2, ..., A_k$ به طور مستقل انجام دهیم که برای انجام این روش‌ها، به ترتیب $n_1, n_2, ..., n_k$ راه موجود باشد. در این صورت، تعداد کل راه‌های ممکن برای انجام کار مورد نظر برابر است با:

یا

$$n_1 + n_2 + ... + n_k$$

نتیجه: هر جا که حرف «یا» بکار رفته باشد، تعداد راه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

تفاوت اصل‌های ضرب و جمع در اصل ضرب، کار مورد نظر از k مرحله تشکیل شده است که باید همگی انجام شوند و بدون انجام حتی یکی از آنها کار انجام نمی‌شود؛ اما در اصل جمع، کار مورد نظر فقط به یکی از روش‌ها انجام می‌شود.

مثال ۳. فرض کنید یک کافی شاپ، سه نوع بستنی و ۴ نوع آبمیوه دارد. به دلیل صرفه‌جویی، می‌خواهید دوست خود را فقط به بستنی یا آبمیوه مهمان کنید. به چند روش می‌توانید این کار را انجام دهید؟توضیح دهید.

یا

$۳+۴=۷$

مثال ۴. فرض کنید در مثال بالا به دلیل علاقه‌ای که به دوستتان دارید می‌خواهید برای او هم بستنی و هم آبمیوه بخرید.

این کار به چند روش قابل انجام است؟

$۳\times۴=۱۲$

و ـ هردو $\longrightarrow \times$

یا ـ یا هردو $\longrightarrow +$

عدد سازی به کمک اصول شمارش

در این بخش حالت‌های مختلف عددسازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

حالت اول: عددسازی با امکان تکرار رقم

در این حالت تکرار رقم مجاز است و از سمت چپ (بدون در نظر گرفتن صفر) شروع می‌کنیم.

مثال ۵. چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

$9 \times 10 \times 10 = 900$

مثال ۶. چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟

$9000 = 9 \times 10 \times 10 \times 10$

مثال ۷. با ارقام ۰،۱،۲،۴،۵ و ۹ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟

$5 \times 6 \times 6 \times 6 = 5 \times 6^3$

حالت دوم) عددسازی بدون تکرار رقم

باز هم از سمت چپ شروع می‌کنیم با این تذکر که از هر خانه که عبور می‌کنیم تعداد حالات یک واحد کم می‌شود.

مثال ۸. چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقم می‌توان نوشت؟

$9 \times 9 \times 8 = 81 \times 8 = 648$

مثال ۹. چند عدد چهار رقمی بدون تکرار رقم می‌توان نوشت؟

$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 81 \times 8 \times 7 = 648 \times 7$

مثال ۱۰. با ارقام ۰،۱،۳،۷،۸ و ۹ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

$5 \times 5 \times 4 \times 3$

حالت سوم: عدد سازی با شرایط ویژه در این حالت عدد مورد نظر دارای ویژگی‌های خاصی نظیر زوج بودن یا فرد بودن یا مضرب ۵ بودن یا غیره است. برای پیدا کردن تعداد این عددها، از جایگاهی که بیشترین محدودیت را دارد آغاز می‌کنیم.

۴×۱۸۰=۷۲۰   ۱۸۰ = ۶ ۶ ۵ ۱   ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷

مثال ۱۱. با ارقام ۰ تا ۷ تعداد ۷۲۰ عدد چهار رقمی فرد بدون رقم تکراری می‌توان ساخت. زیرا به علت فرد بودن، رقم سمت راست فقط می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ باشد. رقم سمت چپ، صفر نمی‌تواند باشد. رقم یکان محدودیت بیشتری دارد. پس از این جایگاه آغاز می‌کنیم، سپس به جایگاه سمت چپ می‌رسیم.

دلیل	تعداد انتخاب‌ها	جایگاه رقم	شمارهٔ مرحله
وجود ۴ رقم فرد (۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷)	۴	یکان	۱
حذف شدن صفر و رقم مصرف شده در جایگاه یکان	۶	هزارگان	۲
حذف شدن دو رقم مصرف شده	۶	صدگان	۳
حذف شدن سه رقم مصرف شده	۵	دهگان	۴

تعداد کل : $6\times6\times5\times4=720$

مثال ۱۲. با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵,۶ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۶ ۵ ۴ ۳ = ۳۶۰

مثال ۱۳. با ارقام ۳,۴,۵,۶,۷,۸ چند عدد سه رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۶ ۵ ۴ = ۱۲۰

مثال ۱۴. با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۷ ۶ ۱ = ۴۲

۵ ۵ ۳ = ۷۵

= ۱۱۷

۲,۴,۶

مثال ۱۶. با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟

تعداد ۳ ← ۱،۳،۵

۵ ۵ ۳ = ۷۵

مثال ۱۶. با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ می‌توان نوشت؟

۳،۴،۵ ← ۳ ۵ ۵

تذکر: در ساختن کد یا رمز امکان وجود عدد صفر در ابتدا یعنی سمت چپ وجود دارد.

مثال ۱۷. رمز یک گاوصندوق سه رقمی است. چند رمز می‌توان برای آن ساخت، در صورتی که:

۰،۱،۲،... ،۹

الف) تکرار رقم مجاز نباشد. ← ۱۰ ۹ ۸ = ۷۲۰

ب) تکرار رقم مجاز باشد. ← ۱۰ ۱۰ ۱۰ = ۱۰۰۰

مثال ۱۶. اگر کد تلفن شهرستان‌های ایران چهار رقمی باشد و رقم صفر در ابتدا و تکرار ارقام غیرصفر مجاز باشد، چند کد تلفن وجود دارد؟

۱ ۹ ۹ ۹ = ۸۱×۹ = ۷۲۹

اصل متمم

در برخی از مسائل، به جای اینکه تعداد حالات خواسته شده را بدست آوریم، بهتر است که تعداد حالات ناخواسته را از تعداد کل حالات کم کنیم. به زبان مجموعه‌ها:

$$n(A) = n(S) - n(A')$$

کل — سریع — متمم

مثال ۱۶. در چند عدد سه رقمی، رقم ۱ وجود دارد؟ (تکرار مجاز)

تعداد سه رقمی با تکرار = ۹ ۱۰ ۱۰ = ۹۰۰

تعداد سه رقمی بدون ۱ = ۸ ۹ ۹ = ۶۴۸

۹۰۰ − ۶۴۸ = ۲۵۲ ← رقم ۱

مثال ۱۷. در چند عدد چهار رقمی، رقم ~~صفر~~ وجود دارد؟ (تکرار مجاز)

$۹ \; ۱۰ \; ۱۰ \; ۱۰ = ۹۰۰۰$

بدون صفر ← $۹ \; ۹ \; ۹ \; ۹ = ۹^۴$ ۱,۲,...,۹

$۹۰۰۰ - ۹^۴ =$ رقم صفر

مثال ۱۸. در چند عدد چهار رقمی، رقم‌های ۲ و ۳ با هم وجود ندارند؟ (تکرار مجاز)

$S = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰۰$

$A' \cap B' = (A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B) = n(S) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$

مثال ۱۹. یک آزمون شامل ۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد در صورتی‌که پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد؟

$۴ \; ۴ \; ۴ \; \dots \; ۴ = \boxed{۴^{۱۰}}$

مثال ۲۰. یک آزمون شامل ۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای است. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد درصورتی‌که پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی نباشد؟

$۵ \; ۵ \; ۵ \; \dots \; ۵ = ۵^{۱۰}$

مثال ۲۱. با ارقام ۶,۵,۴,۳,۲,۱، چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰ بدون رقم تکراری می‌توان نوشت؟

$۳ \; ۵ \; ۴ = ۶۰$

بخش دوم: جایگشت

معرفی فاکتوریل: فاکتوریل نمادی است که به صورت زیر تعریف می‌شود و به کمک آن، برخی از محاسبات شامل ضرب یا تقسیم، ساده‌تر انجام می‌شوند.

$$\boxed{n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \dots \times ۲ \times ۱} \qquad (n \in \mathbb{R})$$

$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

تذکر ویژگی‌های فاکتوریل:

$1)\ n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \ldots$

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3!$

$10! = 10 \times 9! = 10 \times 9 \times 8!$

$2)\ \frac{n!}{n} = (n-1)! \rightarrow \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{n}} = (n-1)!$

$3)\ 0! = 1 \rightarrow 0! = 1! = 1$

$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

مثال ۲۲. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{15!}{14!} = \frac{15 \times \cancel{14!}}{\cancel{14!}} = 15$

ب) $\frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{17!}}{\cancel{17!}} = 20 \times 19 \times 18$

ج) $\frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7!}}{\cancel{3 \times 2 \times 1} \times \cancel{7!}} = 120$

د) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n(n-1)$

هـ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n = n^2+n$

مثال ۲۳. اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 156$ مقدار n را به‌دست آورید.

$n^2+n = 156$

$n^2+n-156 = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(-156) = 1 + 624 = 625$

$n = \frac{-1 \pm 25}{2}$ ، 12 ✓ ، -13 ✗

تعریف جایگشت: به هر آرایش سطری یا دایره‌ای از هر تعداد دلخواهی عنصر متمایز، یک جایگشت گوییم. به بیان دیگر جابه‌جا شدن n عنصر متفاوت در n مکان دلخواه را جایگشت گوییم.

تعداد جایگشت های n شیء متمایز در یک ردیف برابر است با $n!$

مثال ۲۴. ۶ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟

۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

$= 6!$

تذکر: در جایگشت، اگر اشیاء خاصی مورد نظر باشند که بخواهند همواره در کنار یکدیگر قرار گیرند، آن‌ها را یک شئ درنظر می‌گیریم. البته باید توجه کرد که خودشان با هم جابه‌جا می شوند.

مثال ۲۵. در چند جایگشت از حروف a, b, c, d, e, f, g حروف e, d, c کنار هم قرار می‌گیرند؟

۵! × ۳!

مثال ۲۶. چهار افسر و سه سرباز می‌خواهند در کنار یکدیگر قرار گیرند، این کار به چند طریق ممکن است. هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی نباشد.

۷!

ب) فقط افسرها کنار یکدیگر باشند.

۴! × ۴!

ج) سربازها کنار یکدیگر باشند.

۵! × ۳!

د) افسرها کنار یکدیگر و سربازها کنار یکدیگر باشند.

۲! × ۴! × ۳!

جایگشت یک در میان:

حالت اول: هرگاه n شی از یک نوع با n شی از نوع دیگر را به صورت یک در میان در یک ردیف جایگشت دهیم، در این صورت تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$۲ \times n! \times n!$$

حالت دوم: هرگاه n شی از یک نوع با $(n-۱)$ شی از نوع دیگر را به صورت یک در میان در یک ردیف جایگشت دهیم، در این صورت تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$n! \times (n-۱)!$$

مثال ۲۷. به چند طریق می‌توان ۴ افسر و ۴ سرباز را در یک ردیف قرار داد، به طوری که بصورت یک در میان باشند؟

A S A S A S A S = ۴! × ۴! × ۲

XASASASSX

مثال ۲۸. به چند طریق می‌توان ۳ افسر و ۴ سرباز را بصورت یک در میان در یک ردیف قرار داد؟

SASASAS ⇒ $4! \times 3!$

مثال ۲۹. در چند جایگشت از حروف کلمه triangle حرف اول بی‌صدا و حرف آخر صدادار است؟

$= 18 \times 6!$

مثال ۳۰. در تساوی $\frac{(n+1)!}{n!} = ۴۲$ مقدار n چند است؟

$$\Rightarrow \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = ۴۲ \qquad n+1=۴۲ \qquad \boxed{n=۴۱}$$

مثال ۳۱. ۶ سرباز و ۵ افسر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به‌طوری‌که هیچ دو سربازی کنار هم نباشند؟

سربازها یک در میان بنشینند

SASASASASAS

$= 6! \times 5!$

مثال ۳۲. در چند جایگشت از حروف کلمه رستاخیز عبارت خیز وجود دارد؟

$\boxed{5!}$

مثال ۳۳. در چند جایگشت از حروف کلمه درخشان بین حروف د و ش دقیقاً یک حرف قرار می‌گیرد؟

$2 \times 4! \times 4$

$6 + 3 + 3 = \boxed{12}$

مثال ۳۴. بدون درنظر گرفتن معنی با حروف کلمه دبیرستان چند کلمه هشت حرفی مختلف می‌توان نوشت که با حرف ب شروع و به حرف س ختم شوند؟

بخش سوم: انتخاب

الف) ترتیب

تبدیل

در صورتی‌که بخواهیم از بین n عنصر دو به دو متمایز، r عنصر متمایز را کنار هم قـرار دهـیم و آن‌هـا را بچینـیم (ترتیـب مهم است) برای یافتن تعداد حالات، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

و ترتیب مهم باشد

$P(n,r)$

$$P(\underbrace{n}_{\text{کل}},\underbrace{r}_{\text{جزء}})=\frac{n!}{(n-r)!}$$

انتخاب + چیدمان

مثال ۳۵. چند کلمه سه حرفی با حروف a, b, c, d, e, f, g می‌توان نوشت؟

$P(7,3)=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}}=7\times6\times5=210$

مثال ۳۶. چند جایگشت ۵ حرفی با حروف (د ـ ر ـ ن ـ س ـ ب ـ ج ـ ض ـ ض ـ ط) می‌توان نوشت که با حرف م شروع و به حرف ص ختم شوند؟

۱ ۷ ۶ ۵ ۱

ص   م

$P(7,3)=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}}$

مثال ۳۷. چند کلمه ۴ حرفی با حروف کلمه شباویز می توان نوشت که حرف ی در آن‌ها موجود باشد؟

۱ ۵ ۴ ۳ × ۴

ی

$P(5,3)=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}$

جایگشت‌های تکراری

اگر از بین n شیء، n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم و ... و n_k تا از نوع k ام باشند به طوری‌که $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ و جابه جایی اشیاء هم نوع بی تاثیر باشد، آن‌گاه تعداد کل جایگشت‌های n عنصر داده شده برابر است با:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\dots\times n_k!}}$$

مثال ۳۸. با اعداد ۳,۳,۳,۲,۲,۱ چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت؟

$\frac{6!}{3!\times 2!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = 60$ ج

مثال ۳۹. با حروف کلمه آبادان چند کلمه شش حرفی با معنی یا بی‌معنی می‌توان ساخت؟

$\frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 120$

مثال ۴۰. با حروف کلمه اساسنامه چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت؟

$1+6+4\times3=19$ ج

جایگشت دایره‌ای

قرار گرفتن حروف، افراد، ... در یک دایره باعث تکرار می‌شود و در نتیجه اگر n نفر داشته باشم در این حالت جایگشت آن‌ها:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

$n! \longrightarrow (n-1)!$

مثال ۴۱. ۵ نفر دور یک میز دایره‌ای شکل می‌نشینند. به چند حالت ممکن است؟

$(5-1)! = 4!$

مثال ۴۲. هشت نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میزه دایره‌ای بنشینند؟

$(8-1)! = 7!$ ج

مثال ۴۳. پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند طوری‌که هر نفر کنار همسر خود بنشیند؟

$(5-1)! = 4!$

$4!\times 2!\times 2!\times 2!\times 2!\times 2!$

مثال ۴۴. هشت زوج می‌خواهند در یک ردیف روی صندلی بنشینند طوری‌که هر فرد کنار همسرش قرار گیرد. این کار به چند طریق ممکن است؟

A B C D E F G H

$8! \times 2! \times 2! \times \cdots \times 2!$

۲,۳,۵,۷

مثال ۴۵. چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که رقم اول و آخر آن، عدد اول باشد؟

۴   ۱۰   ۹   ۸   ۷   ۶   ۵   ۴

مثال ۴۶. از تساوی $P(n,5)=18P(n-2,4)$، مقدار n را حساب کنید.

$n(n-1)(n-2)!$

$$\frac{n!}{(n-5)!}=18\times\frac{(n-2)!}{(n-6)!}$$

$(n-5)(n-6)!$

$$\frac{n(n-1)}{n-5}=18$$

$n^2-n=18n-90$

$n^2-19n+90=0$

$(n-9)(n-10)=0$

$\boxed{n=10,\ n=9}$

تذکر به یاد داشته باشیم:

$\frac{n!}{n!}=1$

۱) $P(n,0)=1$

۲) $P(n,1)=n$

۳) $P(n,n-1)=n!$

۴) $P(n,n)=n!$

ب) ترکیب

اگر بخواهیم از میان n عنصر دو به دو متمایز، r عنصر را انتخاب کنیم بدون اینکه ترتیب عناصر انتخاب شده مهم باشد، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\boxed{C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

مثال ۴۷. به چند روش می‌توانیم از میان ۱۰ دانش‌آموز، ۴ نفر را برای تشکیل یک گروه انتخاب کنیم؟

تذکر تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}$$

مثال ۴۸. یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

تذکر در مسائل مربوط به شمارش، اگر با کلمات یا، حداقل و حداکثر روبه‌رو شویم و یا اینکه ناچار به حالت گیری شویم، جمع تعداد حالات مدنظر است و اگر با حروف و یا هر دو روبه‌رو شویم از ضرب حالات می‌توانیم استفاده کنیم. این واقعیت در احتمالات نیز وجود دارد.

در واقع مطلب بالا تذکری به اصل جمع است. اگر مفهوم مسئله به نوعی بیان شود، تعداد حالات به دست آمده در مراحل حل مسئله، در نهایت با یکدیگر جمع می‌شوند.

مثال ۴۹. از میان ۷ دانش‌آموز کلاس اولی، ۶ کلاس دومی و ۴ کلاس سومی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را انتخاب کرد که همکلاسی باشند؟

مثال ۵۰. از میان ۸ زن و ۷ مرد به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره متشکل از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل داد؟

چند رابطه مهم:

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=C(n,۱)=n$

۳) $\binom{n}{n-۱}=C(n,n-۱)=n$

۴) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ بسیار مهم

$\binom{۵}{۲}=\binom{۵}{۳}=۱۰$

$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-۱}=\binom{n+۱}{k}$

$\binom{۱۰}{۷}+\binom{۱۰}{۶}=\binom{۱۱}{۷}$

مثال ۵۱. در تساوی‌های زیر مقدار n را به‌دست آورید.

الف) $\binom{n+۱}{۷}=\binom{n+۱}{۵}$

ب) $\binom{n}{n-۱}+\binom{n+۱}{n}=۱۹$