آموزش تشریحی- کنکور

ریاضی یازدهم انسانی

۱

گزاره‌های ساده و مرکب

۱ مفاهیم مقدماتی

هدف این مبحث، آشنایی با منطق (ریاضی) و کاربردهای ساده‌ای از آن است؛ می‌توان گفت:

کاربرد منطق در بیان دقیق و واضح احکام، تشخیص اعتبار استدلال‌ها و درست نتیجه‌گیری کردن است.

بویژه، منطق ریاضی، بیان مفاهیم و کاربرد منطق به زبان و نماد ریاضی است. در این بخش، مفاهیم مقدماتی بیان و بررسی می‌گردد. موضوع محوری:

گزاره:

یک جمله خبری که دارای ارزش «درست» یا «نادرست» باشد را «**گزاره**» گویند و آن را معمولاً با یکی از حروف p ، q، r و . . . نام گذاری می‌کنند.

توجه کنید:

- گزاره باید حتماً خبر بوده و درستی یا نادرستی آن در حال یا آینده قابل تعیین باشد. (ممکن است تعیین درست یا نادرست بودن یک خبر نیاز به زمان داشته و در این زمان ممکن نباشد.)
- گزاره‌ای که تنها از یک خبر تشکیل شده، «**گزاره‌ی ساده**» می‌نامیم. (بررسی سایر گزاره‌ها کمی پیش‌تر.)
- ارزش گزاره دقیقاً یکی از دو حالت زیر است:

درست (نماد: د یا T)　　　　**نادرست** (نماد: ن یا F)

بنابراین:

جملات از انواع زیر، گزاره محسوب نمی‌شوند:

- جملاتی که در آن‌ها خبری وجود ندارد؛ مانند جملات عاطفی، سؤالی، امری و . . .
- جملاتی که درست یا نادرست بودن آن‌ها هیچ‌گاه قابل تعیین نیست یا به نظر یا سلیقه‌ی اشخاص مختلف بستگی دارد.

افلاطون
↓
سقراط
↓
ارسطو

(**بدانید:** افلاطون فیلسوف بزرگ یونانی است. سقراط استاد و ارسطو شاگرد افلاطون بوده‌اند!)

مثال: (از کتاب)

گزاره‌ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟ گزاره نیست　　　　ب) عدد ۲ عددی اول است. گزاره است د

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. گزاره است ن　　　　ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. گزاره است ن

ث) $2+\underbrace{3\times4}_{12}\neq20$ گزاره است ن　　　　ج) عدد $(-1)^n$ برای $n\in\mathbb{N}$ همواره عددی مثبت است. گزاره است ن

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوشمزّه‌تر است. (نهایی- خرداد ۱۴۰۲) گزاره نیست　عدم قطعیت

ح) لطفاً تخته را پاک کن. گزاره نیست

پاسخ

موارد (الف: سؤالی) و (ح: امری) و (چ: تعیین درست یا نادرست سلیقه‌ای است.) گزاره نیستند. سایر موارد گزاره هستند.

ب) درست است. **پ)** نادرست است. **ت)** نادرست است.

ث) نادرست است؛ زیرا در محاسبه باید اولویت‌ها رعایت شود: $۲+\underbrace{۳\times۴}=۲+۱۲=۱۴$.

ج) نادرست است، برای n فرد، $(-۱)^n=-۱$ عددی منفی است.

-----------✧-----------

مثال: گزاره‌ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.

الف) ریاضی یازدهم از ریاضی سال قبل آسان‌تر است. گزاره نیست

ب) تساوی $\sqrt{۲۵}=\sqrt{۱۶}+\sqrt{۹}$ برقرار است. گزاره است ن

$۳+۴\neq۵$

پ) n عددی زوج است.

گزاره نیست

پاسخ

مورد اول خبر است، ولی چون تعیین درستی آن ممکن نیست، گزاره محسوب نمی‌شود. مورد دوم یک گزاره با ارزش «**ن**» است؛ زیرا:

$$\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=۳+۴=۷\neq\sqrt{۲۵}=۵$$

مورد سوم جمله‌ی خبری است، ولی چون از مقدار n اطلاع نداریم، تعیین ارزش خبر غیر ممکن بوده و گزاره محسوب نمی‌شود.

-----------✧-----------

مثال: عبارت:

«حاصل عبارت $۱+(۱\times۲\times۳\times\cdots\times۱۰۰)$ عددی اول است.» گزاره است ارزش آن احتیاج به دلیل دارد ن

یک گزاره است. هر چند الان نمی‌دانیم ارزش آن درست یا نادرست است، ولی با بررسی بیشتر قابل تعیین ارزش درستی است.

-----------✧-----------

جدول ارزش:

تمام حالت‌های گوناگون ارزش یک گزاره را می‌توان در یک جدول نمایش داد. وقتی فقط با یک گزاره‌ی ساده p روبرو هستیم، جدول دو حالتی به صورت روبرو است:

p
د
ن

(کاربرد اصلی جدول، در بررسی درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب است که در ادامه خواهیم دید.)

برعکس کردن خبر گزاره را نقیض آن گوئیم

برعکس کردن خبر موجود در گزاره‌ها به صورت زیر است:

نقیض گزاره:

نقیض یک گزاره‌ی p را با نماد $\sim p$ نوشته و آن را «نقیض p» یا «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

نقیض

در کل:

چنان‌که در جدول ارزش مقابل دیده می‌شود؛

ارزش درستی $\sim p$ دقیقاً برعکس ارزش درستی p است.

$\sim p$	p
ن	د
د	ن

مثال: نقیض گزاره‌ی « ۴ عددی فرد است.» را به همه‌ی روش‌های زیر می‌توان بیان کرد:

- چنین نیست که ۴ عددی فرد است.
- ۴ عددی فرد نیست.
- ۴ عددی زوج است. (چون زوج و فرد بودن دقیقاً نقطه‌ی مقابل هم هستند.)

مورد بعد را با دقت بخوانید:

مثال: نقیض گزاره‌ی « ۱ عددی مثبت است.» به صورت « ۱ عددی منفی است.» صحیح نیست. زیرا:

باید خلاف خبر را بیان کنید!

می‌دانیم:

خلاف مثبت بودن عدد این است که آن عدد برابر صفر یا منفی باشد. پس نقیض به همه‌ی صورت‌های زیر درست است:

- چنین نیست که ۱ عددی مثبت است.
- ۱ عددی مثبت نیست.
- ۱ عددی منفی یا صفر است.

به بیان نمادین:

نقیض گزاره‌ی « $۱>۰$ » به صورت « $۱<۰$ » ناصحیح ولی به هر دو صورت « $۱\ngtr ۰$ » و « $۱\leq ۰$ » صحیح است.

مثال: (از کتاب)

در هر یک از حالت‌های زیر، نقیض گزاره را بیان کرده و سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

$(۱۲>۱۵)$

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است. $۱۲\nless ۱۵$ ن

ب) تساوی $۲\times۲=۴$ برقرار است. $۲\times۲\neq۴$ ن

پ) عدد ۵ زوج است. عدد ۵ فرد است د

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است. ارسطو شاگرد افلاطون نیست ن

ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد. ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد ن

ج) $(۵\times۴)>(۳\times۷)$ $(۵\times۴)\ngtr(۳\times۷)$ د

پاسخ

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست. (نادرست)

ب) تساوی $۲\times۲=۴$ برقرار نیست. (نادرست)

پ) عدد ۵ زوج نیست. (درست)

ت) ارسطو شاگرد افلاطون نیست. (نادرست)

ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار ندارد. (نادرست)

ج) $\underbrace{(۳\times۷)}_{۲۱} \leq \underbrace{(۵\times۴)}_{۲۰}$ (درست)

0912 172 0728
@alireza_karbalaie

پویش علمی جهاد

۲ ترکیب گزاره‌ها

از یک یا چند گزاره می‌توان با روش‌هایی که در این بخش می‌بینیم، گزاره‌های جدید ساخت. توجه کنید:

گزاره‌ای که از دو یا چند خبر تشکیل شده باشد، **«گزاره‌ی مرکب»** نامیده می‌شود.

در این بخش، چهار روش برای ترکیب گزاره‌ها آورده خواهد شد. خواهیم دید:

ارزش هر گزاره‌ی مرکب، به ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن بستگی دارد.

اولین روش ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب عطفی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q حرف ربط **«و»** قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:

$p \wedge q$ **نوشته شده و به صورت** «p و q» **خوانده می‌شود.**

این نوع ترکیب را **«ترکیب عطفی»** و نماد $\wedge$ را **«عاطف»** گویند.

بعلاوه:

قابل درک است که ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دوی p و q درست باشند و در غیر این صورت همواره نادرست است.

ارزش درستی $p \wedge q$ را در جدول می‌بینید:

p	q	p ∧ q
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**ن**
ن	ن	**ن**

برای نمونه؛

برای درست بودن عبارت: «عدد ۲ زوج است و $\sqrt{2}$ عددی گویا است.»

باید هر دو گزاره‌ی ساده‌ی « عدد ۲ زوج است» و « $\sqrt{2}$ عددی گویا است» درست باشند. ولی چون گزاره‌ی دوم نادرست است، گزاره‌ی مرکب در کل نادرست است.

مثال: الف) ارزش گزاره‌ی «هر ماه سال ۳۰ روز دارد و هر قرن ۱۰۰ سال است.» را مشخص کنید.

ب) جای خالی در عبارت « ۵۳ عددی اول است و . . . . » را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست شود.

$\sqrt{2}$ گنگ است

پ) جای خالی در عبارت «قرآن مجید ۳۰ سوره دارد و . . . . » را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی عطفی حاصل نادرست شود.

۵ عدد زوج است

پاسخ

الف) چون ماه کمتر یا بیشتر از ۳۰ روز هم داریم، گزاره به صورت (**ن** $\wedge$ **د**) بوده و نادرست است.

ب) ۵۳ عدد اول است، پس اگر گزاره‌ی دوم نیز درست باشد، کل گزاره درست است. مثلاً:

عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

پ) چون گزاره‌ی «قرآن مجید ۳۰ سوره دارد.» نادرست است، گزاره‌ی دوم هر ارزشی داشته باشد، کل گزاره نادرست است.
مثلاً:

افلاطون شاگرد ارسطو است. (ن) یا **ارسطو شاگرد افلاطون است. (د)**

-----------✲-----------

روش تشکیل جدول:

هنگام تشکیل جدول ارزش گزاره‌های مرکب، موارد زیر را رعایت کنید:

- به تعداد گزاره‌های ساده‌ی p، q، r و ... که آن گزاره‌ی مرکب را تشکیل داده اند، توجه کنید:
  چون هر گزاره‌ی ساده دو حالت «د» و «ن» دارد؛
  - وقتی فقط یک گزاره داریم، تعداد ۲ حالت (دو سطر) در جدول قرار می‌گیرد.
    مانند:

جدول ارزش گزاره‌ی $p \wedge p$

p	p	p ∧ p
د	د	د
ن	ن	ن

۲ سطر

  - وقتی دو گزاره p و q داریم، $۴ = ۲^۲ = ۲\times۲$ سطر خواهیم داشت؛
    مانند جدول ارزش $p \wedge q$ که بالاتر دیدیم.
  - برای سه گزاره، $۸ = ۲^۳$ حالت و در کل وقتی n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب موجود باشد، ۲^n حالت داریم.
- برای این‌که جدول منظم تشکیل شود:
  - در ستون اول، نصف حالت‌ها «د» و نصف دیگر حالت‌ها «ن» قرار می‌گیرد.
  - در ستون‌های بعدی تعداد دوباره نصف می‌شود تا آخر.

  مثلاً برای سه گزاره؛
  در کل ۸ حالت داریم و شروع جدول همیشه به صورت روبرو است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

✧ **مثال:** جدول ارزش درستی گزاره‌ی $p \wedge \sim p$ را ببینید:

ن

و

p	~p	p ∧ ~p
د	ن	ن
ن	د	ن

توجه کنید:

چنان‌که می‌بینید، یک گزاره و نقیض آن هیچ‌گاه نمی‌توانند هر دو درست باشند! (یعنی: **تناقض**)

-----------✲-----------

روش بعدی در ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب فصلی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q رابط «**یا**» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:

$\boxed{p \vee q}$ **نوشته شده و به صورت «** p **یا** q **» خوانده می‌شود.**

این نوع ترکیب را «**ترکیب فصلی**» و نماد $\vee$ را «**فاصل**» گویند.

بعلاوه:

قابل فهم است که ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است که هر دوی p و q نادرست باشند و در غیر این صورت همواره درست است.

p	q	p ∨ q
د	د	**د**
د	ن	**د**
ن	د	**د**
ن	ن	**ن**

مثال: به گزاره‌ی زیر توجه کنید:

$\underbrace{\text{۲ عددی فرد است}}_{\text{ن}}$ یا $\underbrace{\text{۹ عددی اول است}}_{\text{ن}}$. ن

این گزاره نادرست است، زیرا هر دو گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» و «۹ عددی اول است» نادرست هستند.

------------✧------------

مثال: جای خالی در عبارت «$\underbrace{\text{۱۹ عددی اول است}}_{\text{د}}$ یا $\underbrace{\text{. . . .}}_{\text{ن}}$» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست باشد.

$\sqrt{9}$ عدد گنگ است

پاسخ

چون گزاره‌ی «۱۹ عددی اول است.» درست است، گزاره‌ی دوم هر ارزشی داشته باشد، کل گزاره درست است.

مثلاً:

قرآن کریم ۱۱۴ آیه دارد. (ن) یا **قرآن کریم ۱۱۴ سوره دارد. (د)**

------------✧------------

مثال: جدول ارزش گزاره‌ی $\boxed{p \vee \sim q}$ را تشکیل دهید. این گزاره در چه صورتی نادرست است؟

درصورتی که p نادرست، q درست باشد

پاسخ

چون دو گزاره‌ی ساده‌ی p و q مشاهده می‌شوند، $2^2 = 4$ حالت برای جدول تشکیل می‌دهیم.

توجه کنید:

مانند محاسبات ریاضی، از ساده‌ترین گزاره‌ها شروع کرده و در پایان کل گزاره تشکیل می‌شود:

فصل ∨

p	q	~q	p∨~q
د	د	ن	د
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د

شروع: p

بعد: q

بعد: $\sim q$

پایان: $p \vee \sim q$

p	q	~q	**p ∨ ~q**
د	د	ن	**د**
د	ن	د	**د**
ن	د	ن	**ن**
ن	ن	د	**د**

می بینید که:

گزاره‌ی $p \vee \sim q$ وقتی نادرست است که p نادرست و q درست باشد.

-----------✧-----------

مثال: جدول ارزش درستی گزاره‌ی: $p \vee (q \wedge r)$ را ببینید:

توجه کنید:

- چون سه گزاره‌ی ساده وجود دارد، $2^3 = 8$ حالت در جدول داریم.
- ابتدا سه گزاره‌ی ساده را قرار داده، سپس $q \wedge r$ و در آخر گزاره‌ی مرکب اصلی تعیین ارزش شده است.

p	q	r	q ∧ r	**p ∨ (q ∧ r)**
د	د	د	د	**د**
د	د	ن	ن	**د**
د	ن	د	ن	**د**
د	ن	ن	ن	**د**
ن	د	د	د	**د**
ن	د	ن	ن	**ن**
ن	ن	د	ن	**ن**
ن	ن	ن	ن	**ن**

چنان‌که می‌بینید:

در تشکیل جدول، از جزء به کل حرکت می‌کنیم.

-----------✧-----------

مقدم تالی

$p \longrightarrow q$

ترکیب شرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q، گزاره‌ی شرطی به صورت:

$\boxed{p \Rightarrow q}$ **نوشته شده و به صورت «اگر p، آنگاه q» خوانده می‌شود.**

این نوع ترکیب را «ترکیب شرطی» گویند.

در این ترکیب، به p «**مُقَدَم**» و به q «**تالی**» یا «**پیرو**» گفته می‌شود.

بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که p درست، ولی q نادرست باشد. به عبارت دیگر: هنگامی یک استنتاج $p \Rightarrow q$ صحیح است که:

درست بودن p، حتماً درستی q را نتیجه دهد.

p	q	**p ⇒ q**
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**د**
ن	ن	**د**

استثنا

درگزاره شرطی زمانی کل گزاره نادرست می‌باشد که p درست و q نادرست باشد

مقدم درست و تالی نادرست باشد

مثال: اگر p و q هر دو گزاره‌هایی نادرست باشند، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $p \Rightarrow \sim p$ ب) $(p \vee \sim q) \Rightarrow q$

پاسخ

الف) گزاره به صورت (**د** $\Rightarrow$ **ن**) بوده و طبق جدول درست است.

ب) چون $(p \vee \sim q)$ به صورت (**د** $\vee$ **ن**) بوده و درست است، گزاره‌ی شرطی به صورت (**ن** $\Rightarrow$ **د**) بوده و نادرست خواهد بود.

p درست
q نادرست ~q درست

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $(\sim p \vee q)$ را مشخص کنید.

پاسخ

باید p درست باشد و $p \wedge \sim q$ نادرست. بنابراین $\sim q$ نادرست بوده، یعنی q درست بوده است.

در نتیجه:

گزاره‌ی $(\sim p \vee q)$ به صورت (**ن** $\vee$ **د**) بوده و درست است.

عکس گزاره:

اگر در گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$، گزاره‌های p و q را جابجا کنیم، **«عکس گزاره شرطی»** به صورت $q \Rightarrow p$ ساخته می‌شود. برای نمونه:

عکس گزاره‌ی: «اگر میانگین ۱۶ و ۱۸ برابر ۱۷ باشد، آنگاه ۱− عددی مثبت است.» به صورت زیر نوشته می‌شود:

«اگر ۱− عددی مثبت باشد، آنگاه میانگین ۱۶ و ۱۸ برابر ۱۷ است.»

توجه کنید:

بین ارزش درستی یک گزاره و عکس آن ارتباطی وجود ندارد.

می‌بینید:

در نمونه‌ی بالا، گزاره‌ی شرطی اولیه نادرست بوده، ولی عکس آن به صورت (**ن** $\Rightarrow$ **د**) بوده و درست است.

حالت بسیار مهمی از ترکیب شرطی:

قانون انتفای مقدم:

چنان‌که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید:

اگر p نادرست باشد، بدون توجه به ارزش q، ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ درست است!

این خاصیت را «**قانون انتفای مقدم**» گویند.

مقدم

یعنی:

اگر با یک فرض غلط، هر نتیجه‌ی درست یا نادرست را بپذیرید، استنتاج شما در کل صحیح بوده است.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

برای نمونه؛

استناج‌های زیر هر دو درستند:

- اگر -2 عددی مثبت باشد، آنگاه تمام داوطلبان کنکور ۱۴۰۳ رتبه‌ی یک خواهند شد.
- اگر اصفهان مرکز استان فارس باشد، آنگاه ایران یک کشور اروپایی است.

مثال: الف) ارزش گزاره‌ی «اگر عدد ۳۰ زوج باشد، آنگاه هر دهه ۱۰۰ سال است.» را مشخص کنید.

ب) جاهای خالی در عبارت «اگر .... آنگاه .... » را با دو گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست شود.

پ) جای خالی در عبارت «اگر ..... آنگاه قرآن مجید ۱۱۴ آیه دارد.» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی حاصل نادرست شود.

√۲ عدد گنگ است

پاسخ

الف) گزاره‌ی مرکب به صورت (ن ⇐ د) بوده و نادرست است.

ب) کافی است فقط حالت (ن ⇐ د) رخ ندهد. مثلاً؛

اگر عدد $\sqrt{2}$ گنگ باشد، آنگاه ۱۱ عددی اول است.

پ) چون گزاره‌ی «قرآن مجید ۱۱۴ آیه دارد.» نادرست است، گزاره‌ی اول باید الزاماً درست باشد، تا کل گزاره نادرست شود. مثلاً؛

افلاطون شاگرد سقراط است. (د)

p درست
q نادرست
r دلخواه

مثال: (از کتاب)

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ ب) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

انتفای مقدم

پ) $(r \Rightarrow p) \vee q$ ت) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

تبصره: ۲ دارد

پاسخ

الف) چون $(p \Rightarrow q)$ به صورت (ن ⇐ د) بوده و نادرست است، ارزش r هر چه باشد، ترکیب عطفی نادرست است.

ب) چون $(p \Rightarrow q)$ نادرست است، ارزش r هر چه باشد، ترکیب شرطی ($r \Leftarrow$ ن) به انتفای مقدم درست است.

پ) چون $(r \Rightarrow p)$ به صورت ($r \Rightarrow$ د) است، الزاماً درست است، ترکیب فصلی به صورت (ن ∨ د) بوده و درست است.

ت) چون $(q \Rightarrow p)$ به صورت (د ⇐ ن) بوده و درست است، ترکیب عطفی به صورت (r ∧ د) است. اکنون توجه کنید؛

اگر r درست باشد، ترکیب عطفی درست و اگر r نادرست باشد، ترکیب عطفی نیز نادرست است. در نتیجه؛

ارزش کل گزاره با ارزش r یکسان است.

مثال: اگر ارزش گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشد، ارزش گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ را تعیین کنید.

پاسخ

به اجبار باید q درست باشد، چون در غیر این صورت، حتماً یکی از دو گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ یا $p \Rightarrow \sim q$ نادرست می‌شود. پس $\sim q$ نادرست بوده و $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ هم‌ارزش با $\sim p \wedge q$ است. با توجه به درست بودن q؛
اگر p درست باشد، گزاره‌ی مرکب نادرست و اگر p نادرست باشد، گزاره‌ی مرکب درست است.

نتیجه:

گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ هم‌ارزش با $\sim p$ است.

ترکیب دوشرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q، گزاره‌ی دوشرطی به صورت:
$p \Leftrightarrow q$ **نوشته شده و به صورت «p اگر و تنها اگر q» یا «اگر p آنگاه q و برعکس» خوانده می‌شود.**
در واقع:
هر دوی p و q باید یکدیگر را نتیجه دهند تا این ترکیب، گزاره‌ای درست باشد.

بنابراین:

همان‌طور که در جدول زیر هم می‌بینید، ترکیب دو شرطی وقتی نادرست است که یکی از p یا q دیگری را نتیجه ندهد.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال: ارزش درستی هر گزاره را مشخص کنید.

الف) اگر ۲ فرد باشد، آنگاه ۳ اول است. درست

ب) ۲ فرد است اگر و فقط اگر ۳ اول باشد.

پاسخ

با توجه به ارزش هر کدام از گزاره‌های ساده:

الف) گزاره‌ی شرطی به صورت (**د** $\Rightarrow$ **ن**) بوده و درست است.

ب) گزاره‌ی دو شرطی به صورت (**ن** $\Leftrightarrow$ **د**) بوده و طبق قاعده‌ی مربوطه نادرست است.

مثال: توسط جدول نشان دهید:

ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ دقیقاً یکسان با ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ است.

پاسخ

جدول ارزش گزاره را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	**د**
د	ن	ن	د	**ن**
ن	د	د	ن	**ن**
ن	ن	د	د	**د**

می‌بینید که ستون آخر هر دو گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ و $p \Leftrightarrow q$ یکسان است.

مثال: (از کتاب)

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ب) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

ت) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

پاسخ

الف) $(\sim p \vee q)$ به صورت (**ن** $\vee$ **ن**) و نادرست و $(p \Rightarrow q)$ به صورت (**د** $\Rightarrow$ **ن**) و نادرست است، ترکیب دو شرطی به صورت (**ن** $\Leftrightarrow$ **ن**) بوده و درست است.

ب) $(\sim p \vee \sim q)$ به صورت (**ن** $\vee$ **د**) و درست و $(p \vee q)$ درست و نقیض آن نادرست است، ترکیب دو شرطی به صورت (**د** $\Leftrightarrow$ **ن**) بوده و نادرست است.

پ) مشابه موارد قبل، ترکیب دو شرطی به صورت (**ن** $\Leftrightarrow$ **د**) بوده و نادرست است.

ت) چون p درست است، اگر r درست باشد، ترکیب دوشرطی درست و اگر r نادرست باشد، ترکیب دوشرطی نادرست است. پس ترکیب شرطی به صورت ($r \Rightarrow$ **ن**) است و:

ارزش کل گزاره خلاف ارزش r است. (یعنی: هم‌ارزش با $\sim r$ است.)

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،

می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

در ابتدا، گزاره‌ها را با دقت و نمونه تست‌های بیشتری بررسی می‌کنیم.

کدام مورد گزاره محسوب می‌شود؟

❶ ای کاش در کنکور قبول شوم.   ❷ چه هوای خوبی.

❸ در پرتاب تاس، احتمال ظاهر شدن ۶، برابر پنجاه درصد است.   ❹ پنجره را باز کن.

گزینه ۳

فقط در مورد سوم یک جمله‌ی خبری داریم که درستی یا نادرستی آن قابل بررسی است.

-----------◈-----------

نقیض کدام گزاره صحیح نوشته شده است؟

❶ $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. **نقیض:** « $\sqrt{۲}$ عددی صحیح است.»

❷ $۴^۳ - ۴^۲ = ۴$ **نقیض:** « $۴^۳ - ۴^۲ > ۴$»

❸ مهدی اخوان ثالث نویسنده‌ی کتاب ارغنون است. **نقیض:** «مهدی اخوان ثالث نویسنده‌ی کتاب ارغنون نیست.»

❹ ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار دارد. **نقیض:** «ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد.»

گزینه ۳

نقیض در گزینه ۱: « $\sqrt{۲}$ عددی گنگ نیست.»   نقیض در گزینه ۲: « $۴^۳ - ۴^۲ \neq ۴$»

نقیض در گزینه ۴: «ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار ندارد.»

(**بدانید:** نویسنده‌ی ارغنون (Organon)، ارسطو، شاگرد افلاطون است.)

-----------◈-----------

در تشخیص گزاره بودن یا نبودن جملات:

نکته ۱

در دو حالت زیر، جمله‌ی خبری گزاره محسوب نمی‌شود:

- اگر تعیین درستی یا نادرستی آن وابسته به نظر شخصی یا سلیقه‌ی افراد باشد.

نمونه:

بهار، زیباترین فصل سال است.

- اگر تعیین درستی یا نادرستی آن ممکن نباشد.

نمونه‌ها:

«درس ریاضی از درس عربی دشوارتر است.» همچنین: « $a-۲<b$ »

چه تعداد از جملات زیر گزاره است؟

الف) عدد $\sqrt{۷}$ عددی گویا است. خبری گزاره است

ب) محصولات ایرانی از محصولات چینی کیفیت بهتری دارند. ✗

پ) به به، امروز چه هوای خوبی است! خبری ✗

ت) جرم یک دانه‌ی ارزن ناچیز است. خبری ✗

ث) کامپیوتر را خاموش کنید. ✗

ج) گرم‌ترین نقطه‌ی کره‌ی زمین در کویر لوت است. گزاره است

❶ ۱ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ ۳

گزینه ۳

فقط موارد (الف)، (پ)، (ت) و (ج) جمله‌ی خبری هستند که در بین آن‌ها؛

موارد (پ) و (ت) قابل تعیین درستی یا نادرستی نبوده و گزاره نیستند.

در ادامه، نمونه‌های گوناگونی از تعیین ارزش گزاره‌های مرکب آورده می‌شود.

اگر p گزاره‌ی درست، q گزاره‌ی نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی $(r\Leftrightarrow p)\Rightarrow(p\wedge q)$ برابر ارزش کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۸)

❶ r ❷ همیشه درست ❸ همیشه نادرست ❹ $\sim r$

گزینه ۴

گزاره‌ی $p\wedge q$ نادرست است. چون p درست است، اگر r درست باشد، $r\Leftrightarrow p$ نیز درست و اگر r نادرست باشد، $r\Leftrightarrow p$ نیز نادرست است. پس تا این‌جا، کل گزاره چنین است:

$$r\Rightarrow \text{ن}$$

اکنون، اگر r درست باشد، گزاره‌ی بالا نادرست و اگر r نادرست باشد، گزاره‌ی بالا درست است، یعنی هم‌ارزش با $\sim r$ است.

ن

اگر گزاره‌ی مرکب $\overbrace{\overset{ن}{(p \wedge q)} \vee \overset{ن}{(\sim \underset{د}{p} \Rightarrow \underset{ن}{q})}}$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب کدام است؟

❶ ~~درست~~ – درست ❷ ~~درست~~ – نادرست

❸ ~~نادرست~~ – درست ❹ نادرست – نادرست

گزینه ۴

ارزش کلی گزاره‌ها چنین بوده:

$$\underbrace{(p \wedge q)}_{ن} \vee \underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_{ن}$$

چون $(\sim p \Rightarrow q)$ نادرست است، پس $\sim p$ درست و q نادرست بوده است. (یعنی: p نادرست بوده)

اگر ارزش گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow \sim s)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

❶ $p \wedge \sim r$ ❷ $s \Rightarrow \sim q$ ❸ $p \Rightarrow s$ ❹ $\sim r \vee \sim q$

گزینه ۳

باید $(\sim p \wedge q)$ درست و $(q \wedge r) \Rightarrow \sim s$ نادرست باشد، پس:

- p نادرست و q درست بوده است. (جواب تست در همین مرحله معلوم شد!)

ادامه برای آموزش:

- باید $(q \wedge r)$ درست و $\sim s$ نادرست باشد، یعنی: r و s هر دو درست بوده‌اند.

اکنون واضح است که سه گزینه‌ی دیگر ارزش نادرست دارند.

اگر گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

❶ $(p \vee \sim r) \wedge q$ ❷ $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$

❸ $\sim (p \wedge q) \wedge r$ ❹ $(r \wedge q) \vee p$

گزینه ۳

$(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ **نادرست** $\xrightarrow{natijeh}$ $(\sim p$ و $p \wedge \sim q)$ **هر دو نادرست**

پس p درست است و طبق نادرستی $p \wedge \sim q$، باید $\sim q$ نادرست، یعنی q هم درست باشد. اکنون با جایگذاری می‌بینید که فقط گزینه‌ی سوم به صورت روبرو بوده و نادرست است.

$$\underbrace{\sim \underbrace{\underbrace{(p \wedge q)}_{د}}_{ن} \wedge r}_{ن}$$

اگر گزاره‌ی $r \Leftrightarrow q$ درست و $p \Leftrightarrow \sim q$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

❶ $\sim r \Leftrightarrow \sim p$ ❷ $(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

❸ $(p \Leftrightarrow \sim r) \Rightarrow \sim p$ ❹ $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$

گزینه ۲

باید q و r ارزش یکسان داشته و همچنین $\sim q$ و p ارزش مخالف داشته، یعنی p و q ارزش یکسان دارند. در نتیجه: p و q و r ارزش یکسان دارند.

با قدری دقت می‌بینید که گزاره در گزینه‌ی دوم به صورت (د $\Leftrightarrow$ ن) بوده و نادرست است. (گزینه‌ی ۱ به صورت بدیهی و گزینه‌های سوم و چهارم طبق انتفای مقدم درست هستند.)

ممکن است لازم باشد طبق مباحث مختلف کتاب‌های درسی یا حتی اطلاعات عمومی، درستی یا نادرستی برخی گزاره‌ها را معلوم کنید.

$۳۲-۲x^۲=۲(۱۶-x^۲)=۲(۴-x)(۴+x)$

ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

❶ گروه خونی افراد متغیر کیفی ترتیبی است یا ۲۵ مربع کامل است. درست

❷ رابطه‌ی $f=\{(۱,-۳),(-۳,-۳)\}$ تابع است یا هر عدد فرد، مضرب ۳ است. درست

❸ عبارت $۳۲-۲x^۲$ قابل تجزیه نیست و $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. نادرست

❹ تعداد خودروهای یک پارکینگ متغیر کمی نسبتی است و نمودار $y=x$ از نواحی اول و سوم می‌گذرد. درست

گزینه ۳

گزینه‌ی سوم به صورت (ن $\wedge$ د) بوده و نادرست است، چون:

تجزیه شدا $۳۲-۲x^۲=۲(۱۶-x^۲)=۲(۴-x)(۴+x)$

سایر گزینه‌ها دارای ارزش درست هستند.

در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره‌ی مرکب ایجاد شده، نادرست باشد؟

$$[(-\frac{۱}{۳}<-\frac{۱}{۲})\vee \cdots]\wedge(\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z})$$

❶ تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از چارک اول هستند. د

❷ رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی نسبتی است. ن

❸ معادله‌ی $x^۲-۳۶=0$ دو ریشه‌ی قرینه دارد. د

$x^۲-۳۶=0 \rightarrow \boxed{x=\pm۶}$

❹ تمام مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۵۰ عبارتند از $۱,۲,۵,۱۰,۲۵,۵۰$: د

گزینه ۲

چون $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ درست است، باید $[(-\frac{۱}{۳}<-\frac{۱}{۲})\vee\cdots]$ نادرست باشد و در نتیجه به اجبار باید در جای خالی یک گزاره‌ی نادرست جای گیرد. فقط مورد دوم چنین است، چون:

رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی فاصله‌ای است.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie
جناب استاد کربلایی

نکته ۲

همیشه درست یا نادرست:

برخی گزاره‌های مرکب، در تمام حالت‌های گوناگونِ ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌شان، فقط درست یا فقط نادرست هستند. نمونه‌هایی ببینید:

- گزاره‌های $p\vee \sim p$ و $p\Rightarrow p$ همیشه درست هستند.
  چون در اولی حالت (ن ∨ ن) و در دومی حالت (د ⇐ ن) رخ نمی‌دهد.
- گزاره‌های $p\wedge \sim p$ و $p\Leftrightarrow \sim p$ همیشه نادرست هستند.
  چون در اولی حالت (د ∧ د) و در دومی حالات (د ⇔ د یا ن ⇔ ن) رخ نمی‌دهد.

(معمولاً با قدری بررسی می‌توان این نوع گزاره‌ها را تشخیص داد.)

اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره همواره درست است؟

❶ $p\Rightarrow(\sim p\wedge q)$ ❷ $p\Rightarrow(p\vee q)$ ❸ $p\Rightarrow(p\wedge \sim q)$ ❹ $p\Rightarrow\sim(p\vee q)$

ن ن ن
د د ن

گزینه ۲

زیرا:

اگر p نادرست باشد، طبق انتفای مقدم، گزاره‌ی مرکب درست است.

اگر p درست باشد، $(p\vee q)$ نیز درست بوده و بازهم گزاره‌ی مرکب درست خواهد بود.

همواره درست

انتفا

ن ن د

اگر p گزاره‌ای درست و q یک گزاره‌ی نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره‌ی $(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)$ کدام صحیح است؟

❶ همواره درست ❷ همواره نادرست

❸ به ارزش r بستگی دارد. ❹ به ارزش s بستگی دارد.

گزینه ۱

چون q نادرست است، ترکیب عطفی $(q\wedge s)$ نادرست شده و در نتیجه، ترکیب شرطی طبق انتفای مقدم، خود به خود درست خواهد بود.

اگر ارزش گزاره‌ی $p\Rightarrow q$ درست باشد، کدام گزاره همواره درست است؟

❶ $(p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge q)$ ❷ $(p\Leftrightarrow q)\vee p$

❸ $(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ ❹ $p\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$

گزینه ۳

از فرض می‌دانیم:

۱) p نادرست است و q دلخواه. یا ۲) p و q هر دو درست هستند.

گزینه‌ی سوم: اگر حالت (۱) را بگیرید، به صورت «**ن ⇔ ن**» و اگر حالت (۲) را بگیرید، به صورت «**د ⇔ د**» بوده و بنابراین همواره درست است. سایر گزینه‌ها در یکی از دو حالت بالا نادرست خواهند شد.

---

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r

در مورد جدول ارزش گزاره‌های مرکب:

نکته ۳

برای یک گزاره جدول ۲ سطری، برای دو گزاره جدول $۲^۲ = ۴$ سطری و . . . است و در کل:

وقتی تعداد n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب حضور دارند، جدول ۲^n سطر (حالت) خواهد داشت.

برای نمونه؛

جدول $(p \wedge q) \Rightarrow r$ دارای $۲^۳ = ۸$ حالت و جدول $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ دارای $۲^۲ = ۴$ حالت است.

نتیجه:

به ازای هر گزاره‌ی ساده جدید که در گزاره‌ی مرکب وارد شود، تعداد حالت‌ها در ۲ ضرب می‌شود.

در یک گزاره‌ی مرکب، اگر دو گزاره‌ی ساده‌ی دیگر با آن ترکیب شود، تعداد حالت‌های جدول ارزش گزاره . . .

1. دو برابر می‌شود.
2. دو حالت بیشتر می‌شود.
3. چهار حالت بیشتر می‌شود.
4. چهار برابر می‌شود.

جدید

گزینه ۴

چون دو گزاره‌ی جدید وارد شده است، تعداد حالات در $۴ = ۲ \times ۲$ ضرب می‌شود.

در جدول ارزش گزاره‌ی $[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \wedge (\sim r \vee p)$، در ستون پایانی چند تا F وجود دارد؟

1. ۶
2. ۱
3. ۲
4. ۴

گزینه ۴

با توجه به دو مطلب زیر، جواب فوری مشخص می‌شود:

۱) کروشه‌ی سمت چپ ترکیب فصلی دو عبارت نقیض بوده و بنابراین همواره درست است.

پس تعداد F ها دقیقاً تعداد F های ستون $(\sim r \vee p)$ است.

۲) ترکیب فصلی $(\sim r \vee p)$ در حالت معمول $۲^۲ = ۴$ سطر دارد که فقط یک سطر آن F است؛ ولی چون در جدول $۲^۳ = ۸$ سطری آمده است، آن چهار سطر گفته شده هر کدام دو بار نوشته (تکرار) شده‌اند.

بنابراین جواب برابر ۲ خواهد بود.

تمرینات

۱ در موارد زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید:

الف) ایران ده بار به جام جهانی فوتبال رفته است.
ب) بیشتر انسان‌های بلند قد، والیبالیست هستند.
پ) عدد $۲^{۲^{۳۱}}+۱$ عددی اول است.
ت) $۲^{۳۳۱}>۳^{۲۲۱}$
ث) در زیر پوسته‌ی مریخ، زندگی میکروسکوپی جریان دارد.

۲ گزاره‌های درست را مشخص کنید:

الف) معادله‌ی $x^۲-۲x=-۲$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.
ب) معادله‌ی $۱-۳x=۲x+۵$ یک ریشه‌ی مثبت دارد.
پ) عدد ۱ عددی اول نیست، ولی مرکب است.
ت) میانه‌ی داده‌ها از چارک سوم کوچک‌تر است.
ث) انحراف معیار داده‌های ۷,۷,۷,۷ با دامنه‌ی تغییرات آن‌ها برابر است.

۳ گزاره‌های درست را مشخص کنید:

الف) اگر $\sqrt{۳}$ گویا باشد، عدد ۸ فرد است.
ب) $۶+۳\times۳>۲۵ \Leftrightarrow (\frac{۲}{۳})^{-۱}<\frac{۳}{۲}$
پ) ۱۱ عددی اول است اگر و فقط اگر $\frac{۷}{۳}>۳$.
ت) اگر ۱۴ مضرب ۴ باشد، ۲۴ عددی منفی است.

۴ الف) جدول ارزش یک گزاره متشکل از چهار گزاره‌ی ساده، چند حالت دارد؟
ب) اگر جدول مربوط به n گزاره‌ی ساده ۱۲۸ حالت داشته باشد، n را مشخص کنید.

۵ جدول ارزش گزاره‌ی $\sim p\vee(p\wedge\sim q)$ را تشکیل دهید.

۶ اگر ارزش گزاره‌ی $p\vee(\sim p\wedge\sim q)$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $\sim[(p\vee q)\vee(\sim r)]$ را معلوم کنید.

۷ اگر ارزش گزاره‌های $p\wedge\sim q$ و $q\vee\sim r$ درست باشد، ارزش گزاره‌ی $r\wedge(\sim p\vee q)$ را معلوم کنید.

۸ اگر ارزش $p\Rightarrow q$ نادرست و $r\Rightarrow q$ درست باشد، ارزش گزاره‌های $r\Rightarrow(p\vee q)$ و $r\Rightarrow(p\wedge s)$ را معلوم کنید
(s گزاره‌ای دلخواه است.)

۹ عکس و عکس نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.

اگر $x^۲>۰$ باشد، آنگاه x عددی مثبت است.

۱۰ اگر گزاره‌های $s\vee\sim q$ و $\sim p\Rightarrow\sim s$ و $q\wedge s$ و $r\Rightarrow\sim p$ همگی درست باشند، ارزش گزاره‌ی r را معلوم کنید.

تمرینات
منتخب کتاب

۱ جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزهٔ پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر .... آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه		✓
۴	$۴\times۲=۲^۳ \Rightarrow ۸^۲>۴^۳$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		

۲ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر گزاره‌ی زیر را مشخص کنید:

الف) $(p\vee r)\Rightarrow p$

ب) $(q\wedge r)\Rightarrow r$

پ) $(q\wedge p)\Leftrightarrow(\sim p\wedge r)$

ت) $(\sim p\Rightarrow r)\Rightarrow\sim q$

ث) $(r\Rightarrow p)\wedge p$

ج) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim q\Rightarrow\sim p)$

TEST تمرین تست

۱ اگر ارزش p نادرست و $\sim q$ درست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های $\sim(\sim p)$ و q به ترتیب کدام است؟

1) درست – درست
2) درست – نادرست
3) نادرست – درست
4) نادرست – نادرست

۲ کدام گزاره همیشه درست است؟

1) $\sim p \Rightarrow p$
2) $p \Rightarrow \sim p$
3) $\sim p \wedge p$
4) $\sim p \vee p$

۳ چند مورد در زیر به ترتیب گزاره هستند و ارزش چند گزاره درست است؟

الف) مجموع یک عدد فرد و یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

ب) عدد ۶۵۰۰۰۱ عددی اول است.

پ) استقلال تیم پر طرفداری است.

ت) ایران کشوری پهناور است.

1) ۴ و ۲
2) ۴ و ۳
3) ۲ و ۱
4) ۲ و ۰

۴ چند مورد از گزاره‌های زیر ارزش نادرست دارند؟

الف) هر رابطه به شکل $y=k$ یک تابع است. (k عددی حقیقی است.)

ب) میانه، همان چارک دوم داده‌های آماری است.

پ) انحراف معیار داده‌های یکسان، همواره برابر ۱ است.

ت) مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۲۰ عبارتند از: ۱,۲,۴,۵,۱۰

1) ۴
2) ۱
3) ۲
4) ۳

۵ چه تعداد از گزاره‌های مرکب زیر درست هستند؟

الف) ۶۱ عددی اول است و ۳ شمارنده‌ی ۵۴ است.

ب) ۱۱ شمارنده‌ی اول ندارد یا حاصل جمع دو عدد گنگ، همیشه گنگ است.

پ) هر عدد صحیح گویا است و حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، نیز عددی گویا است.

1) ۰
2) ۱
3) ۲
4) ۳

۶ اگر گزاره‌ی ترکیبی « ۷ عددی صحیح و گنگ است یا . . . . » نادرست باشد، کدام مورد در جای خالی نمی‌تواند قرار گیرد؟

1) ۹۱ عددی گنگ یا اول است.
2) $\sqrt{۲}-۱$ عددی گویا و مثبت است.
3) اصفهان یا شیراز پایتخت اکنون ایران است.
4) مربع چهار ضلع مساوی و چهار زاویه‌ی قائمه دارد.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۷ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر همیشه درست خواهد بود؟

الف) $(\sim p \wedge q) \vee r$ ب) $(\sim p \vee r) \wedge q$ پ) $\sim (p \vee \sim q) \wedge r$

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۸ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، ستون آخر جدول مقابل کدام است؟

$\sim p$	q	$p \wedge r$	$q \vee (p \wedge \sim r)$
F	T	T	?
T	F	F	?
F	F	F	?

❶ T، F، T ❷ F، T، F ❸ T، F، F ❹ F، T، T

(توجه کنید: حرف T به معنای «د» و حرف F به معنای «ن» است!)

۹ جدول ارزش مقابل مربوط به کدام گزاره است؟

p	q	?
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

❶ $p \vee \sim q$

❷ $p \wedge \sim q$

❸ $\sim p \wedge q$

❹ $\sim p \vee q$

۱۰ از درستی گزاره‌های $\sim p$ و $q \Rightarrow p$، کدام گزاره همیشه درست خواهد بود؟

❶ $\sim (p \vee q)$ ❷ $p \wedge \sim q$ ❸ $p \wedge q$ ❹ $\sim p \wedge q$

۱۱ ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

❶ $\sqrt{۳۱}$ گنگ است و ۳۹ مربع کامل است.

❷ $\sqrt{۱۶}$ گنگ است یا ۳ زوج است.

❸ ۲ اول است و $\sqrt{۳}$ گنگ است.

❹ عدد $\sqrt{\frac{۴-۲۹}{۵+۴}}$ گویا است و عدد $\sqrt{۲۴}$ صحیح است.

۱۲ در جدول زیر، مقادیر صحیح الف، ب و پ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$\sim p \vee q$	q	$\sim r$	$q \wedge (p \vee r)$
T	F	T	الف
F	ب	F	F
T	T	T	پ

❶ $F-F-T$

❷ $F-T-F$

❸ $T-T-$بستگی به ارزش گزاره‌ی p دارد.

❹ $F-F-$بستگی به ارزش گزاره‌ی p دارد.

۱۳ اگر ارزش نقیض گزاره‌ی $[(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \wedge p$ نادرست باشد، ارزش نقیض کدام گزاره‌ها درست کدام است؟

❶ $\sim p \wedge \sim q$ و $(p \wedge q) \vee p$

❷ $(p \vee q)$ و $(p \vee q) \vee (\sim q \vee p)$

❸ $\sim p \vee q$ و $(\sim p \vee q) \wedge p$

❹ $p \wedge \sim q$ و $(p \vee q) \wedge \sim p$

۱۴ گزاره‌ی $((p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim p$ در کدام حالت نادرست است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

❶ p و $\sim q$ درست
❷ p و q درست
❸ $\sim p$ و $\sim q$ درست
❹ $\sim p$ و q درست

۱۵ کدام مورد درست است؟

❶ عبارت «ضرب دو عدد اول، عددی فرد است.» گزاره‌ای درست است.
❷ نقیض گزاره‌ی «عدد a منفی است.» به صورت « عدد a مثبت است.» می‌باشد.
❸ گزاره‌ی $p \Rightarrow p \sim$ به انتفای مقدم درست است.
❹ عبارت «اگر $۲^{-۲} = -۴$، آنگاه $۵ < ۹$ است.» گزاره‌ای درست است.

۱۶ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ با ارزش کدام گزاره متفاوت است؟

❶ $\sim(q \vee \sim p)$
❷ $(q \wedge p) \Rightarrow r$
❸ $p \wedge (p \vee r)$
❹ $q \wedge r$

۱۷ چند گزاره در زیر آمده که نقیض آن دارای ارزش درست باشد؟

الف) $\sqrt{۷}$ عدد مثبت است یا عددی گویا است.
ب) $f = \{(-۱,۲),(\sqrt{۴},۳),(۲,\sqrt{۱۶}-۱)\}$ یک تابع است و $x^۲ + ۱$ همیشه مثبت است.
پ) اگر نمودار حبابی مربوط به دو متغیر باشد، آنگاه آمار درس ساده‌ای است.
ت) تفریق دو عدد گویا، عددی گویاست و جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

❶ ۰
❷ ۱
❸ ۲
❹ ۳

۱۸ گزاره‌ی $\sim(۲ \times ۵ - ۵^{\circ} = ۲^۳)$ با کدام گزاره هم‌ارزش نیست؟

❶ ممکن است داده‌ها چند مد داشته باشند.
❷ ممکن است چارک سوم با میانه یکسان شود.
❸ رتبه شرکت کنندگان کنکور، کیفی ترتیبی است.
❹ نمودار راداری برای هر تعداد متغیر قابل رسم است.

۱۹ تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ای متشکل از n گزاره‌ی ساده، شانزده برابر تعداد سطرهای گزاره‌ی دیگری است که از m گزاره‌ی ساده تشکیل شده است. کدام رابطه صحیح متفاوت است؟

❶ $m = n + ۴$
❷ $n - ۱۶ = m$
❸ $m = n - ۴$
❹ $m + n = ۱۶$

۲۰ گزاره‌ی مرکب «۹۱ عددی اول است اگر و فقط اگر ...... » نادرست است. کدام عبارت نمی‌تواند در جای خالی قرار گیرد؟

❶ ضرب عدد فرد در فرد عددی فرد است.

❷ نقیض گزاره‌ی «عدد a اول است.» به صورت «عدد a مرکب است.» می‌باشد.

❸ گزاره‌ی $\sim(p\vee\sim p)\Rightarrow p\wedge q$ به انتفای مقدم درست است.

❹ عبارت «اگر $۲^{-۱}+۲^{۰}<۴^{۰}$، آنگاه $۵<۹$ است.» گزاره‌ای درست است.

۲۱ با توجه به دو گزاره‌ی زیر، ارزش نقیضِ نقیضِ نقیضِ کدام گزاره نادرست است؟

p: معادله‌ی $(m^۲+۱)x^۲-x-۳=۰$ همواره دو ریشه‌ی مثبت دارد.

q: معادله‌های $x^۲+۳x+۲=۰$ و $۲x^۲-x-۱=۰$ ریشه‌ی مشترک ندارند.

❶ $p\vee\sim q$ ❷ $p\wedge\sim q$ ❸ $\sim p\Rightarrow\sim q$ ❹ $\sim(q\Rightarrow p)$

۲۲ چند گزاره در زیر آمده که نقیض آن دارای ارزش نادرست باشد؟

الف) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}=\varnothing$ اگر و تنها اگر $\frac{۱۲}{۴}$ عددی فرد است.

ب) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ اگر و تنها اگر ۱ عددی مرکب است.

پ) اگر نمودار حبابی مربوط به بیش از سه متغیر باشد، آنگاه نمودار جعبه‌ای مربوط به داده‌های کیفی است و برعکس.

ت) اگر ۹۱ عدد مرکب باشد، آنگاه $\sqrt{۳+۲\sqrt{۴}+۱}$ گویا است و برعکس.

❶ ۴ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۲۳ گزاره‌ی $((\sim p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\sim q))\Rightarrow p$ در کدام حالت زیر نادرست است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ p و $\sim q$ درست ❷ p و q درست

❸ $\sim p$ و $\sim q$ نادرست ❹ p و $\sim q$ نادرست

۲۴ در جدول ارزش گزاره‌ی $p\vee(q\wedge r)$، در ستون پایانی چند تا T وجود دارد؟

❶ ۷ ❷ ۶ ❸ ۵ ❹ ۴

۲۵ در جدول ارزش گزاره‌ی $(p\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee q)$، در ستون پایانی چند تا T وجود دارد؟

❶ ۰ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

۲۶ در جدول ارزش گزاره‌ی $[(p\wedge\sim q)\wedge(\sim p\vee q)]\vee(\sim r\wedge p)$، در ستون پایانی چند تا T وجود دارد؟

❶ ۶ ❷ ۷ ❸ ۲ ❹ ۱

۲۷ ارزش گزاره‌های p و r و q به ترتیب چگونه باشد تا $((\sim p \Leftrightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$ نادرست باشد؟

❶ درست – نادرست – درست
❷ نادرست – نادرست – نادرست
❸ درست – درست – درست
❹ درست – نادرست – نادرست

MandegarAlborz.sch.ir

۲

هم‌ارزی گزاره‌ها و استدلال

۱ گزاره‌های هم‌ارز

شناخت گزاره‌هایی که در ظاهر متفاوت، ولی ارزش منطقی یکسان دارند، در این بخش بررسی می‌شود. تشخیص یکسان بودن گزاره‌ها، باعث سادگی بررسی آن‌ها می‌شود.

گزاره‌های هم‌ارز:

دو گزاره‌ی P و Q را هم‌ارز (منطقی) گویند، هرگاه جدول ارزش آن‌ها کاملا یکسان باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$P \equiv Q$$

برای نمونه؛

می‌بینید که ستون مربوط به p و $\sim(\sim p)$ یکسان هستند. پس:

۱ $\boxed{\sim(\sim p) \equiv p}$

p	~p	~(~p)
د	ن	**د**
ن	د	**ن**

نمونه‌ی دیگر؛

چنان‌که در بخش قبل دیدیم، جدول ارزش گزاره‌های $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ یکسان است. در نتیجه:

۲ $\boxed{(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]}$

۳

مثال: هم‌ارزی $\boxed{p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q}$ را با جدول نشان دهید. **(این هم‌ارزی و دو مورد بالا را در ذهن داشته باشید.)**

پاسخ

کافی است ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان داده و مقایسه کنیم:

p	q	**p ⇒ q**	~p	**~p ∨ q**
د	د	**د**	ن	**د**
د	ن	**ن**	ن	**ن**
ن	د	**د**	د	**د**
ن	ن	**د**	د	**د**

می‌بینید:

ستون‌های مربوط به دو گزاره‌ی مرکب یکسان هستند.

مثال: هم‌ارزی زیر را نشان دهید.

۴

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

پاسخ

ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان می‌دهیم:

p	q	p ∨ q	**p ∧ (p ∨ q)**
د	د	د	**د**
د	ن	د	**د**
ن	د	د	**ن**
ن	ن	ن	**ن**

می‌بینید:

ارزش گزاره‌ی مرکب $p \wedge (p \vee q)$ با ارزش p یکسان است.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

در ادامه، چند هم‌ارزی مهم بیان و بررسی می‌شوند؛ با معرفی دو نوع گزاره مرتبط با مفهوم هم‌ارزی شروع می کنیم.

گزاره‌های ویژه:

❖ **همیشه درست:**

برخی گزاره‌ها در تمام حالت (همیشه) درست هستند، مانند:

$p \vee \sim p$

چنین گزاره‌ای را هم‌ارز با **T** نشان داده و می‌نویسیم:

همیشه درست

$p \vee \sim p \equiv T$

❖ **همیشه نادرست:**

برخی گزاره‌ها در تمام حالت نادرست هستند، مانند:

$p \wedge \sim p$

چنین گزاره‌ای را هم‌ارز با **F** نشان داده و می‌نویسیم:

$p \wedge \sim p \equiv F$

(حرف T برگرفته از True به معنای راست و حرف F برگرفته از False به معنای نادرست است.)

دلیل هر دو هم‌ارزی $p \vee \sim p \equiv T$ و $p \wedge \sim p \equiv F$ را می‌بینید:

p	~p	p ∨ ~p	p ∧ ~p
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

سؤال نهایی:

ارزش گزاره‌ی $(p \vee \sim p)$ همواره . . . . . . درست . . . . است. (خرداد ۱۴۰۲)

(زیرا به صورت (ن ∨ د) یا (د ∨ ن) خواهد بود.)

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

درستی هم‌ارزی مقابل را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید. $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

پاسخ

ارزش گزاره‌ی مرکب سمت چپ را در یک جدول نشان می‌دهیم:

p	q	~q	(p ∧ ~q)	p ⇒ q	(p ∧ ~q) ∨ (p ⇒ q)
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

می‌بینید:

گزاره‌ی مرکب داده شده همواره درست بوده و بنابراین با T هم‌ارز است.

مثال: درستی یا نادرستی هم‌ارزی زیر را توسط جدول بررسی کنید.

$$\sim(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv F$$

پاسخ

مشابه مثال قبل، ارزش گزاره را در جدول نشان می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$\sim(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p)$
د	د	د	ن	ن	د	**ن**
د	ن	ن	د	د	د	**د**
ن	د	د	ن	ن	ن	**ن**
ن	ن	د	ن	د	د	**ن**

می‌بینید:
ارزش گزاره‌ی مرکب همواره نادرست نبوده و هم‌ارزی برقرار نیست.

یک هم‌ارزی مهم برای گزاره‌ی شرطی:

قانون عکس نقیض:

هم‌ارزی زیر به نام قانون عکس نقیض برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

یعنی:

به جای آن‌که مستقیماً نشان دهیم p گزاره‌ی q را نتیجه می‌دهد، می‌توانیم روشی غیر مستقیم به‌کار ببریم:

نشان دهیم غلط بودن q به غلط بودن p منجر می‌شود!

دلیل این هم‌ارزی را در جدول زیر می‌بینید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	**د**	**د**
د	ن	ن	د	**ن**	**ن**
ن	د	د	ن	**د**	**د**
ن	ن	د	د	**د**	**د**

سؤال نهایی:

کدام گزاره هم‌ارز گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

قانون عکس نقیض

۱) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ۲) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ ۳) $\boxed{\sim q \Rightarrow \sim p}$ ۴) $p \Leftrightarrow q$

(گزینه (۳): طبق قانون عکس نقیض)

مثال: در زیر، یک گزاره‌ی شرطی و عکس نقیض آن را می‌بینید؛ ارزش درستی آن‌ها یکسان است. (هر دو درست)

گزاره: اگر باران ببارد، آنگاه زمین تَر می‌شود.

عکس نقیض: اگر زمین خشک باشد، آنگاه باران نباریده است.

قوانین دمورگان:

طبق دو هم‌ارزی زیر، نقیض را می‌توان در ترکیب‌های فصلی و عطفی توزیع کرد:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{و} \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

تغییر تغییر

دلیل هم‌ارزی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ را می‌بینید، مورد دیگر هم به روش مشابه نشان داده می‌شود:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

مثال: نقیض گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ را مشخص کنید.

پاسخ

ابتدا ترکیب شرطی را به فصلی تبدیل کرده و سپس طبق دمورگان:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$

از مثال قبل به یاد داشته باشید:

$$\boxed{\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q}$$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $(x < ۲) \wedge (۲^۳ \neq ۷)$

ب) اگر $\sqrt{۴۹}$ مربع کامل باشد، آنگاه رضا در کنکور قبول می‌شود.

پاسخ

الف) طبق دمورگان:

$$\sim[(x < ۲) \wedge (۲^۳ \neq ۷)] \equiv \sim(x < ۲) \vee \sim(۲^۳ \neq ۷) \equiv (x \geq ۲) \vee (۲^۳ = ۷)$$

ب) طبق هم‌ارزی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ جواب چنین است:

$\sqrt{۴۹}$ مربع کامل است و رضا در کنکور قبول نمی‌شود.

---

۲ استدلال ریاضی

در این بخش، کاربردهای ساده‌ای از منطق و استدلال ریاضی در نحوه‌ی استدلال کردنِ صحیح و برخی خطاهای منجر به نتایج ناصحیح را خواهیم دید. اولین گام برای این کار (یعنی: استدلال ریاضی)، این است که گزاره‌های توصیفی را توسط نمادهای ریاضی بنویسیم. با آوردن نمونه‌هایی، با این کار آشنا می‌شویم.

مثال: عبارت «مربع هر عدد بعلاوه‌ی ۱، بزرگ‌تر یا مساوی دو برابر آن عدد است.» را با نماد ریاضی می‌نویسیم.

اگر عدد دلخواه را با x نشان دهیم، مربع آن $x^۲$ و دو برابر آن $۲x$ است. عبارت بالا:

$$x^۲+۱\geq ۲x$$

مثال: (از کتاب)

عبارت زیر را با نماد ریاضی بیان کنید:

ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.

پاسخ

اگر قیمت فروش کالا x و قیمت خرید را y بگیریم، سود کالا $x-y$ و ده درصد قیمت فروش $\frac{۱۰}{۱۰۰}x$ خواهد شد. پس:

$$\frac{۱۰}{۱۰۰}x=x-y$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

الف) گزاره‌ی «مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به‌علاوه‌ی پنج است.» را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

ب) درستی یا نادرستی استدلال زیر را بررسی کنید؛ اگر روش به‌کار رفته نادرست است، آن را اصلاح کنید.

گزاره: اگر طول و عرض مستطیلی را ۳ برابر کنیم، آنگاه مساحت آن ۳ برابر می‌شود:

استدلال

طول اولیه $=x$ و عرض اولیه $=y$ $\Rightarrow$ **مساحت اولیه**: $S=xy$

طول جدید $=۳x$ و عرض جدید $=y$ $\Rightarrow$ **مساحت جدید**: $S'=(۳x)(y)=۳xy=۳S$

پاسخ

الف) به آسانی می‌نویسیم:

$$x^۳>۷x+۵$$

ب) نادرست است؛ زیرا:

عرض جدید را باید $۳y$ بگیریم و چنان‌که می‌بینید، مساحت جدید ۹ برابر می‌شود:

$$S'=(۳x)(۳y)=۹xy=۹S$$

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

توجه کنید:

هنگام تبدیل عبارات به نماد ریاضی یا بالعکس:

به مفهوم واژه‌ها دقت کرده و ترتیب محاسبات روی مقادیر را دقیقاً رعایت کنید.

چند نمونه:

- نصف قرینه‌ی یک عدد به صورت $\frac{-x}{۲}$، قرینه‌ی نصف یک عدد $-\frac{x}{۲}$، ثلث مربع یک عدد $\frac{x^۲}{۳}$ و مربـع ثلـث یـک عدد $(\frac{x}{۳})^۲$ است.
- مربع مجموع دو عدد به صورت $(a+b)^۲$ و جذر مجموع مربعات دو عدد $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.
- سه واحد بیشتر از قرینه‌ی میانگین دو عدد به صورت $۳+\frac{a+b}{۲}-$ است.

ساده‌ترین روش در استدلال ریاضی به صورت زیر است:

قیاس استثنایی:

در این نوع استدلال، فرض می‌کنیم گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ و گزاره‌ی p درست هستند. نتیجه این است که گزاره‌ی q باید درست باشد.

(اگر q نادرست باشد، گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ به صورت «**د** $\Rightarrow$ **ن**» تبدیل شده و باید نادرست باشد.)

مطلب بالا به شکل نمادین، به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

(نماد $\therefore$ به معنای «نتیجه» یا «در نتیجه» است.)

نمونه‌ای ببینید:

اگر بدانیم دو گزاره‌ی زیر صحیح هستند:

$\underbrace{\text{«اگر } \underbrace{\text{عددی منفی باشد}}_{p} \text{، آنگاه } \underbrace{\text{قرینه‌ی آن مثبت است.»}}_{q}}_{p \Rightarrow q}$ و $\underbrace{\text{«} x \text{ عددی منفی است.»}}_{p}$

طبق قیاس استثنایی نتیجه می‌گیریم:

«$-x$ عددی مثبت است.»

مثال: (از کتاب)

دو مقدمه‌ی زیر صحیح هستند:

مقدمه ۱: اگر امشب، شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است. **مقدمه ۲:** امشب، شب چهاردهم ماه است.

چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

پاسخ

طبق قیاس استثنایی: «ماه کامل است».

مثال: جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید تا قیاس به درستی کامل شود:

مثلث دو زاویه‌ی برابر دارد. $\Rightarrow$ **مثلث دو ضلع برابر داشته باشد.**

....

مثلث ABC دو زاویه‌ی برابر دارد.

پاسخ

طبق قاعده‌ی قیاس استثنایی:

مثلث ABC دو ضلع برابر دارد.

مثال: قیاس استثنایی را می‌توان در کل با گزاره‌ی مرکب مقابل صورت بندی کرد:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

درستی این قاعده را توسط جدول ارزشی نشان دهید.

پاسخ

چنان‌که می‌بینید، گزاره‌ی مرکب همواره درست است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

یعنی:

در صورتی که p و استنتاج $(p \Rightarrow q)$ درست باشند، q الزاماً درست خواهد بود.

در ادامه، نمونه‌های دیگری از استدلال‌های درست و در پایان برخی خطاها در استدلال را خواهیم دید.

مثال: (از کتاب)

سه لیوان داریم که مانند شکل زیر یکی از آن‌ها وارونه است. می‌خواهیم همه‌ی آن‌ها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس). آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟

پاسخ

اگر تعداد لیوان‌های وارونه را s بگیرید، در این صورت:

اکنون $s=1$ است و وضعیت مطلوب این است که $s=0$ شود.

در هر تغییر وضعیت لیوان‌ها، طبق شرط سؤال، سه حالت می‌تواند رخ دهد:

- **دو لیوان وارونه، درست شوند:**

  در این حالت، از لیوان‌های وارونه ۲ تا کم می‌شود. (یعنی: تبدیل s به $s-2$)
- **دو لیوان درست، وارونه شوند:**

  در این حالت، به لیوان‌های وارونه ۲ تا اضافه می‌شود. (یعنی: تبدیل s به $s+2$)
- **یک لیوان وارونه، درست و یک لیوان درست، وارونه شود:**

  در این حالت، تعداد لیوان‌های وارونه تغییر نمی‌کند. (یعنی: ثابت ماندن s)

توجه کنید:

در شروع کار $s=1$ عددی فرد است و در هر مرحله، به اندازه‌ی عددی زوج (۰ یا ± 2) تغییر می‌کند و بنابراین هیچ‌گاه نمی‌تواند به عدد زوج $s=0$ تبدیل شود.

-----------✧-----------

تکنیک بعدی گاهی در استدلال کردن مفید است.

کاربرد عکس نقیض:

قبلاً دیدیم که هم‌ارزی $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$ برقرار است. هنگام کاربرد:

در صورتی که اثبات درستی $(p\Rightarrow q)$ دشوار باشد، به جای آن ثابت می‌کنیم $(\sim q\Rightarrow\sim p)$ درست است.

توجه کنید:

اثبات درستی $(p\Rightarrow q)$، یعنی: با فرض درست بودن گزاره‌ی p، نشان دهیم که q حتماً درست است.

مثال: (از کتاب) ثابت کنید:

اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است. $(n\in\mathbb{Z})$

پاسخ

قرار دهید:

p **:** n^2 **زوج است.** و q **:** n **زوج است.**

باید نشان دهیم $p\Rightarrow q$ درست است. چون این کار آسان نیست، درستی عکس نقیض آن را نشان می‌دهیم: ($\sim q\Rightarrow\sim p$). یعنی کافی است ثابت کنیم:

اگر n فرد باشد، آنگاه n^2 فرد است.

اثبات: چون n فرد است، آن را به صورت $n=2k+1$ نوشته و:

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1 \rightarrow n^2=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{m}+1 \Rightarrow n^2=2m+1$$

(پس n^2 فرد است.)

-----------✧-----------

در پایان، دو نوع خطای استدلال را ببینید.

مغالطه:

گاهی هنگام کاربرد قیاس استثنایی، از درستی $p \Rightarrow q$ و درستی q، ممکن است نتیجه بگیریم p درست است؛ که البته اشتباه است.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

مغالطه (استدلال نادرست)

مثال: استدلال زیر نمونه‌ای از یک مغالطه است:

مثلث سه زاویه‌ی برابر دارد. $\Rightarrow$ مثلث متساوی الاضلاع باشد.

در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

زیرا از درستی $p \Rightarrow q$ و q، درستی p را نتیجه گرفته است.

توجه کنید:

نتیجه‌ی حاصل از یک مغالطه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی نتیجه‌ی قیاس استثنایی همواره درست است.

-----------✧-----------

مثال: عبارات زیر را در نظر بگیرید:

مقدمه ۱: $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ **مقدمه ۲:** $9 > 0$

. . . .

جای خالی را: **الف)** طبق قیاس استثنایی **ب)** طبق مغالطه کامل کنید.

کدام نتیجه‌گیری معتبر است؟

پاسخ

الف) در حالت قیاس استثنایی، عبارت $9 > 0$ نقش $x > 0$ را دارد و بنابراین جواب: $81 > 0$. **(استدلال معتبر)**

ب) برای مغالطه باید عبارت $9 > 0$ را همان $x^2 > 0$ بگیرید. یعنی $3^2 > 0$ و جواب: $3 > 0$. **(استدلال نامعتبر)**

-----------✧-----------

نوع دوم خطاها:

خطا در محاسبات:

گاهی قیاس استثنایی به درستی به‌کار می‌رود، ولی ممکن است در جزئیاتِ محاسبات، اشتباه کرده باشیم.

نمونه‌هایی ببینید:

مثال: روش زیر ادعا می‌کند که معادله‌ی $x^۲=۲x$ تنها یک ریشه دارد و آن $x=۲$ است. مراحل این استدلال در زیر آمده است:

مرحله ۱: $x^۲-۲x=۰$ مرحله ۲: $x(x-۲)=۰$ مرحله ۳: $\frac{\cancel{x}(x-۲)}{\cancel{x}}=\frac{۰}{x}$

مرحله ۴: $x-۲=۰$ مرحله ۵: $x=۲$

خطای استدلال در کجاست؟

پاسخ

خطا در مرحله‌ی سوم اتفاق افتاده است. زیرا:

تقسیم صورت و مخرج بر x مجاز نیست، زیرا اگر $x=۰$ باشد، کسر بی معنی است.

توجه کنید: (مهم)

مانند آن‌چه در مثال قبل دیدیم؛

تقسیم دو طرف یک تساوی فقط بر عددی که می‌دانیم غیرصفر است، مجاز می‌باشد.

مثال: استدلال زیر نشان می‌دهد که $۵=۷$ است. خطای استدلال در کدام مرحله رخ داده است؟

مرحله ۱: $۷=۷$ مرحله ۲: $۷=۳+۴$ مرحله ۳: $۷=\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}$

مرحله ۴: $۷=\sqrt{۹+۱۶}$ مرحله ۵: $۷=\sqrt{۲۵}$ مرحله ۶: $۷=۵$

پاسخ

خطا در مرحله‌ی چهارم اتفاق افتاده است. زیرا:

در جمع رادیکال‌ها، نمی‌توان عددهای زیر آن‌ها را با هم جمع کرد. ($\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}\neq\sqrt{۹+۱۶}$)

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،

می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ با کدام هم‌ارزش است؟

❶ $\sim(q \wedge r)$ ❷ $p \vee r$ ❸ $p \wedge \sim q$ ❹ $\sim p \vee q$

گزینه ۴

جایگذاری اطلاعات داده شده و سپس استفاده از قوانین:

$$[\underbrace{(T \vee F)}_{T} \Rightarrow \underbrace{(r \wedge F)}_{F}] \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$$

فقط در مورد چهارم، ارزش گزاره نادرست است:

$$\sim p \vee q \equiv \sim T \vee F \equiv F \vee F \equiv F$$

برخی هم ارزی‌های گزاره‌ها به سادگی تشخیص داده می‌شوند:

نکته ۱

هم ارزی‌های بدیهی:

موارد ساده‌ی زیر، با توجه به تعریف ترکیب‌ها همواره برقرار هستند:

- ترکیبات بدیهی یک گزاره با خودش:

$p \Leftrightarrow p \equiv T$ $p \Rightarrow p \equiv T$ $p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$

- ترکیبات بدیهی یک گزاره با **T** یا **F**:

$F \Rightarrow p \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$ $p \vee F \equiv P$ $p \wedge T \equiv p$ $p \vee T \equiv T$

- ترکیبات بدیهی گزاره با نقیض خودش:

$\sim p \Leftrightarrow p \equiv F$ $\sim(\sim p) \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $p \vee \sim p \equiv T$

- ترکیبات بدیهی گزاره با فصلی و عطفی:

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

توجه داشته باشید که:

❖ جابجایی‌های $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ و $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ و $(p \Leftrightarrow q) \equiv (q \Leftrightarrow p)$ طبق جدول‌های مربوطه برقرار هستند، **اما:**

گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ و عکس آن $q \Rightarrow p$ یکسان نیستند.

❖ ترکیب‌های فصلی و عطفی مانند ضرب اعداد نسبت به جمع، «**پخش‌پذیر**» هستند و استفاده از آن‌ها در تست‌ها گاهی مفید واقع می‌شود:

$$\boxed{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \quad \text{و} \quad \boxed{p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$$

بعلاوه:

برعکس پخش‌پذیری (فاکتورگیری) هم گاهی مفید است. نمونه:

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{\equiv F} \equiv p$$

گزاره‌ی $p \vee (\sim p \wedge q)$ هم‌ارز کدام است؟

❶ q ❷ $p \wedge q$ ❸ p ❹ $p \vee q$

گزینه ۴

با استفاده از پخش‌پذیری و سایر خواص گفته شده:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\underbrace{p \vee \sim p}_{\equiv T}) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

تعیین نقیض گزاره‌های مرکب با قوانین زیر انجام می‌شود:

نکته ۲

قوانین دمورگان:

دو هم‌ارزی زیر را قبلاً توسط جدول دیده‌ایم:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{و} \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

یعنی:

هنگام نقیض کردن ترکیب فصلی یا عطفی؛

هر یک از گزاره‌ها نقیض شده و همچنین $\wedge$ و $\vee$ به هم تبدیل می‌شوند.

توجه کنید:

هنگام کاربرد قوانین دمورگان، هم‌ارزی $\sim (\sim p) \equiv p$ کاربرد فراوانی دارد. بعلاوه، ممکن است نقیض بیش از دو بار هم پشت سر هم قرار گیرد، در این صورت، می‌توانید جفت جفت (تعداد زوج) آن‌ها را حذف کنید. نمونه:

$$\underbrace{\sim (\sim (\sim \cdots (\sim}_{\text{هفت بار}} p))) \equiv \sim p$$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۵ عددی زوج است و π عددی گنگ است.

ب) ماه به دور خورشید می‌گردد یا زمستان هوا گرم است.

پاسخ

طبق قوانین دمورگان:

الف) ۵ عددی فرد است یا π عددی گویا است.

ب) ماه به دور خورشید نمی‌گردد و زمستان هوا گرم نیست.

نقیض گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز کدام است؟

❶ $p \Leftrightarrow \sim q$ ❷ $\sim p \wedge \sim q$ ❸ $\sim p \Rightarrow q$ ❹ $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

گزینه ۱

هر چند برای قاعده‌ای بیان نکردیم، به آسانی می‌بینید که ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow \sim q$ (و به صورت مشابه $\sim p \Leftrightarrow q$) دقیقاً برعکس $p \Leftrightarrow q$ است.

تبدیل گزاره‌ی شرطی به یک گزاره‌ی شرطی هم‌ارز دیگر:

نکته ۳

قانون عکس نقیض:

این هم‌ارزی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

یعنی:

می‌توان هر دو گزاره را نقیض کرده و آن‌ها را جابجا کرد.

برای نمونه؛

هم‌ارز گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه عدد ۴ زوج است.» چنین خواهد بود:

اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۲ اول نیست.

به کمک عکس نقیض گزاره‌ی شرطی، به جای اثبات گزاره‌ی شرطی «اگر $x \leq 0$، آنگاه $|x| > 0$» می‌توانیم کدام گزاره‌ی زیر را اثبات کنیم؟

❶ اگر $x \geq 0$، آنگاه $|x| \leq 0$

❷ اگر $x < 0$، آنگاه $|x| \leq 0$

❸ اگر $|x| \leq 0$، آنگاه $x > 0$

❹ اگر $|x| \geq 0$، آنگاه $x > 0$

گزینه ۳

گزاره را نمادین نوشته و قانون عکس نقیض را به کار می‌بریم:

$$(x \leq 0) \Rightarrow (|x| > 0) \equiv \sim(|x| > 0) \Rightarrow \sim(x \leq 0) \equiv (|x| \leq 0) \Rightarrow (x > 0)$$

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

هم‌ارزی بسیار مهم و پرکاربرد برای گزاره‌های شرطی:

نکته ۴

تبدیل شرطی به فصلی:

هم‌ارزی شرطی زیر دارای کاربرد فراوان است:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

یعنی:

در گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ ، می‌توان «گزاره‌ی اول را نقیض کرده»، «نماد $\Rightarrow$ به $\vee$ تبدیل شده» و گزاره‌ی دوم را نوشت.

نتیجه:

با استفاده از هم‌ارزی فوق و کاربرد دمورگان، نقیض گزاره‌ی شرطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q}$$

مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید.

اگر ۵ عددی زوج باشد، آنگاه $-10 \geq 10$ است.

پاسخ

طبق مطلب قبل، فقط گزاره‌ی دوم نقیض شده و شرطی به عطفی تبدیل می‌شود:

۵ عددی زوج و $-10 < 10$ است.

توجه کنید:

نقیض $>$ به صورت $\leq$، نقیض $=$ به صورت $\neq$ و نقیض $\leq$ به صورت $>$ است. (و برعکس)

گزاره‌ی $\sim (p \Rightarrow q)$، با کدام گزاره‌ی زیر، هم‌ارزش است؟ **(ریاضی ۹۸)**

❶ $\sim p \vee q$ ❷ $p \vee \sim q$ ❸ $p \wedge \sim q$ ❹ $\sim p \wedge q$

گزینه ۳

چنان‌که گفته‌ایم: (هم‌ارزی شرطی و سپس دمورگان)

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گزاره‌ی $\sim (p \Rightarrow \sim q)$ هم‌ارز کدام است؟

❶ $p \vee \sim q$ ❷ $p \wedge q$ ❸ $q \vee \sim p$ ❹ $\sim p \wedge q$

گزینه ۲

مشابه قبل:

$$\sim (p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$$

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

کدام‌یک از هم ارزی‌های زیر نادرست است؟ (کنکور خارج ۹۸)

❶ $p\wedge(p\vee q)\equiv p$ ❷ $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

❸ $(\sim p\vee q)\equiv(q\Rightarrow p)$ ❹ $(\sim p\vee q)\equiv(p\Rightarrow q)$

گزینه ۳

هم‌ارزی سایر گزینه‌ها را قبلاً دیده‌ایم. در مورد سوم:

$$q\Rightarrow p\equiv\sim q\vee p$$

جدول ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزش گزاره‌ی $(p\vee q)\Rightarrow(q\vee r)$ یکسان نیست؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ $p\Rightarrow(q\vee r)$ ❷ $(p\wedge q)\vee r$ ❸ $\sim p\vee q\vee r$ ❹ $(p\Rightarrow q)\vee r$

گزینه ۲

با استفاده از نکته‌ی قبل، می‌توان دید که گزینه‌های اول و چهارم با گزینه‌ی سوم هم‌ارز هستند:

$$(p\Rightarrow q)\vee r\equiv(\sim p\vee q)\vee r\equiv\sim p\vee q\vee r \quad \text{و} \quad p\Rightarrow(q\vee r)\equiv\sim p\vee(q\vee r)\equiv\sim p\vee q\vee r$$

در نتیجه:

فقط گزینه‌ی دوم می‌تواند جواب تست باشد!

روش دوم:

(استفاده از تکنیک مقدار گذاری که پایین‌تر گفته شده، بر عهده‌ی داوطلبان کنکور.)

گزاره‌ی $[(p\wedge(p\vee q)]\Rightarrow p$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

❶ $\sim p\vee p$ ❷ $p\vee q$ ❸ $p\wedge q$ ❹ $\sim p\wedge q$

گزینه ۱

طبق هم ارزی‌های گفته شده:

$$\underbrace{[(p\wedge(p\vee q)]}_{\equiv p}\Rightarrow p\equiv(p\Rightarrow p)\equiv(\sim p\vee p)$$

توجه کنید:

وقتی به $p\Rightarrow p$ رسیدید، بدون استفاده از قوانین هم‌ارزی هم معلوم است که آن فقط با $(\sim p\vee p)$ هم‌ارز است. (هر دو هم‌ارز T هستند.)

نکته ۵

هم‌ارزی دو شرطی:

گزاره‌ی دو شرطی $p\Leftrightarrow q$ دقیقاً هنگامی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

بنابراین هر دوی $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$ هم درست خواهند بود و در نتیجه:

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$$

0912 172 0728
@alireza_karbalaie
پایه یازدهم رشته انسانی جناب استاد کربلایی

توجه کنید:

برای تشخیص هم‌ارز بودن گزاره‌ها با هم، چنان‌که تاکنون دیده‌اید، لازم است:

- به هم‌ارزی‌های بدیهی توجه کرده و آن‌ها را در صورت وجود، به‌کار ببرید.
- در صورت امکان، قوانین بالا را به صورت مناسب به‌کار ببرید.

اگر روش‌های بالا غیرممکن یا زمان کافی نبود؛

تکنیک بسیار مفید زیر را به‌کار ببرید:

نکته ۶

مقدارگذاری:

- در گزاره مرکبِ داده شده، جای گزاره‌های ساده «د» یا «ن» قرار داده و ارزش کل گزاره را تعیین کنید.
- همان مقادیر را در گزینه‌ها نیز قرار داده و هر گزاره‌ای که ارزش متفاوت با جواب مرحله‌ی قبل داشت، رد می‌شود.
- در صورت لزوم، مقادیر «د» و «ن» گزاره‌ها را تغییر داده تا فقط یک گزینه باقی بماند.

توجه کنید:

هنگام جایگذاری گزاره‌ها، باید پرانتزها (و در کل ترتیب محاسبات) دقیقاً رعایت شوند.

ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب چگونه باشد تا گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ نادرست باشد؟

❶ نادرست - نادرست ❷ درست - درست ❸ درست - نادرست ❹ نادرست - درست

گزینه ۲

برای نادرست بودن گزاره‌ی مرکب، باید حتماً $(p \Rightarrow \sim q)$ نادرست باشد که:

فقط با درست بودن هر دوی p و q رخ می‌دهد.

کدام مورد در خصوص ارزش گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$ درست است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است. ❷ همواره نادرست است.

❸ همواره درست است. ❹ هم‌ارز $p \Rightarrow \sim q$ است.

گزینه ۱

به آسانی می‌توان حالت‌های گوناگون را بررسی کرد، می‌بینید ارزش آن دقیقاً مانند $p \Rightarrow q$ است:

۱) اگر p نادرست باشد، گزاره‌ی شرطی به انتفای مقدم درست است.

۲) اگر p درست باشد؛

- در صورت درستی q، گزاره‌ی $p \wedge \sim q$ نادرست شده و بازهم گزاره‌ی شرطی به انتفای مقدم درست است.
- اگر q نادرست باشد، این بار $p \wedge \sim q$ درست و در نتیجه گزاره‌ی شرطی نادرست است.

توجه کنید:

استفاده از قوانین هم البته دشوار نیست:

$$(p\wedge\sim q)\Rightarrow q\equiv\sim(p\wedge\sim q)\vee q\equiv(\sim p\vee q)\vee q\equiv\sim p\vee\underbrace{q\vee q}_{q}\equiv\sim p\vee q\equiv p\Rightarrow q$$

-----------◈-----------

کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $\sim[((q\vee r)\Rightarrow(q\wedge r))\Rightarrow p]$ است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

❶ $p\wedge((q\wedge r)\vee(\sim q\wedge\sim r))$ ❷ $\sim p\vee((q\wedge r)\vee(\sim q\wedge\sim r))$

❸ $(\sim p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r)$ ❹ $(p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r)$

گزینه ۳

به روش مقدار گذاری، اگر هر سه‌ی p ، q و r را درست بگیریم، گزاره‌ی داده شده $\sim(T)$ ، یعنی نادرست خواهد شد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱) چون $q\wedge r$ درست است، ارزش کل گزاره $T\wedge(T\vee F)$ بوده که درست است. (رد گزینه)

گزینه ۲) مجدداً چون $q\wedge r$ درست است، ارزش کل گزاره $F\vee(T\vee F)$ بوده و درست است. (رد گزینه)

گزینه ۳) هر دو پرانتز نادرست هستند و در نتیجه ارزش کل گزاره نیز نادرست است.

گزینه ۴) واضح است که ارزش کل گزاره به صورت $T\vee F$ بوده و درست است. (رد گزینه)

بنابراین فقط گزینه‌ی سوم می‌تواند صحیح باشد.

-----------◈-----------

کدام گزاره‌ی زیر با **T** هم‌ارز است؟ **(یعنی همیشه درست است.)**

❶ $q\wedge(p\Rightarrow\sim p)$ ❷ $p\Rightarrow(p\vee q)$ ❸ $q\Rightarrow(p\wedge q)$ ❹ $p\Rightarrow\sim q$

گزینه ۲

با قدری دقت می‌بینید که غیر از گزینه‌ی دوم، سایر گزینه‌ها گاهی نادرست هم هستند.

- **گزینه ۱:** اگر p و q هر دو «د» باشند، گزاره‌ی $p\Rightarrow\sim q$ نادرست است.
- **گزینه ۳:** اگر p «ن» و q «د» باشد، گزاره‌ی $q\Rightarrow(p\wedge q)$ نادرست است.
- **گزینه ۴:** اگر q «ن» باشد، گزاره‌ی $q\wedge(p\Rightarrow\sim p)$ نادرست است.

-----------◈-----------

گزاره‌ی $(p\Rightarrow q)\wedge(p\vee q)$ هم‌ارز کدام است؟

❶ p ❷ $\sim p$ ❸ $\sim q$ ❹ q

گزینه ۴

روش اول:

استفاده از قوانین به ترتیب: **«تبدیل به فصلی» – «فاکتورگیری» – «ساده سازی بدیهی»:**

$$(\sim p\vee q)\wedge(p\vee q)\equiv(\underbrace{\sim p\wedge p}_{F})\vee q\equiv F\vee q\equiv q$$

روش دوم: «مقدار گذاری»

اگر هر دوی p و q را «د» قرار دهیم، گزاره‌ی سؤال:

در گزینه‌های ۲ و ۳ $\rightarrow$ **درست** : (د $\Rightarrow$ د) $\wedge$ (د $\vee$ د)

برای انتخاب بین گزینه‌های اول و چهارم، p را «د» و q را «ن» قرار می‌دهیم:

در گزینه‌ی ۱ $\rightarrow$ **نادرست** : (ن $\Rightarrow$ د) $\wedge$ (ن $\vee$ د)

کدام گزاره همواره درست است؟

❶ $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
❷ $p \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q \Rightarrow p))$
❸ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
❹ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

گزینه ۲

اگر p را «ن» و q را «د» قرار دهیم:

گزینه‌های اول و سوم هر دو به صورت (ن $\Leftrightarrow$ د) تبدیل شده، هر دو نادرست و رد می‌شوند.

اکنون اگر هر دوی p و q را «ن» قرار دهیم، گزینه‌ی چهارم:

در گزینه‌ی ۴ $\rightarrow$ **نادرست** : ن $\Rightarrow$ (ن $\Rightarrow$ ن)

اگر p، q و r هر سه نادرست باشند، کدام گزاره‌ها هم‌ارزش است؟

❶ $(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$ و $\sim (p \vee q)$
❷ $\sim (p \vee r) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow r)$ و $\sim r \vee q$
❸ $(p \vee \sim r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r)$ و $r \wedge p$
❹ $(\sim q \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$ و $r \vee q$

گزینه ۴

باید هر کدام از گزینه‌ها جایگذاری شوند. فقط در مورد آخر هر دو گزاره نادرست هستند:

$$(\sim q \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge q) \equiv \underbrace{(T \vee F)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge F)}_{F} \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F \quad \text{و} \quad r \vee q \equiv F \vee F \equiv F$$

اگر گزاره‌های $\sim p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow q$ هر دو درست باشند، آنگاه کدام گزاره‌ی زیر همواره درست است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ $q \vee p \Rightarrow q$
❷ $q \vee p \Rightarrow p$
❸ $p \wedge \sim q$
❹ $q \vee p \Rightarrow p \wedge q$

گزینه ۱

از فرضیات فهمیده می‌شود:

گزاره‌ی q حتماً درست بوده، در غیر این‌صورت یکی از $p \Rightarrow q$ یا $\sim p \Rightarrow q$ حتماً نادرست خواهد شد.

بنابراین واضح است که:

گزاره‌ی $q \vee p \Rightarrow q$ همواره درست خواهد بود.

در ادامه، نمونه‌های بیشتری از بخش استدلال ریاضی خواهیم دید. در تبدیل عبارات به بیان ریاضی:

به واژه‌ها توجه داشته و ترتیب آمدن آن‌ها را دقیقاً رعایت کنید.

نماد ریاضی عبارت‌های کلامی «مجموع جذر هر عدد و مجذورش از خود عدد بزرگ‌تر است.» و «جذر مجموع هر عدد و مجذورش از خود عدد بزرگ‌تر است.» به ترتیب کدام است؟

1. $\sqrt{x+\sqrt{x}} > x$ و $\sqrt{x}+x^2 > x$
2. $\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}} > x$ و $\sqrt{x}+x > \sqrt{x}$
3. $\sqrt{x+x^2} > x$ و $\sqrt{x}+x^2 > x$
4. $\sqrt{x}+x^2 > x$ و $\sqrt{x+\sqrt{x}} > x$

گزینه ۳

چون جذر عدد طبیعی: $\sqrt{x}$، مجذور آن: x^2 و خودش: x است. بعلاوه:

مجموع جذر عدد و مجذور: $\sqrt{x}+x^2$ و جذر مجموع عدد و مجذور: $\sqrt{x+x^2}$

نماد ریاضی عبارت «مکعب ثلث تفاضل دو عدد کوچک‌تر از جذر تفاضل مربعات همان دو عدد نیست.» کدام است؟

1. $(\frac{a-b}{3})^3 \geq \sqrt{(a-b)^2}$
2. $(\frac{a-b}{3})^3 \geq \sqrt{a^2-b^2}$
3. $(\frac{a-b}{3})^3 > \sqrt{a^2-b^2}$
4. $(\frac{a-b}{3})^3 > \sqrt{(a-b)^2}$

گزینه ۲

توجه کنید:

کوچک‌تر نیست: «$\nless$» به «$\geq$» تبدیل می‌شود.

مکعب یعنی: **توان سه**، ثلث یعنی: **تقسیم بر سه** و تفاضل یعنی: $a-b$. بخش اول: $(\frac{a-b}{3})^3$

و:

تفاضل یعنی: $a-b$ و جذر همان **رادیکال** است. بخش دوم: $\sqrt{a^2-b^2}$

کدام مورد یک قیاس استثنایی است؟

1. **مقدمه ۱:** اگر باران ببارد، آنگاه به سینما نمی‌رویم.
   مقدمه ۲: ما به سینما نمی‌رویم.
   $\therefore$ باران باریده است.
2. **مقدمه ۱:** اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، $\hat{A}=60^\circ$ است.
   مقدمه ۲: در مثلث MBC داریم: $\hat{B}=60^\circ$
   $\therefore$ مثلث MBC متساوی‌الاضلاع است.
3. **مقدمه ۱:** اگر فردا عید باشد، آنگاه مدرسه تعطیل است.
   مقدمه ۲: فردا مدرسه تعطیل است.
   $\therefore$ فردا عید فطر است.
4. **مقدمه ۱:** اگر بارندگی کم شود، آنگاه کشاورزی از رونق می‌افتد.
   مقدمه ۲: امسال بارندگی کم است.
   $\therefore$ کشاورزی از رونق می‌افتد.

گزینه ۴

فقط مورد چهارم مطابق ساختار قیاس استثنایی است:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

نمونه‌هایی از بررسی خطاهای استدلال ببینید:

اگر A مغالطه و B قیاس استثنایی باشد، **مقدمه‌ی ۲** برای A و نتیجه‌ی B به ترتیب کدام است؟

A

مقدمه ۱: اگر امروز جمعه است، آنگاه امروز مدرسه تعطیل است.

مقدمه ۲: ....

$\therefore$ ....

B

مقدمه ۱: اگر a فرد و b اول باشد، آنگاه $a+b$ زوج است.

مقدمه ۲: ....

$\therefore$ ....

❶ امروز جمعه است. - a زوج و b اول نیست.
❷ امروز تعطیل است. - $a+b$ فرد است.
❸ امروز تعطیل است. - $a+b$ زوج است.
❹ امروز جمعه است. - $a+b$ زوج است.

گزینه ۳

طبق مفاهیم قیاس استثنایی و مغالطه، فقط مورد سوم صحیح است.

در مورد استدلال زیر، کدام گزینه درست است؟

مقدمه ۱: اگر a و b اعداد اول دو رقمی باشند، آنگاه $ab+۱$ عددی زوج است.

مقدمه ۲: $۲۱\times۲۳+۱=۴۸۴$

$\therefore$ ۲۱ عددی اول است.

❶ قیاس استثنایی است.
❷ یک مغالطه است.
❸ عکس نقیض گزاره‌ی شرطی است.
❹ مقدمات ۱ و ۲ طبق قیاس استثنایی هستند، فقط نتیجه نادرست نوشته شده است.

گزینه ۲

واضح است که یک مغالطه انجام شده است.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

در اثبات ادعای «اگر ضرایب b و c در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ دو برابر شوند، جواب‌ها نیز دو برابر می‌شوند.» خطای محاسباتی در کدام مرحله رخ داده است؟ (ریشه‌های معادله‌ی بالا $x_۱, x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ هستند.)

مرحله ۱: ریشه‌های جدید: $x'_۱, x'_۲=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^۲-۴ac'}}{۲a}$

مرحله ۲: $x'_۱, x'_۲=\frac{-۲b\pm\sqrt{(۲b)^۲-۴a(۲c)}}{۲a}$

مرحله ۳: $x'_۱, x'_۲=\frac{-۲b\pm\sqrt{۴b^۲-۲(۴ac)}}{۲a}$

مرحله ۴: $x'_۱, x'_۲=\frac{-۲b\pm ۲\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$

مرحله ۵: $x'_۱, x'_۲=\frac{۲(-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac})}{۲a}$

مرحله ۶: $x'_۱, x'_۲=۲(x_۱, x_۲)$

1) ۵
2) ۴
3) ۳
4) ۶

گزینه ۲

خطا در مرحله‌ی چهارم رخ داده، زیرا:

$$\frac{-۲b\pm\sqrt{۴b^۲-۲(۴ac)}}{۲a}=\frac{-۲b\pm\sqrt{۴(b^۲-۲ac)}}{۲a}=\frac{-۲b\pm ۲\sqrt{b^۲-۲ac}}{۲a}$$

دومین خطای محاسباتیِ حل معادله‌ی $۲x^۳=۴x$ در کدام مرحله رخ داده است؟

مرحله ۱: $۲x^۳-۴x=۰$

مرحله ۲: $۲x(x^۲-۲)=۰$

مرحله ۳: $\frac{۲x(x^۲-۲)}{۲x}=\frac{۰}{۲x}$

مرحله ۴: $x^۲-۲=۰$

مرحله ۵: $x^۲=۲$

مرحله ۶: $x=\sqrt{۲}\ ,\ x=-۲$

1) ۵
2) ۴
3) ۶
4) ۳

گزینه ۳

اولین خطا در مرحله‌ی سوم است: (تقسیم تساوی بر $۲x$، چون اگر $x=۰$ باشد، حق تقسیم کردن نداریم.) خطای دوم در مرحله‌ی ششم است. زیرا:

$$x^۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۲} \\ x=-\sqrt{۲} \end{cases}$$

با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات آن می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه‌ی بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

۱) $a=b$

۲) $a^{۲}=ab$ .... طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است

۳) $a^{۲}-b^{۲}=ab-b^{۲}$ .... $b^{۲}$ را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است

۴) $(a-b)(a+b)=(a-b)b$ .... طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است

۵) $\frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{\cancel{(a-b)}}=\frac{\cancel{(a-b)}b}{\cancel{(a-b)}}$ .... طرفین تساوی گام ۴ را بر $a-b$ تقسیم کرده است

۶) $b+b=b$ .... به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است

۷) $\frac{۲\cancel{b}}{\cancel{b}}=\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}}$ .... طرفین تساوی گام ۷ را بر b تقسیم کرده است

۸) $۲=۱$

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۷ ❹ ۲۸

گزینه ۲

چون $a=b$ است، پس $a-b=۰$ بوده و بنابراین حق ساده کردن آن در صورت و مخرج را نداریم.

در کدام گزینه خطای محاسباتی وجود ندارد؟

❶ $x<y \rightarrow -۲+x>-۲+y$

❷ $x^{۲}+۱۶=۰ \rightarrow x=\pm ۴$

❸ $\sqrt{a^{۲}-۱۰a+۲۵}=|a-۵|$

❹ $x<y \rightarrow -۲x<-۲y$

گزینه ۳

خطاهای رخ داده چنین هستند:

- در گزینه (۱) با جمع دو طرف با -۲ جهت تغییر نمی‌کند.
- در گزینه (۲) معادله به صورت $x^{۲}=-۱۶$ بوده و جواب ندارد.
- در گزینه (٤) با ضرب دو طرف در -۲ باید جهت تغییر کند.

ولی مورد سوم طبق خاصیت $\sqrt{a^{۲}}=|a|$ صحیح نوشته شده است:

$$\sqrt{a^{۲}-۱۰a+۲۵}=\sqrt{(a-۵)^{۲}}=|a-۵|$$

تمرینات

۱ توسط جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی زیر را نشان دهید:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q \equiv T$$

۲ توسط جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی زیر را نشان دهید:

$$\sim (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \equiv p$$

۳ اگر r گزاره‌ای درست و $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \vee r)$ گزاره‌ای نادرست باشد، برای هم‌ارزی زیر دلیل بیاورید:

$$r \Rightarrow (q \wedge p) \equiv F$$

۴ بیان ریاضی هر عبارت را بنویسید:

الف) پنج برابر هر عدد برابر ثلث مربع آن عدد است.

ب) حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، کوچک‌تر یا مساوی مجموع مربعات آن دو عدد است.

پ) مجموع مجذور دو عدد، کوچک‌تر از مجذور مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع معکوس‌های دو عدد مثبت، بزرگ‌تر از معکوس مجموع آن دو عدد است.

۵ اشکال محاسباتی هر مورد را مشخص کنید:

الف) $x > y \Rightarrow x(x-y) > y(x-y)$

ب) $\frac{۲x}{x-۱} - \frac{۳x+۱}{x-۱} = \frac{۲x-۳x+۱}{x-۱} = \frac{-x+۱}{x-۱} = \frac{-(x-۱)}{x-۱} = -۱$

پ) $۵ = \sqrt{۲۵} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} = ۳+۴ = ۷$

ت) $-۵ < -۲ \Rightarrow (-۵)^۲ < (-۲)^۲ \Rightarrow ۲۵ < ۴$

ث) $۲ = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۱+\sqrt{۲}}$

۶ نشان دهید اگر عدد طبیعی n فرد باشد، $n^۲$ نیز عددی فرد است.

تمرینات
منتخب کتاب

۱ درستی هر یک از هم ارزی‌ها را توسط جدول ارزش‌ها نشان دهید.

الف) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ب) $p \Rightarrow p \equiv T$

پ) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

۲ گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

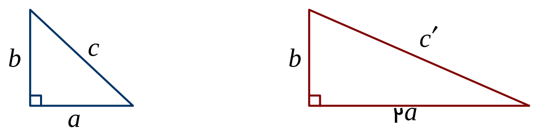
الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه‌ی پنج است.

پ) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۳ در هر مورد زیر، خطای استدلال را مشخص کنید.

الف) در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه‌ی a و b و وتر c همانند شکل زیر، اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر نیز دو برابر می‌شود.



استدلال:

می‌دانیم رابطه‌ی فیثاغورس: $c^2=a^2+b^2$ برقرار است. این رابطه را برای مثلث قائم الزاویه‌ی جدید می‌نویسیم.

$$c'^2=(2a)^2+b^2=4a^2+b^2=4(\underbrace{a^2+b^2}_{c^2})=4c^2 \Rightarrow c'^2=4c^2 \Rightarrow c'=2c$$

ب) تساوی $\sqrt{\dfrac{12\times3+4\times16}{6}}=2\sqrt{11}$ برقرار است.

استدلال:

$$\sqrt{\frac{12\times3+4\times16}{6}}=\sqrt{\frac{12\times\cancel{3}+4\times16}{2\times\cancel{3}}}=\sqrt{\frac{12+\overset{2}{\cancel{4}}\times16}{\cancel{2}}}=\sqrt{12+32}=\sqrt{44}=\sqrt{4\times11}=2\sqrt{11}$$

TEST تمرین تست

۱ کدام مورد نادرست است؟

❶ هر گزاره‌ی شرطی، با عکس نقیض خود هم‌ارز است.
❷ نقیض ترکیب فصلی دو گزاره، هم‌ارز ترکیب عطفی نقیض آن‌ها است.
❸ نقیض ترکیب دوشرطی دو گزاره، هم‌ارز ترکیب دوشرطی نقیض آن‌ها است.
❹ نقیض ترکیب عطفی دو گزاره، هم‌ارز ترکیب فصلی نقیض آن‌ها است.

۲ خطای حل معادله‌ی $۲x^۳=۴x$ در کدام مرحله رخ داده است؟ ($x\neq ۰$)

مرحله ۱: $۲x^۳-۴x=۰$ مرحله ۲: $۲x(x^۲-۲)=۰$ مرحله ۳: $\frac{۲x(x^۲-۲)}{۲x}=\frac{۰}{۲x}$

مرحله ۴: $x^۲-۲=۰$ مرحله ۵: $x^۲=۲$ مرحله ۶: $x=\sqrt{۲}$

❶ ۵ ❷ ۴ ❸ ۶ ❹ ۳

۳ عکس نقیض گزاره‌ی «اگر a عددی گنگ یا گویا باشد، آنگاه مربع عدد فرد b، عددی فرد است.» کدام است؟

❶ اگر مربع عدد فرد b، عددی زوج باشد، آنگاه a عددی گنگ یا گویا نیست.
❷ اگر مربع عدد فرد b، عددی فرد باشد، آنگاه a عددی گنگ یا گویا است.
❸ اگر مربع عدد فرد b، عددی فرد باشد، آنگاه a عددی گنگ و گویا است.
❹ اگر مربع عدد فرد b، عددی زوج باشد، آنگاه a عددی گنگ و گویا نیست.

۴ گزاره‌ی «اگر تیم A قهرمان نشود، شخص a ناراحت نخواهد شد.» نادرست است. پس:

❶ تیم A قهرمان شده و a ناراحت است. ❷ تیم A قهرمان نشده و a ناراحت است.
❸ تیم A قهرمان نشده و a ناراحت نیست. ❹ تیم A قهرمان شده و a ناراحت نیست.

۵ هم‌ارز گزاره‌ی $(q\Rightarrow p)\wedge(p\vee q)$ کدام است؟

❶ p ❷ $\sim p$ ❸ $\sim q$ ❹ q

۶ کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

❶ $p\Leftrightarrow(p\vee\sim p)$ ❷ $p\Rightarrow(\sim p\Rightarrow p)$ ❸ $p\Rightarrow(p\Leftrightarrow\sim p)$ ❹ $p\Rightarrow(p\wedge\sim p)$

۷ اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت چه تعداد از هم ارزی‌های زیر به درستی نوشته شده است؟

الف) $(\sim p\wedge p)\equiv \mathbf{F}$ ب) $(\sim q\vee q)\equiv \mathbf{F}$

پ) $\sim(\sim p\vee q)\equiv(p\vee\sim q)$ ت) $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim p\vee q)$

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۸ هم گزاره‌ی $p\wedge(q\vee r)$ کدام است؟

❶ $p\wedge(q\wedge r)$ ❷ $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ ❸ $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ ❹ $p\vee(q\vee r)$

۹ هم گزاره‌ی $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ کدام است؟

❶ $r\Rightarrow(p\vee q)$ ❷ $(p\vee q)\Rightarrow r$ ❸ $r\Rightarrow(p\wedge q)$ ❹ $(p\wedge q)\Rightarrow r$

۱۰ اگر p و q دو گزاره‌ی درست و r نادرست باشد، کدام مورد صحیح است؟

❶ $(p\vee\sim q)\wedge r\equiv\sim r$ ❷ $\sim r\Rightarrow(q\wedge r)\equiv p\Leftrightarrow q$

❸ $(\sim r\vee\sim q)\Rightarrow(r\Rightarrow q)\equiv \mathbf{T}$ ❹ $(q\wedge\sim r)\Leftrightarrow(q\wedge p)\equiv\mathbf{F}$

۱۱ نماد ریاضی کدام عبارت به صورت $۲(\frac{x}{۳}-\frac{x}{۴})=\frac{۵۰}{۱۰۰}\sqrt{x}+۳$ است؟

❶ دو سوم عددی منهای نصف آن، از نصف مجذور آن عدد ۳ واحد بیشتر است.

❷ اختلاف ثلث و ربع عددی، از پنجاه درصد جذر آن عدد، ۳ واحد بیشتر است.

❸ دو برابر تفاضل ربع عددی از ثلث آن، ۳ واحد بیشتر از پنجاه درصد از جذر آن عدد است.

❹ ثلث عددی منهای ربع آن عدد، از ربع جذر آن عدد ۳ واحد بیشتر است.

۱۲ در کدام گزینه، بیان نمادین نادرست است؟

❶ مجموع ثلث و ربع عددی، سه واحد از آن عدد کمتر است: $\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}=x-۳$

❷ مربع مجموع دو عدد بزرگ‌تر از مجموع مربعات آن دو عدد است: $x^۲+y^۲>(x+y)^۲$

❸ مکعب هر عددی بزرگ‌تر از مربع آن عدد است: $x^۳>x^۲$

❹ مجموع معکوس‌های دو عدد ناصفر، کوچک‌تر از معکوس مجموع آن دو عدد است: $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}<\frac{۱}{x+y}$

۱۳ در مورد استدلال زیر، کدام مورد نادرست است؟

مقدمه ۱: اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه ab عددی فرد است. **مقدمه ۲:** $a\times b=۳۲۳$

$\therefore$ ....

❶ روش بکار رفته نادرست است. ❷ یک مغالطه است.

❸ نتیجه‌ی استدلال: a و b هر دو فرد هستند. ❹ نتیجه‌ی استدلال بالا همیشه نادرست است.

۱۴ در کدام گزینه، خطای محاسباتی وجود ندارد؟

❶ $a>b\Rightarrow -۲a>-۲b$ ❷ $(x-۳)^۲=۲۵\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\x=۸\end{cases}$

❸ $\frac{۳x+y}{y}=۳x$ ❹ $a>b\overset{k<۰}{\Rightarrow}a+k>b+k$

۱۵ گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow q$ با کدام‌یک هم‌ارز است؟

❶ $\sim p$ ❷ p ❸ q ❹ $\sim q$

۱۶ بیان ریاضی گزاره‌ی زیر کدام است؟

$\sim$(مجذور مجموع عددهای مثبت a و b از نصف جذر مجموع آن‌ها، کوچک‌تر نیست.)

❶ $(a>0, b>0) \quad \sqrt{a+b} > \frac{(a+b)^2}{2}$ ❷ $(a>0, b>0) \quad \frac{\sqrt{a+b}}{2} \leq (a+b)^2$

❸ $(a>0, b>0) \quad \frac{\sqrt{a+b}}{2} > (a+b)^2$ ❹ $(a>0, b>0) \quad a^2+b^2 < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

۱۷ در مورد استدلال‌های زیر، کدام بیان درست است؟

A

مقدمه ۱: اگر امروز جمعه است، آنگاه مدرسه تعطیل است. **مقدمه ۲:** امروز مدرسه تعطیل است.

$\therefore$ امروز جمعه است.

B

مقدمه ۱: اگر دانش‌آموزی کلاس یازدهم باشد، آنگاه رشته‌ی او انسانی است.

مقدمه ۲: مهناز دانش‌آموز کلاس یازدهم است.

$\therefore$ رشته‌ی تحصیلی مهناز علوم انسانی است.

❶ A قیاس استثنایی و B مغالطه است. ❷ B قیاس استثنایی و A مغالطه است.

❸ هر دو قیاس استثنایی هستند. ❹ هر دو مغالطه هستند.

۱۸ چند مورد زیر نقیض گزاره‌ی « p عددی اول است.» را درست بیان کرده است؟

۱: p عددی زوج است. ۲: p عددی مرکب است. ۳: p عددی اول نیست.

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۱۹ ارزش گزاره‌ی $[p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$ کدام است؟

❶ $\sim F$ ❷ $q \vee F$ ❸ $q \wedge T$ ❹ $p \vee T$

۲۰ چند مورد از هم ارزی‌های زیر برقرار است؟

۱: $\sim p \wedge \sim(\sim p) \equiv T$ ۲: $p \wedge \sim(\sim T) \equiv T$ ۳: $\sim p \vee (\sim F) \equiv T$ ۴: $p \vee (\sim F) \equiv \sim p$

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۲۱ با توجه به گزاره‌های زیر، نقیض گزاره‌ی $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$ هم‌ارزش کدام گزاره است؟

p: میانه و میانگین داده‌های آماری همیشه یکتا هستند.

q: نمودار حبابی را می‌توان برای بیش از دو متغیر به‌کار برد.

r: در داده‌های آماری: ۹۱،۸۷،۱۹،۹۵،۸۴، مرکزیت داده‌ها با میانه تعیین می‌شود.

❶ $\sim F$ ❷ $p \vee F$ ❸ r ❹ $\sim(\sim q)$

۲۲ گزاره‌ی $\sim(p \wedge q) \wedge (q \vee p)$ با چه تعداد گزاره در زیر هم‌ارز است؟

۱: $\sim p$ ۲: $\sim p \vee q$ ۳: $p \vee \sim q$

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۲۳ اگر p گزاره‌ای . . . . و q گزاره‌ای دلخواه و r گزاره‌ای . . . . . . باشد، گزاره‌ی $(q \wedge \sim r) \wedge (q \Rightarrow p)$ دارای ارزش . . . . است.

❶ دلخواه– نادرست– نادرست ❷ نادرست– دلخواه– درست

❸ درست– درست– درست ❹ دلخواه– درست– نادرست

۳

تابـــع (۱)

فهرست مطالب

۱ یادآوری توابع

نمونه‌ای از یک تابع ببینید:

مثال: دو متغیر x و y با فرمول $y=-x+۳$ به هم مربوط هستند.

الف) اگر x از مجموعه‌ی $A=\{۰,۱,۳,۸\}$ انتخاب شود، مقادیر y را حساب کرده و در مجموعه‌ای به نام B قرار دهید.

ب) تغییری که این رابطه روی اعضای A انجام می‌دهد را توصیف کنید.

پ) این رابطه، هر مقدار x را به چه تعداد y ربط می‌دهد؟

پاسخ

الف) عددهای عضو A را در رابطه جایگزین x می‌کنیم؛

$$x=۱:\ y=-(۱)+۳=۲ \qquad x=۰:\ y=-(۰)+۳=۳$$

$$x=۸:\ y=-(۸)+۳=-۵ \qquad x=۳:\ y=-(۳)+۳=۰$$

پس $B=\{۳,۲,۰,-۵\}$ خواهد بود.

ب) چنان‌که می‌بینید:

رابطه ابتدا هر عضو A را قرینه کرده و سپس حاصل را با عدد ۳ جمع می‌کند.

پ) طبق توصیف بالا:

هر عضو از A در طی دو مرحله به یک عضو از B مرتبط می‌شود.

اکنون:

رابطه‌ای را در نظر بگیرید که به هر شخص، دوستان او را مربوط می‌کند. این رابطه یک تابع معرفی نمی‌کند، چون:

ممکن است یک فرد دوستان زیادی داشته باشد یا حتی هیچ دوستی نداشته باشد.

توجه:

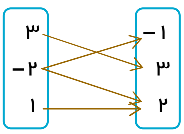
یک «**تابع**» از A به B:

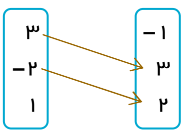
باید به هر عضو از A، دقیقاً یک عضو از B را مربوط کند.

هر تابع با قاعده‌ی خاص خود، اعضای A را به اعضای B ربط (نسبت) می‌دهد که به آن «**ضابطه‌ی تابع**» گویند. در مثال بالا، ضابطه به صورت $y=-x+۳$ داده شده بود.

نمایش پیکانی (نمودار وِن) روابط را به یاد بیاورید:

مثال: دو نمودار ون در زیر هیچ‌کدام تابع نیستند:

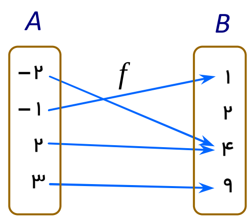




(زیرا عدد -۲ را به دو مقدار مربوط کرده است.) (زیرا عدد ۱ را به هیچ مقداری مربوط نکرده است.)

تابع را می‌توان با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش داد:

مثال: تابع f را در نمودار مقابل ببینید:



اگر اعضای دامنه را در مؤلفه‌های اول و اعضای برد را در مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب قرار دهیم، نمایش دیگری از توابع حاصل می‌شود:

$$f=\{(-۲,۴),(-۱,۱),(۲,۴),(۳,۹)\}$$

همه‌ی زوج‌ها را در یک مجموعه به نام f قرار داده‌ایم.

توجه کنید:

شرط تابع بودن در نمایش با زوج‌های مرتب این است که:

مؤلفه‌های اولِ هیچ دو زوج مرتبی برابر نباشند.

به بیان معادل:

اگر دو زوج مؤلفه‌ی اول برابر داشتند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم برابر باشند.

مثال: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی زیر یک تابع باشد.

$$\{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(a-۲,b+۳),(۳,۵),(۵,۳)\}$$

پاسخ

چون $(۵,۳)$ و $(۵,a-۲)$ مؤلفه‌ی اول برابر دارند، باید: $a-۲=۳$ و لذا $a=۵$.

در این صورت، زوج مرتب $(a-۲,b+۳)$ به صورت $(۳,b+۳)$ تبدیل می‌شود. چون زوج $(۳,۵)$ نیز در تابع وجود دارد، پس باید داشته باشیم:

$$b+۳=۵ \Rightarrow b=۲$$

اگر مقادیر $a=۵$ و $b=۲$ را در تابع جایگزین سازیم تابع به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\{(۴,۲),(۵,۳),(۳,۵)\}$$

نمودار مختصاتی:

اگر تمام زوج‌های مرتب تابع را در یک دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار تابع به‌دست می‌آید.

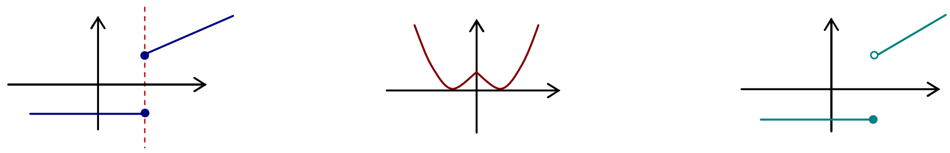
بعلاوه:

یک نمودار هندسی وقتی نمودار یک تابع است که:

هر خط موازی محور y آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

برای نمونه؛

شکل‌های زیر، نمودار سمت چپ تابع نیست، ولی دو نمودار دیگر تابع هستند:



۲ چند نوع تابع ساده

ساده‌ترین تابعِ ممکن، تابعی است که تغییر مقادیر ورودی، در مقدار خروجی تابع تاثیری ندارد.

تابع ثابت:

دامنه می‌تواند هر مجموعه‌ی دلخواه A باشد. این تابع همه‌ی اعضای دامنه را به یک عدد ثابت ربط می‌دهد:

$$\begin{cases} C: A \longrightarrow B \\ C(x) = \text{مقدار ثابت} \end{cases}$$

پس؛

$f(x)=-۱$ و $g(x)=۳$ توابع ثابت محسوب می‌شوند.

در نتیجه:

مقادیر x هر عددی می‌توانند باشند، ولی y فقط یک مقدار دارد؛ یعنی: برد مجموعه‌ای یک عضوی است.

برای نمونه؛

تابع y که با جدول مقادیر زیر داده شده، تابعی ثابت است:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۲	۲	۲	۲	۲

این تابع به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{cases} C: A \longrightarrow \{۲\} \\ C(x)=۲ \end{cases} \quad , \quad A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

(دامنه A و برد $\{۲\}$ است.)

تابع ثابت در حالت‌های مختلف:

❖ **زوج‌های مرتب:**

در نمایش یک تابع ثابت به صورت زوج‌های مرتب، تمام مؤلفه‌های دوم با هم برابر هستند.

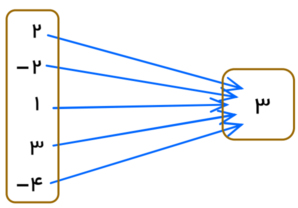
به عنوان مثال، تابع ثابت بالا در نمایش زوج مرتبی چنین خواهد بود:

$$g=\{(۲,۳),(-۲,۳),(۱,۳),(۳,۳),(-۴,۳)\}$$

❖ **نمودار ون:**

اگر f تابعی ثابت باشد، آنگاه تمام فلش‌ها به یک عدد در شکل سمت راست برده خواهد شد.

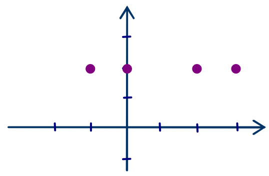
مثلاً تابع g چنین است:



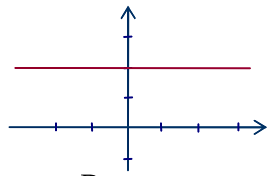
❖ **نمودار مختصاتی:**

اگر دامنه عددهای مشخص و محدودی باشد، فقط نقاط مربوطه را در دستگاه مشخص می‌کنیم. ولی اگر دامنـه اعـداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، نمودار تابع ثابت یک خطی افقی، یعنی خطی موازی محور طول‌ها خواهد بود.

نمودار $f(x)=۲$ را در دو حالت $D_f=\mathbb{R}$ و $D_f=\{-۱,۰,۲,۳\}$ ببینید:



$D_f=\{-۱,۰,۲,۳\}$



$D_f=\mathbb{R}$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر تابع $f=\{(۲,a-۱),(۰,۲),(۳,۲b)\}$ یک تابع ثابت باشد، حاصل ab را به‌دست آورید.

پاسخ

باید مؤلفه‌های دوم یکسان (برابر ۲) باشند. پس:

$$a-۱=۲ \Rightarrow a=۳ \quad و \quad ۲b=۲ \Rightarrow b=۱$$

در نتیجه:

$$ab=۳\times۱=۳$$

-----------✧-----------

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که f یک تابع ثابت باشد:

$$f=\{(۲,-۱),(-۱,a-b),(\sqrt{۳},-a+۲b)\}$$

پاسخ

باید هر سه مقدار در مؤلفه‌های دوم یکسان (برابر ۱−) باشند. پس:

$$a-b=-۱ \quad و \quad -a+۲b=-۱$$

دو طرف معادلات را با هم جمع می‌کنیم: $b=-۲$. حال در معادله‌ی اول عدد ۲− را جای b قرار می‌دهیم:

$$a-(-۲)=-۱ \rightarrow a+۲=-۱ \Rightarrow a=-۳$$

-----------✧-----------

مثال: تابع ثابت $f(x)=k$ را در نظر بگیرید. کدام مورد درست و کدام نادرست است؟ چرا؟

الف) نقاط $(۲,-۱)$ و $(-۱,۲)$ می‌توانند هر دو روی نمودار f واقع باشند.

ب) تساوهای $f(ax)=af(x)$ و $f(x)=f(-x)$ همواره برقرار هستند.

پ) تساوهای $f(a+b)=f(ab)$ و $f(a+b)=f(a)+f(b)$ همواره برقرار هستند. در چه صورتی هر دو تساوی برقـرار هستند؟

پاسخ

الف) نادرست است؛ چون باید عرض نقاط یکسان باشند.

ب) تساوی اول برقرار نیست، زیرا $f(ax)=k$ و $af(x)=a\times k$ است. اما تساوی $f(x)=f(-x)=k$ همواره برقرار می‌باشد.

پ) تساوی اول برقرار است، زیرا $f(a+b)=k$ و $f(ab)=k$ است. اما تساوی دوم برقرار نیست، زیرا:

$$f(a+b)=k \quad \text{و} \quad f(a)+f(b)=k+k=۲k$$

برای این‌که تساوی دوم نیز برقرار باشد، لازم است:

$$۲k=k \rightarrow ۲k-k=۰ \Rightarrow k=۰$$

به تابع خاص دیگری توجه نمایید:

تابع همانی:

هر گاه در یک تابع، برای هر مقدار x از دامنه، مقدار y با x برابر باشد، به آن «**تابع همانی**» گفته می‌شود.

$$f(x)=x$$

برای نمونه:

تابع y که در جدول زیر داده شده است، تابعی همانی است.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۲	−۱	۰	۱	۲

سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

اگر دامنه‌ی یک تابع همانی f مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه $f(x)+f(-x)$ همواره برابر صفر است.

(**درست** ☐ – **نادرست** ☐)

درست است؛ زیرا:

$$f(x)+f(-x)=x+(-x)=x-x=۰$$

نمایش تابع همانی در حالت‌های مختلف:

❖ **زوج‌های مرتب:**

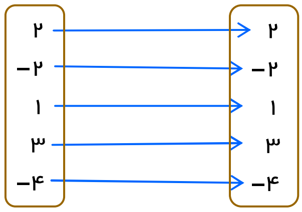
در نمایش یک تابع همانی به صورت زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های اول و دوم با هم برابر هستند.

به عنوان مثال، تابع همانی بالا در نمایش زوج مرتبی چنین خواهد بود:

$$g=\{(-۲,-۲),(-۱,-۱),(۰,۰),(۱,۱),(۲,۲)\}$$

❖ **نمودار ون:**

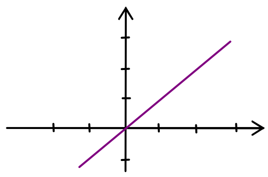
اگر f تابعی همانی باشد، آنگاه تمام فلش‌ها به عددی برابر خودشان در شکل سمت راست برده خواهند شد:



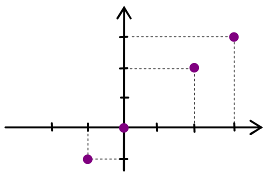
❖ **نمودار مختصاتی:**

اگر دامنه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، نمودار تابع همانی خط ($y=x$)، یعنی نیمساز ربع اول و سوم خواهد بود. ولی اگر دامنه عددهای مشخص و محدودی باشد، فقط نقاط مربوطه را مشخص می‌کنیم که البته بازهم روی نیمساز قرار دارند.

نمودار تابع همانی را در دو حالت $D_f=\mathbb{R}$ و $D_f=\{-۱,۰,۲,۳\}$ ببینید:



$D_f=\mathbb{R}$

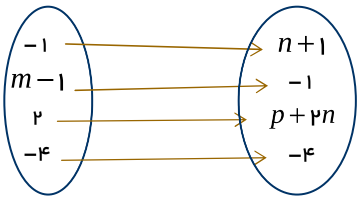


$D_f=\{-۱,۰,۲,۳\}$

توجه کنید:

چنان‌که در تمام موارد بالا هم می‌بینید، دامنه و برد تابع همانی یکسان هستند.

مثال: اگر نمودار ون مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد، مقادیر m، n و p را بیابید.



پاسخ

طبق تعریف تابع همانی، باید مؤلفه‌های اول و دوم برابر باشند:

$$n+۱=-۱ \rightarrow n=-۲\ ,\ m-۱=-۱ \Rightarrow m=۰$$

همچنین باید داشته باشیم $p+۲n=۲$ و چون $n=-۲$، لذا:

$$p-۴=۲ \Rightarrow p=۶$$

مثال: تابع همانی f را در نظر بگیرید. کدام مورد درست و کدام نادرست است؟ چرا؟

الف) نقاط $(۲,-۱)$ و $(-۱,-۱)$ می‌توانند هر دو روی نمودار f واقع باشند.

ب) تساوهای $f(ax)=af(x)$ و $f(x)+f(-x)=۰$ همواره برقرار هستند.

پ) تساوهای $f(ab)=f(a)f(b)$ و $f(a+b)=f(a)+f(b)$ همواره برقرار هستند.

پاسخ

الف) نادرست است:

چون باید طول و عرض هر نقطه یکسان باشد و بنابراین فقط $(-1,-1)$ روی نمودار است.

ب) هر دو مورد صحیح است، زیرا:

$$f(ax)=ax\,,\quad af(x)=a\times x=ax \quad \text{و} \quad f(x)+f(-x)=x+(-x)=x-x=0$$

پ) هر دو مورد صحیح است، زیرا:

$$f(ab)=ab\,,\quad f(a)f(b)=a\times b=ab \quad \text{و} \quad f(a+b)=a+b\,,\quad f(a)+f(b)=a+b$$

گاهی تابع بیش از یک ضابطه دارد:

تابع چند ضابطه‌ای:

در این نوع تابع، دامنه به چند بخش تقسیم شده و هر قسمت یک ضابطه دارد. مانند:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & -2<x<1 \\ 1-x & x\geq 1 \end{cases}$$

در این تابع دو ضابطه‌ای؛

اگر عددی در محدوده‌ی $-2<x<1$ داده شود، مقدار تابع از $g(x)=x^2$ و اگر $x\geq 1$ باشد، مقدار تابع از ضابطه‌ی $g(x)=1-x$ به‌دست می‌آید. (بعلاوه؛ برای نمونه، $g(-3)$ تعریف نشده، چون -3 در دامنه نیست.)

توجه کنید:

برای رسم نمودار این تابع، در هر قسمت از دامنه، ضابطه‌ی مربوطه به‌کار برده می‌شود.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

در تابع $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\geq 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$ ، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $f(\sqrt{2})$ ب) $f(f(1))$

پاسخ

عدد $\sqrt{2}$ در محدوده‌ی $x\geq 0$ قرار دارد، بنابراین طبق ضابطه‌ی اول:

$$f(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2=-2$$

به روش مشابه، چون $f(1)=-1$ است، در نتیجه:

$$f(f(1))=f(-1)=-1+1=0$$

مثال: تابع قطعه‌ای (چند ضابطه‌ای) زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^2 & -1\leq x\leq 1 \\ -2 & x<-2 \end{cases}$$

الف) مقادیر $f(2)$ و $f(-\frac{1}{2})$ را حساب کنید. ب) نمودار تابع را رسم کنید.

پاسخ

الف) عدد ۲ در محدوده‌ی $x>1$ از دامنه قرار دارد و بنابراین در ضابطه‌ی اول قرار می‌گیرد. عدد $-\frac{1}{2}$ در ضابطه‌ی دوم:

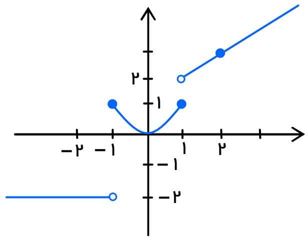
$$f(2)=2+1=3 \quad \text{و} \quad f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

ب) برای $x<-2$ نمودار نیم‌خط افقی $y=-2$ است. برای $-1\le x\le 1$ و $x>1$ با نقطه گذاری، قطعه سهمی و نیم‌خط رسم می‌شود:

$$x>1 \xrightarrow{y=x+1} \begin{cases} x=1 \to y=1+1=2 \Rightarrow (1,2) \\ x=2 \to y=2+1=3 \Rightarrow (2,3) \end{cases}$$

(البته: چون $x=1$ در دامنه‌ی $x>1$ نیست، نقطه‌ی $(1,2)$ توخالی رسم می‌شود.)

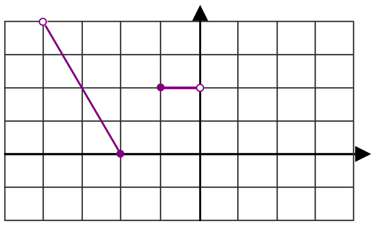
$$-1\le x\le 1 \xrightarrow{y=x^2} \begin{cases} x=-1 \to y=1 \Rightarrow (-1,1) \\ x=0 \to y=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=1 \to y=1 \Rightarrow (1,1) \end{cases}$$



مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

ضابطه و نمودار تابع با اطلاعات و نمودار داده شده را کامل کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\ge 0 \\ 2 & .... \\ .... & -4<x\le -2 \end{cases}$$



پاسخ

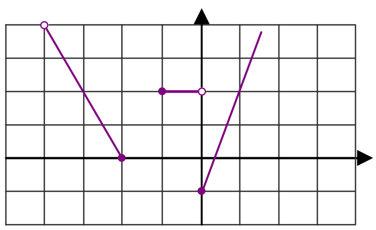
با نگاه به نمودار، ضابطه‌ی وسط مربوط به $-1\le x<0$ است.

برای $x\ge 0$ توسط $x=0$ و $x=1$، دو نقطه $(0,-1)$ و $(1,2)$ تعیین شده و نیم‌خطی در سمت راست محور عرض رسم می‌شود.

برای محدوده‌ی $-4<x\le -2$ توسط دو نقطه‌ی $(-4,4)$ و $(-2,0)$ معادله‌ی مربوط نوشته می‌شود:

$$y-0=\frac{4-0}{-4+2}(x+2) \Rightarrow y=-2x-4$$

اکنون جواب کامل شده است:

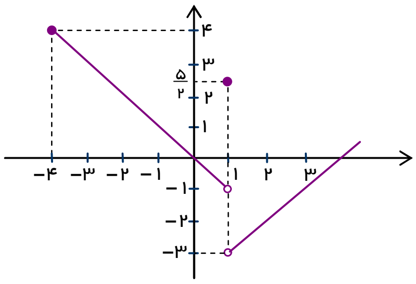


$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\ge 0 \\ 2 & -1\le x<0 \\ -2x-4 & -4<x\le -2 \end{cases}$$

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید:

$$g(x)=\begin{cases} x-۴ & x>۱ \\ \frac{۵}{۲} & x=۱ \\ -x & -۴\le x<۱ \end{cases}$$

پاسخ



برای $x>۱$ باید نیم‌خط $y=x-۴$ و برای $-۴\le x<۱$ باید طبق $y=-x$ یک پاره‌خط رسم شود. این کار با مختصات دو نقطه از دامنه‌ی هر یک به آسانی انجام می‌شود:

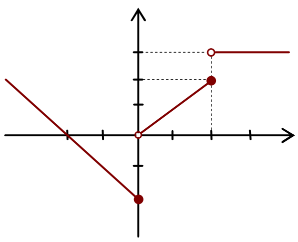
با توجه به نمودار:

$$D_g=[-۴,+\infty) \quad و \quad R_g=(-۳,+\infty)$$

توجه کنید:

شاخه‌ی سمت راست نمودار به سمت بالا تا بی‌نهایت ادامه دارد.

مثال: ضابطه‌ی مربوط به نمودار مقابل را بنویسید.



پاسخ

قطعه‌ی سمت راست، تابع ثابت است، معادله‌ی دو قطعه‌ی دیگر را می‌توانید توسط نوشتن معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه بنویسید. نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x)=\begin{cases} ۳ & x>۲ \\ x & ۰<x\le ۲ \\ -x-۲ & x\le ۰ \end{cases}$$

---

۳ تابع قدرمطلق

تابع مهم دیگری در این بخش بررسی می‌شود:

قدرمطلق:

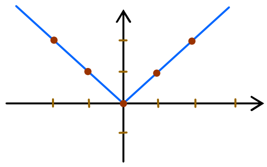
قدر مطلق یک عدد دلخواه x را با نماد $|x|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

به عبارت دیگر، قدر مطلق، یک **عدد منفی را قرینه (و مثبت) می‌کند**، ولی: **روی سایر اعداد تأثیری ندارد.**

بعلاوه:

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ را تابع قدرمطلق نامیده و با جدول برخی نقاط، نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:



x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

توجه کنید:

نمودار این تابع، نیمسازهای نواحی اول و دوم است.

تبدیل تابع با ضابطه‌ی قدرمطلق به یک تابع دو ضابطه‌ای، به رسم نمودارهای بیشتری کمک می‌کند.

مثال: نمودار تابع $y=|2x-4|$ را رسم کنید.

پاسخ

ضابطه را دقیقاً با دو شرط منفی بودن یا نبودنِ عبارت داخل قدرمطلق، با دو ضابطه می‌نویسیم:

$$y=|2x-4|=\begin{cases} 2x-4 & 2x-4\geq 0 \\ -(2x-4) & 2x-4<0 \end{cases}$$

نامعادلات سمت راست را حل می‌کنیم تا دامنه‌ی هر ضابطه دقیقاً مشخص شود:

$$y=\begin{cases} 2x-4 & x\geq 2 \\ -2x+4 & x<2 \end{cases}$$

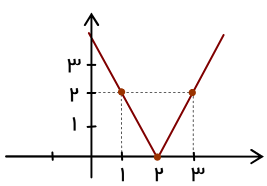
اکنون برای دامنه‌ی $x\geq 2$ قطعه‌ای از خط $y=2x-4$ و برای دامنه‌ی $x<2$ قطعه‌ای از خط $y=-2x+4$ را توسط مختصات دو نقطه در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$y=-2x+4,\quad x<2$

x	1	2
y	2	0

$y=2x-4,\quad x\geq 2$

x	2	3
y	0	2



$y=|2x-4|$

0912 172 0728
@alireza_karbalaie

مثال: نمودار تابع $y=|x|-2$ را رسم کنید.

پاسخ

به جدول مقادیر هر دوی توابع $y=|x|$ و $y=|x|-2$ توجه کنید:

$y=|x|-2$

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۰	−۱	−۲	−۱	۰

$y=|x|$

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۲	۱	۰	۱	۲

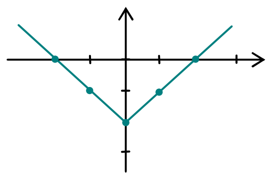
در مقایسه‌ی راست با چپ مشاهده می‌کنید که:

طول نقاط تغییر نکرده و فقط عرض نقاط در تابع $y=|x|-2$، دو واحد کمتر شده است.

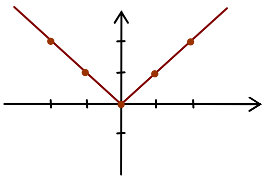
دلیل این است که:

تابع $y=|x|$ به $y=|x|-2$ تبدیل شده؛ یعنی مقدار y دقیقاً ۲ واحد کوچک‌تر شده است.

بنابراین نمودار دو تابع فقط از لحاظ عمودی ۲ واحد اختلاف دارند:



$y=|x|-2$



$y=|x|$

نتیجه:

نمودار $y=|x|$ را در نظر بگیرید.

- اگر از $|x|$ عددی کم شود، مانند $y=|x|-2$، نمودار را به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت پایین حرکت می‌دهیم.
- اگر $|x|$ با عددی جمع شود، مانند $y=|x|+3$، نمودار را به اندازه‌ی ۳ واحد به سمت بالا حرکت می‌دهیم.

بعلاوه؛

این روش را می‌توانید در مورد منحنی‌هایی چون $y=x^2-1$ و $y=x^2+2$ نیز با استفاده از سهمی $y=x^2$ نیز به‌کار ببرید.

دو قاعده‌ی بعدی در تبدیل نمودار را هم (بدون دلیل!) پذیرفته و به‌کار ببرید:

جابجایی افقی نمودار:

اگر در ضابطه، از x مقداری کم شود؛ مانند: $y=|x-۲|$ ، باید نمودار $y=|x|$ را ۲ واحد به راست انتقال دهید.

توجه کنید:

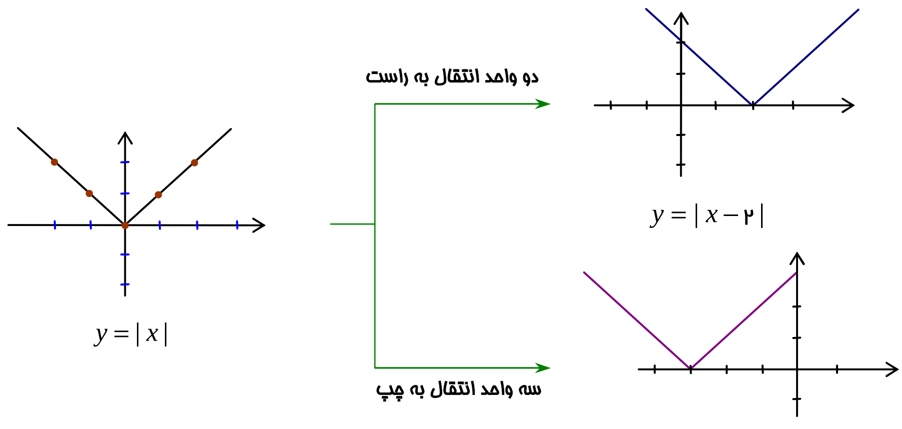
در تغییر $y=|x|$ به $y=|x-۲|$ ، می‌بینید که x به $x-۲$ تبدیل یافته است.

به صورت مشابه:

اگر بخواهیم نمودار $y=|x+۲|$ را توسط نمودار $y=|x|$ رسم کنیم، می‌بینید که x به $x+۲$ تبدیل شده و قاعده‌ی رسم این است که:

نمودار $y=|x|$ را ۲ واحد به سمت چپ جابجا می‌کنیم.

رسم نمودارهای $y=|x-۲|$ و $y=|x+۳|$ را به روش بالا می‌بینید:



مثال: الف) نمودار تابع $y=-|x|$ را رسم و نمودار را توصیف کنید.

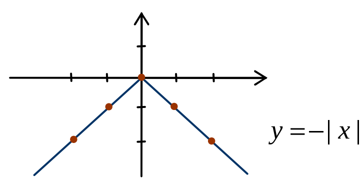
ب) با استفاده از قسمت قبل، نمودار تابع $y=-|x+۱|-۲$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

الف) با تشکیل جدول مقادیر، نمودار رسم می‌شود:

$y=-|x|$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۲	-۱	۰	-۱	-۲

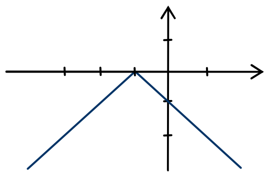


0912 172 0728 @alireza_karbalaie

چنان که می‌بینید:

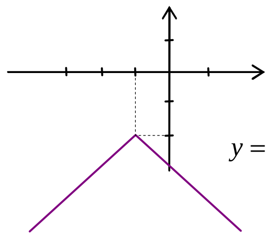
نمودار $y=|x|$ نسبت به محور طول قرینه شده تا نمودار $y=-|x|$ حاصل گردد. (چون $|x|$ که همان عرض نقاط نمودار است، قرینه شده است.)

ب) با شروع از نمودار $y=-|x|$، ابتدا $y=-|x+1|$ رسم می‌شود (یک واحد به چپ) و سپس $y=-|x+1|-2$ را رسم می‌کنیم (دو واحد به پایین):



$y=-|x+1|$

⇨



$y=-|x+1|-2$

چنان که می‌بینید:

دامنه‌ی این تابع تمام اعداد $\mathbb{R}$ و برد آن $y \le -2$ است.

------------✧------------

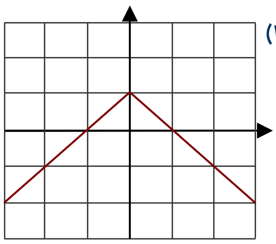
مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار تابع (الف) و کدام نمودار تابع (ب) را نشان می‌دهد؟

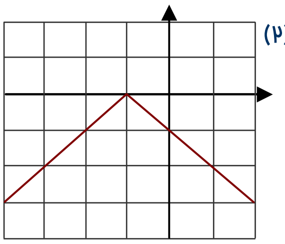
الف) $y=-|x|+1$

ب) $y=-|x+1|$

(۱)



(۲)



پاسخ

نمودار **(۱)** مربوط به **تابع (الف)** است، زیرا:

نمودار $y=-|x|$ یک واحد به بالا منتقل شده است.

در نمودار **(۲)**، می‌بینید که نمودار $y=-|x|$ یک واحد به چپ منتقل شده؛ یعنی: $y=-|x+1|$.

------------✧------------

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،

می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

با بررسی بیشتر تابع ثابت $y=k$ (که k یک عدد است)، آغاز می‌کنیم.

اگر $f=\{(۳,a),(۴,b),(-۱,۶),(۱,c)\}$ یک تابع ثابت باشد، واریانس عددهای a، b و c کدام است؟

❶ ۰ ❷ $\sqrt{۶}$ ❸ $۶\sqrt{۶}$ ❹ ۶

گزینه ۱

چون تابع ثابت است، هر سه عدد a، b و c یکسان (برابر ۶) هستند و؛

می‌دانیم اگر داده‌ها برابر باشند، واریانس آن‌ها برابر صفر است.

توجه کنید:

در تابع ثابت مانند $f(x)=k$ ؛

اگر تابع روی هر عدد یا عبارتی اثر کند، حاصل همیشه برابر k است.

مانند:

$$f(-۲)=k \ , \ f(\frac{x-۵}{۳})=k \ , \ f(۲x^۲+۱۱)=k \ , \ f(k)=k$$

در تابع ثابت f ، اگر $f(۲x^۲+۱)=۲f(x^۲)+۱$ باشد، در این صورت حاصل $f(x)+f(x^۳)$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ -۱ ❸ ۲ ❹ -۲

گزینه ۴

بگیرید: $f(x)=k$. بنابراین:

$$f(۲x^۲+۱)=۲f(x^۲)+۱ \ \rightarrow \ k=۲k+۱ \ \Rightarrow \ k=-۱$$

پس:

$$f(x)+f(x^۳)=k+k=۲k=-۲$$

اگر f تابعی ثابت باشد و $f(۲)\times f(-۱)=\frac{۳f(۲)+۲}{۲}$ ، حاصل $f(-۱)$ کدام می‌تواند باشد؟

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

❶ ۱ ❷ -۱ ❸ $-\frac{۱}{۲}$ ❹ $\frac{۱}{۲}$

گزینه ۳

مشابه پاسخ تست قبل:

$$k\times k=\frac{۳k+۲}{۲}\ \rightarrow\ ۲k^۲=۳k+۲\ \rightarrow\ ۲k^۲-۳k-۲=۰\ \xrightarrow{\Delta=۹+۱۶=۲۵}$$

$$\rightarrow\ k_۱,k_۲=\frac{۳\pm ۵}{۴}\ \Rightarrow\ k_۱,k_۲=۲,-\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ f(-۱)=۲,-\frac{۱}{۲}$$

در تابع ثابت f، اگر $(f(۲))^۲+۵f(\sqrt{۲})=۳۶$ و $۴f(-۱)=(f(۳))^۲$ باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۸ ❸ $\sqrt{۶}$ ❹ -۹

گزینه ۱

مشابه قبل باید داشته باشیم:

$$k^۲+۵k=۳۶ \quad \text{و} \quad ۴k=k^۲$$

معادله‌ی سمت راست با فاکتورگیری، جواب‌های $k=۰$ و $k=۴$ دارد و معادله‌ی سمت چپ با تجزیه، جواب‌های $k=-۹$ و $k=۴$ خواهد داشت. فقط $k=۴$ در هر دو مشترک است و قابل قبول، در نتیجه:

$$f(-۱)=k=۴$$

تابع f، تابع ثابت و برای $m,n\in \mathbb{N}$ داریم $f(m)+f(n)=f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(۲n^۲-۷n+۱,-f(m))$ و $(m^۲-۴m+۶,nf(n))$ روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم باشند، مقدار $\left[\frac{mn}{۵}\right]$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

❶ ۲ ❷ ۳ ❸ ۱ ❹ ۴

گزینه ۱

اگر تابع ثابت را $f(x)=k$ بگیریم، باید $k+k=kk\ \Rightarrow\ k^۲=۲k$ و در نتیجه $k=۲$ است. پس $f(x)=۲$ بوده و زوج‌ها به صورت $(۲n^۲-۷n+۱,-۲)$ و $(m^۲-۴m+۶,۲n)$ باید روی نیمساز (یعنی: خط $y=x$) باشند. جایگذاری اولین زوج در معادله‌ی خط:

$$۲n^۲-۷n+۱=-۲\ \rightarrow\ ۲n^۲-۷n+۳=۰\ \xrightarrow{\Delta=۲۵}\ n=\frac{۷+۵}{۴}=۳$$

پس نقطه‌ی دوم به صورت $(m^۲-۴m+۶,۶)$ نیز باید روی خط قرار داشته باشد:

$$m^۲-۴m+۶=۶\ \rightarrow\ m^۲-۴m=۰\ \xrightarrow{\div m}\ m=۴\ \Rightarrow\ \left[\frac{mn}{۵}\right]=[\frac{۱۲}{۵}]=[۲/۴]=۲$$

نکته ۱

برخی خواص تابع ثابت:

- دامنه هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد،

ولی برد همیشه فقط یک عضو دارد.

- نمودار آن یا یک خط افقی است و یا نقاطی که باید روی یک خط افقی باشند.
- اگر ضابطه به صورت یک عبارت بر حسب x داده شود، باید ضریب تمام جملات x، x^2 و ... صفر بوده و فقط عدد ثابت باقی می‌ماند. برای نمونه؛

اگر $f(x)=(a-1)x^3+bx+c$ به عنوان یک تابع ثابت داده شده باشد، باید $a-1=0\ ,\ b=0$ بوده و ضابطه فقط به صورت $f(x)=c$ خواهد بود.

دامنه‌ی تابع ثابت $f=\{(1,a+b),(2a+1,5),(2b-1,a-b)\}$ کدام است؟

❶ $\{-1,1,11\}$ ❷ $\{-1,1\}$ ❸ $\{9,1,11\}$ ❹ $\{5,1\}$

گزینه ۱

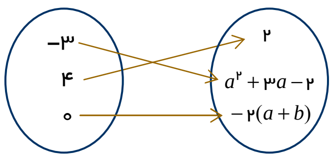
چون تابع ثابت است، باید:

$$a+b=5 \quad و \quad a-b=5$$

از حل دستگاه (جمع طرفین معادلات) مقادیر $a=5$ و $b=0$ حاصل شده و با جایگذاری خواهیم داشت:

$$f=\{(1,5),(11,5),(-1,5)\} \Rightarrow D_f=\{-1,1,11\}$$

در تابع ثابت زیر، حاصل $a-b$ کدام می‌تواند باشد؟



❶ -7
❷ 1
❸ 2
❹ -3

گزینه ۱

باید مقادیر برد یکسان (برابر ۲) باشند:

$$a^2+3a-2=2 \rightarrow a^2+3a-4=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\dfrac{c}{a}=-4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-2a-2b=2} \begin{cases} a=1: & -2-2b=2 \rightarrow b=-2 \\ a=-4: & 8-2b=2 \rightarrow b=3 \end{cases}$$

دو حالت باید در نظر گرفت:

$a=1$ و $b=-2$: در این‌صورت $a-b=1+2=3$ خواهد شد. (قابل قبول، ولی در گزینه‌ها نیست.)

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

$a=-۴$ و $b=۳$: در این‌صورت $a-b=-۴-۳=-۷$ خواهد شد. (قابل قبول و جواب تست.)

کدام یک تابع ثابت است؟ (دامنه‌ی f و g برابر $\mathbb{R}$ و دامنه‌ی h و k برابر $\mathbb{N}$ است.)

❶ $f(x)=۲-x^{۲}$
❷ $g(x)=۲x+۵$
❸ $h(x)=\frac{۱-۲x}{۴x-۲}$
❹ $k(x)=\frac{۲-x}{۲x+۴}$

گزینه ۳

فقط در تابع h مقدار تابع همیشه عددی ثابت است:

$$h(x)=\frac{۱-۲x}{۴x-۲}=\frac{-(۲x-۱)}{۲(۲x-۱)}\xrightarrow{۲x-۱\neq ۰}h(x)=\frac{-۱}{۲}$$

به بررسی بیشتر تابع همانی $y=x$ (یا: $f(x)=x$) می‌پردازیم.

اگر f تابع ثابت، g تابع همانی و $\frac{f(-۱)g(۵)-g(۲)}{f(۱)-g(۱)}=۲g(۳)$ باشد، مقدار $f(۵)$ کدام است؟

❶ ۵
❷ ۴
❸ ۳
❹ -۲

گزینه ۲

قرار دهید: $f(x)=k$، چون $g(x)$ همان x است:

$$\frac{k\times ۵-۲}{k-۱}=۲\times ۳\rightarrow ۶k-۶=۵k-۲\rightarrow k=۴\Rightarrow f(۵)=۴$$

نکته ۲

برخی خواص تابع همانی:

- دامنه هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد، و:

برد همیشه با دامنه یکسان است.

- اگر دامنه را کل اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بگیریم، نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) است و در حالات دیگر، نمودار نقاطی است که باید روی خط $y=x$ واقع باشند.
- اگر ضابطه به صورت یک عبارت بر حسب x داده شود، باید تمام جملات صفر باشند و فقط ضریب عدد x یک باشد. برای نمونه؛

اگر $f(x)=(a-۱)x^{۳}+bx+c$ به عنوان یک تابع همانی داده شده باشد، باید $b=۱$ بوده و $a-۱=۰$ و $c=۰$ باشند تا ضابطه به صورت $f(x)=x$ تبدیل شود.

توجه کنید:

تابع همانی دامنه و برد یکسان دارد، ولی عکس این مطلب نادرست است. مانند تابع زیر با دامنه و برد برابر، ولی غیر همانی:

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

$$g=\{(۲,۳),(-۲,۱),(۱,-۲),(۳,۲)\}$$

اگر $f(x)=(۲a+۱)x^۳+(b+۲)x^۲+(c+۱)x$ تابع همانی باشد، مقدار $f(a)+f(b)+f(c)$ کدام است؟

❶ $۲/۵$ ❷ $-۲/۵$ ❸ $۳/۵$ ❹ $-۳/۵$

گزینه ۴

طبق نکته‌ی بالا باید:

- ضرایب $x^۳$ و $x^۲$ صفر شوند:

$$۲a+۱=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \quad و \quad b+۲=۰ \Rightarrow b=-۲$$

- ضریب x برابر ۱ باشد:

$$c+۱=۰ \Rightarrow c=-۱$$

اکنون:

$$f(a)+f(b)+f(c)=a+b+c=-\frac{۱}{۲}-۲-۱=-۳/۵$$

اگر $f(x)=\dfrac{x-b-۴}{ax+۱}$ تابع همانی باشد، مقدار $a^۲-۳b$ کدام است؟

❶ ۱۲ ❷ ۶ ❸ -۶ ❹ -۱۲

گزینه ۱

برای این‌که ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x-b-۴}{ax+۱}$ باید:

$$f(x)=\frac{x\overbrace{-b-۴}^{۰}}{\underbrace{a}_{۰}x+۱}=\frac{x+۰}{۰+۱}=\frac{x}{۱} \Rightarrow f(x)=x$$

پس: $a=۰$ و همچنین: $(-b-۴=۰ \Rightarrow b=-۴)$. در نتیجه:

$$a^۲-۳b=۰^۲-۳(-۴)=۱۲$$

برای برخی مقادیر x، زوج مرتب $(f(x)+f(-x),۳x^۲-۱۷x+۱۰)$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ $\frac{۷}{۳}$ ❷ $\frac{۱۰}{۳}$ ❸ $\frac{۱۳}{۳}$ ❹ $\frac{۱۷}{۳}$

گزینه ۳

با توجه به همانی بودن تابع، $f(x)+f(-x)=x-x=۰$ بوده و در نتیجه زوج مرتب $(۰,۳x^۲-۱۷x+۱۰)$ است. نیمساز ربع دوم به صورت $y=-x$ است و چون زوج مرتب روی آن است:

$$۳x^۲-۱۷x+۱۰=-۰=۰ \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳} x=\frac{۱۷\pm ۱۳}{۲(۳)}=\begin{cases}\frac{۳۰}{۶}=۵\\ \frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

اختلاف مقادیر $\frac{۱۳}{۳}=۵-\frac{۲}{۳}$ خواهد شد.

نکته ۳

مختصات هر نقطه روی نمودار تابع همانی باید در معادله‌ی $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) صدق کند.

یعنی:

باید طول و عرض نقطه برابر باشند.

اگر نقطه‌ی $(۳-k, ۵+۲k)$ روی نیمساز نواحی اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار k کدام است؟

❶ $\frac{۳}{۲}$ ❷ $-\frac{۳}{۲}$ ❸ $\frac{۲}{۳}$ ❹ $-\frac{۲}{۳}$

گزینه ۴

$$۳-k=۵+۲k \to -k-۲k=۵-۳ \to -۳k=۲ \Rightarrow k=-\frac{۲}{۳}$$

اگر نمودار تابع $f=\{(b,-۳a+۲),(۶a^۲-a-۲,-۱),(\frac{۴}{۹},(a+۱)^۲)\}$ روی نیمساز نواحی اول و سوم واقع باشد، b کدام است؟

❶ ۳ ❷ -۱ ❸ ۷ ❹ -۲

گزینه ۱

طبق مختصات دو نقطه‌ی دوم و سوم باید:

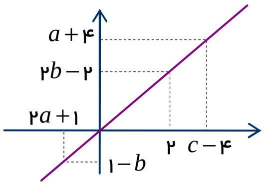
- $۶a^۲-a-۲=-۱ \to ۶a^۲-a-۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۱+۲۴=۲۵} a_۱, a_۲=\frac{۱\pm ۵}{۲(۶)} \Rightarrow a_۱, a_۲=\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}$
- $(a+۱)^۲=\frac{۴}{۹} \to a+۱=\pm\frac{۲}{۳} \to \begin{cases} a+۱=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}\\ a+۱=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=-\frac{۵}{۳}\end{cases}$

فقط $a=-\frac{۱}{۳}$ شرط قرار داشتن هر دو نقطه روی نیمساز را برآورده کرده و مورد قبول است. جایگذاری در نقطه‌ی اول:

$$b=-۳a+۲=-۳(-\frac{۱}{۳})+۲=۱+۲=۳$$

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

نمودار مقابل یک تابع همانی را نشان می‌دهد. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



❶ ۲
❷ ۸
❸ ۶
❹ ۴

گزینه ۲

از نقطه‌ی وسط نمودار شروع کرده و سپس نکته‌ی قبل را برای دو نقطه‌ی دیگر استفاده می‌کنیم:

$$۲b-۲=۲ \rightarrow ۲b=۴ \Rightarrow b=۲$$

$$۲a+۱=۱-۲ \rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱ \quad \text{و} \quad -۱+۴=c-۴ \Rightarrow c=۷$$

در نتیجه:

$$a+b+c=-۱+۲+۷=۸$$

بررسی بیشتری از توابع چند ضابطه‌ای در ادامه:

در تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\le ۰ \\ -۳ & ۰<x\le ۲ \\ ۲x^۲ & x>۲ \end{cases}$ ، حاصل عبارت $f(-۳)+f(\sqrt{۵})-f(\sqrt{۲})f(۳)$ کدام است؟

❶ $۱۸\sqrt{۲}$ ❷ $-۱۸\sqrt{۲}$ ❸ ۵۴ ❹ -۱۰۸

گزینه ۳

توجه کنید که: عدد $\sqrt{۲}\cong ۱/۴$ در محدوده‌ی $۰<x\le ۲$ و عدد $\sqrt{۵}\cong ۲/۲$ در محدوده‌ی $x>۲$ قرار دارد، پس:

$$f(-۳)+f(\sqrt{۵})-f(\sqrt{۲})\times f(۳)=۳(-۳)-۱+۲(\sqrt{۵})^۲-(-۳)(۲(۳)^۲)$$

$$=-۹-۱+۲(۵)+۳(۲\times ۹)=-۱۰+۱۰+۵۴=۵۴$$

اگر $f(x)=\begin{cases} -x-\frac{b}{۲} & x<-۲ \\ b-a & -۲\le x<۳ \\ ۲x-a & x\ge ۳ \end{cases}$ و $f(-۴)=f(۴)=۱$ باشد، حاصل $f(-\sqrt{۳})-f(\sqrt{۲})$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ -۱ ❸ ۲ ❹ -۲

گزینه ۱

ابتدا مقادیر a و b را مشخص می‌کنیم:

$$f(-۴)=۱ \rightarrow -(-۴)-\frac{b}{۲}=۱ \rightarrow ۴-۱=\frac{b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} b=۶$$

$$f(۴)=۱ \rightarrow ۲(۴)-a=۱ \rightarrow ۸-۱=a \longrightarrow a=۷$$

پس ضابطه به صورت $f(x)=\begin{cases} -x-3 & x<-2 \\ -1 & -2\le x<3 \\ 2x-7 & x\ge 3 \end{cases}$ بوده و در نتیجه:

$$f(\underbrace{-\sqrt{3}}_{\cong -1/7})-f(\underbrace{\sqrt{2}}_{\cong 1/4})=-1-(-1)=0$$

نکته ۴

برخی خواص توابع چندضابطه‌ای:

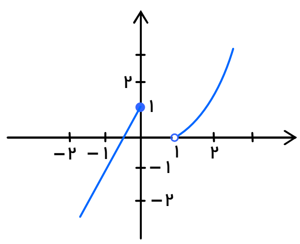
- دامنه متشکل از تمام اعدادی است که در چند بخش در سمت راست ضابطه داده شده؛ نمونه:
  دامنه‌ی تابع $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & x>2 \\ 2x+1 & x\le 0 \end{cases}$ متشکل از تمام عددهای $x\le 0$ و $x>2$ است.
- برد تابع را می‌توانید در حالت کلی با رسم نمودار مشخص کنید. (معمولاً با قدری دقت در ضابطه‌ها و دامنه‌های مربوطه هم، برد فهمیده می‌شود.)

در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 1 \\ 2x+1 & x\le 0 \end{cases}$ کدام مورد نادرست است؟

1) $f(1)+f(-1)=-1$
2) مقدار $f(0/9)$ تعریف نشده است.
3) نمودار تابع محور طول‌ها را در سه نقطه قطع می‌کند.
4) برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

گزینه ۳

درست بودن موارد اول و دوم به سادگی چک می‌شود. برای انتخاب بین دو گزینه‌ی باقی‌مانده، باید نمودار تقریبی تابع را مانند نمونه‌های بخش‌های قبل رسم کنیم:



اکنون می‌بینید:

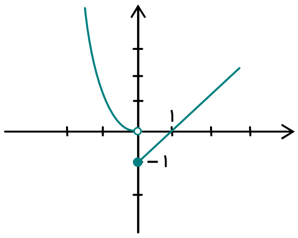
برد تابع برابر $\mathbb{R}$ هست ولی، نمودار محور طول را فقط در یک نقطه قطع کرده است.

برد تابع $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\ge 0 \\ x^2 & x<0 \end{cases}$ کدام است؟

1) $\mathbb{R}$
2) $y\ge -1$
3) $y\ge 0$
4) $-1\le y\le 0$

گزینه ۲

رسم تقریبی نمودار مانند تست قبل:



می‌بینید:

تمام نقاط از ۱- به بالا روی محور عرض، توسط نمودار پوشش داده شده‌اند.

نکته ۵

برخورد نمودارها:

دو روش برای تعیین نقاط برخورد نمودارهای دو تابع f و g وجود دارد:

❖ **روش اول:**

هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم کرده تا جواب تعیین شود. (بویژه، با استفاده از روش‌های سریع رسم نمودار که در ادامه آورده‌ایم.)

❖ **روش دوم:**

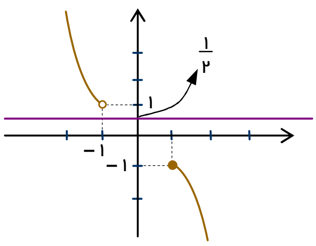
معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم. (جواب‌های حاصل با توجه به دامنه‌های دو تابع پذیرفته یا رد می‌شوند.)

نمودار توابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & x\geq ۱\\ x^{۲} & x<-۱\end{cases}$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

گزینه ۱

نمودار f دو قطعه سهمی و نمودار g خطی افقی است:



هیچ نقطه‌ی برخوردی نیست.

روش دوم:

معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را با توجه به دامنه‌ها، در دو حالت $x\geq ۱$ و $x<-۱$ حل می‌کنیم:

$$x\geq ۱:\quad f(x)=g(x)\to -x^{۲}=\frac{۱}{۲}\to x^{۲}=-\frac{۱}{۲}\quad \text{غیر ممکن}$$

$$x<-۱:\quad f(x)=g(x)\to x^{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cong\pm\frac{۱}{۱/۴}=\pm ۰/۷$$

جواب‌های حالت دوم غیر قابل قبول‌اند، چون در محدوده‌ی $x<-۱$ قرار ندارند.

نمودار $y=x^{۲}+۶x+۵$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y=|x|$ نامنفی باشد؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ ۲ ❷ ۳ ❸ ۴ ❹ ۵

گزینه ۴

سهمی را به صورت $y=x^{۲}+۶x+۹-۴=(x+۳)^{۲}-۴$ نوشته،یعنی: سهمی با رأس $(-۳,-۴)$ و هر دو نمودار را در دستگاه مختصات رسم می کنیم:

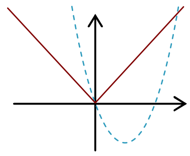
توجه:

محل برخورد سهمی با محور طول از حل معادلهی $y=۰$ به روش تجزیه:

$$x^{۲}+۶x+۵=(x+۱)(x+۵)=۰ \Rightarrow x=-۱,\ x=-۵$$

اکنون واضح است:

نمودار سهمی باید لااقل ۵ واحد به راست منتقل شود:



-----------◈-----------

دو تابع با ضابطههای $f(x)=x^{۲}-۲x-۲$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$ در نقطهای با کدام طول مشترک‌اند؟ (کنکور ۱۳۹۹)

❶ $۱-\sqrt{۲}$ و ۳ ❷ $۱+\sqrt{۲}$ و -۱ ❸ $۱-\sqrt{۲}$ و -۱ ❹ $۱+\sqrt{۲}$ و ۳

گزینه ۱

طبق روش دوم بالا:

معادلهی $f(x)=g(x)$ را با توجه به وجود قدرمطلق، در دو حالت $x>۰$ و $x<۰$ حل می‌کنیم:

$$x>۰:\ \rightarrow |x|=x \rightarrow x^{۲}-۲x-۲=\frac{x}{x} \rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱,\ x=-\frac{c}{a}=۳$$

فقط ۳ در محدودهی $x>۰$ قرار داشته و قابل قبول است.

$$x<۰:\ \rightarrow |x|=-x \rightarrow x^{۲}-۲x-۲=\frac{-x}{x} \rightarrow x^{۲}-۲x-۱=۰$$

به روش دلتا داریم: $\Delta=۸$ و جواب‌ها به صورت $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$ به‌دست خواهند آمد. فقط $۱-\sqrt{۲}\cong ۱-۱/۴=-۰/۴$ در محدودهی $x<۰$ قرار داشته و قابل قبول است.

-----------◈-----------

با محاسبهی مقادیر تابع قدرمطلق در برخی موارد ادامه می‌دهیم.

رادیکال‌های تقریبی:

الف) چند مقدار تقریبی رادیکالی که ممکن است مورد نیاز باشند:

$$\sqrt{۲}\cong ۱/۴,\ \sqrt{۳}\cong ۱/۷,\ \sqrt{۴}=۲,\ \sqrt{۵}\cong ۲/۲,\ \sqrt{۶}\cong ۲/۴,\ \sqrt{۷}\cong ۲/۶,\ \sqrt{۸}\cong ۲/۸,\ \sqrt{۹}=۳$$

ب) مقادیر تقریبی عددهایی چون $\sqrt{۱۵}$ و $\sqrt{۱۷}$: چون $\sqrt{۱۶}=۴$ است، $\sqrt{۱۵}$ را مقداری کمتر مانند ۳/۹ و $\sqrt{۱۷}$ را مقداری بیشتر مانند ۴/۱ بگیرید.

اگر $f(x)=|۲x-۳|$ باشد، مقدار $f(\sqrt{۲}+۱)+f(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ $۴-\sqrt{۲}$ ❸ $۳+\sqrt{۲}$ ❹ ۳

گزینه ۱

$$f(\sqrt{۲}+۱)=|۲(\sqrt{۲}+۱)-۳|=|\underbrace{۲\sqrt{۲}-۱}_{>۰}|=۲\sqrt{۲}-۱$$ $(۲\sqrt{۲}-۱\cong ۲\times ۱/۴-۱=۱/۸)$

$$f(\sqrt{۲}-۱)=|۲(\sqrt{۲}-۱)-۳|=|\underbrace{۲\sqrt{۲}-۵}_{<۰}|=-(۲\sqrt{۲}-۵)=-۲\sqrt{۲}+۵$$ $(۲\sqrt{۲}-۵\cong ۲\times ۱/۴-۵=-۲/۲)$

در نتیجه:

$$f(\sqrt{۲}+۱)+f(\sqrt{۲}-۱)=۲\sqrt{۲}-۱-۲\sqrt{۲}+۵=۴$$

روش گسترده نویسی تابع قدرمطلق را قبلاً دیده‌ایم:

تابع $y=۲|x-۳|+۱$ را به صورت $\begin{cases} ax+b & x\ge ۳ \\ cx+d & x<۳ \end{cases}$ نوشته‌ایم. حاصل $a+b-c-d$ کدام است؟

❶ ۸ ❷ -۸ ❸ -۶ ❹ ۶

گزینه ۲

ریشه‌ی داخل قدرمطلق عدد ۳ است و، برای $x<۳$ داخل قدرمطلق منفی و برای $x\ge ۳$ داخل قدرمطلق نامنفی است. بنابراین:

$$y=۲|x-۳|+۱=\begin{cases} ۲(x-۳)+۱ & x\ge ۳ \\ -۲(x-۳)+۱ & x<۳ \end{cases}=\begin{cases} ۲x-۵ & x\ge ۳ \\ -۲x+۷ & x<۳ \end{cases}$$

یعنی: $a=۲$، $b=-۵$، $c=-۲$ و $d=۷$ بوده‌اند، پس:

$$a+b-c-d=۲-۵+۲-۷=-۸$$

در انتها، به بررسی برخی روش‌های سریع رسم نمودار می‌پردازیم.

نکته ۶

جابجایی افقی نمودار:

تابع $f(x)$ با نمودار شناخته شده‌ی آن را در نظر بگیرید.

❖ **انتقال به راست:**

اگر ضابطه $y=f(x-a)$ داده شود، نمودار به اندازه‌ی a به صورت افقی به سمت راست جابجا می‌شود.

❖ **انتقال به چپ:**

اگر ضابطه $y=f(x+a)$ داده شود، نمودار به اندازه‌ی a به صورت افقی به سمت چپ جابجا می‌شود.

نکته ۷

جابجایی عمودی نمودار:

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید.

❖ **انتقال به بالا:**

اگر ضابطه $y=f(x)+b$ داده شود، نمودار به اندازه‌ی b به صورت عمودی به سمت بالا جابجا می‌شود.

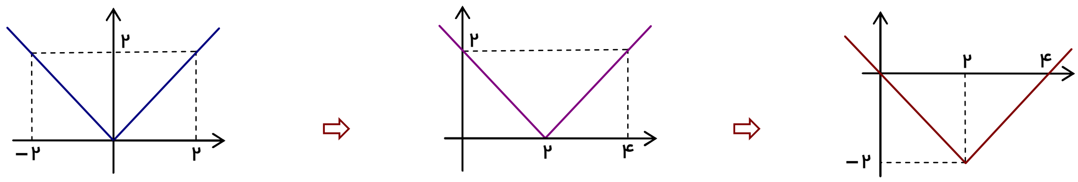
❖ **انتقال به پایین:**

اگر ضابطه $y=f(x)-b$ داده شود، نمودار به اندازه‌ی b به صورت عمودی به سمت پایین جابجا می‌شود.

مثال: نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۲$ را با انتقال مناسب نمودار $y=|x|$ رسم کرده و برد را مشخص کنید.

پاسخ

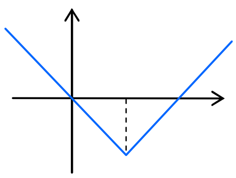
طبق قواعد مربوطه با دو مرحله انتقال:



$y=|x|$ ⇨ $y=|x-۲|$ (انتقال نقاط ۲ واحد به راست) ⇨ $y=|x-۲|-۲$ (انتقال نقاط ۲ واحد به پایین)

می‌بینید که برد مقادیر $y\geq -۲$ است.

شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۸)



❶ $y=-|x-۲|+۲$

❷ $y=x+۲|x|$

❸ $y=|x-۲|-۲$

❹ $y=۲x-|x|$

گزینه ۳

می‌بینید که شکل داده شده همان نمودار $y=|x|$ است که:

مقداری به راست انتقال یافته و سپس مقداری به پایین منتقل شده است.

فقط $y=|x-۲|-۲$ می‌تواند جواب باشد. (دقیقاً نمودار مثال قبل!)

0912 172 0728

@alireza_karbalaie

نکته ۸

تغییر عمودی نمودار:

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر k یک عدد باشد، در نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنید.

بویژه:

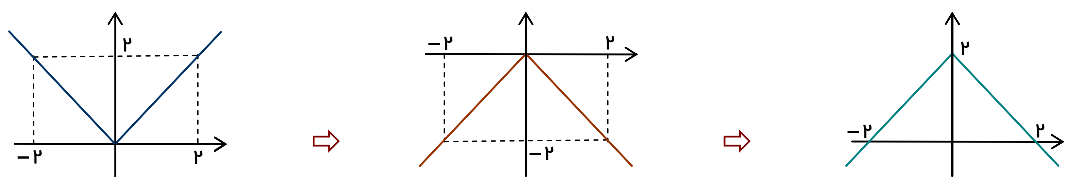
در رسم نمودار $y=-f(x)$، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور طول قرینه کنید!

مساحت محدود به نمودار $y=-|x|+۲$ و محور طول‌ها کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۴ ❹ $\frac{۱}{۲}$

گزینه ۳

با دو انتقال و به سادگی نمودار رسم می‌شود:



$y=|x|$ ⇨ $y=-|x|$ ⇨ $y=-|x|+۲$

می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$

برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}|۲x+۱|$ به کمک نمودار $y=|x|$، کدام مورد برای کامل کردن جمله‌ی زیر، مناسب است؟

«ابتدا نمودار تابع قدرمطلق را $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت . . . . . جابه‌جا کرده و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به محور . . . رسم می‌کنیم.»

(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ چپ- x ها ❷ راست- x ها ❸ بالا- y ها ❹ پایین- y ها

گزینه ۱

ابتدا ضابطه را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=-\frac{۱}{۲}|۲x+۱|=-\frac{۱}{۲}|۲(x+\frac{۱}{۲})|=-\frac{۱}{۲}\times۲|x+\frac{۱}{۲}|\Rightarrow\ y=-|x+\frac{۱}{۲}|$$

اکنون می‌توان گفت:

با توجه به وجود $x+\frac{۱}{۲}$ باید نمودار $\frac{۱}{۲}$ به چپ منتقل شده و به دلیل ضریب منفی، نمودار نسبت به محور طول قرینه شود.

نکته ۹

رسم سریع قدرمطلق:

برای رسم نمودار تابعی مانند $y=|۲x+۴|-۱$ دو کار ساده انجام دهید:

- ریشه‌ی داخل قدرمطلق را تعیین کرده و عرض نمودار را در آن مشخص کنید.

$$۲x+۴=۰ \rightarrow x=-۲ \xrightarrow{x=-۲} y=|-۴+۴|-۱=-۱ \Rightarrow (-۲,-۱)$$

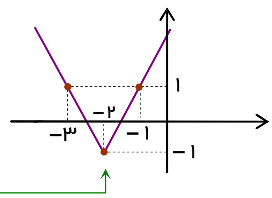
- یک عدد قبل و یک عدد بعد از ریشه در ضابطه جای x قرار داده و مختصات دو نقطه‌ی دیگر مشخص کنید.

آنگاه:

توسط سه نقطه، نمودار تابع رسم می‌شود. (نقطه‌ی اول: $(-۲,-۱)$ همان نقطه‌ی شکستگی نمودار است.)

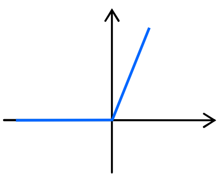
رسم نمودار $y=|۲x+۴|-۱$ به روش سریع را می‌بینید:

x	-۳	-۲	-۱
y	۱	-۱	۱



گاهی می‌توان برای مرتبط ساختن نمودار و ضابطه، از نقطه گذاری (به طور مناسب) کمک گرفت.

شکل روبرو نمودار کدام تابع است؟ (کنکور ۱۳۹۸)



❶ $y=x-|x|$

❷ $y=x+|x|$

❸ $y=|x-۱|-۱$

❹ $y=۱-|x-۱|$

گزینه ۲

با نگاه به نمودار:

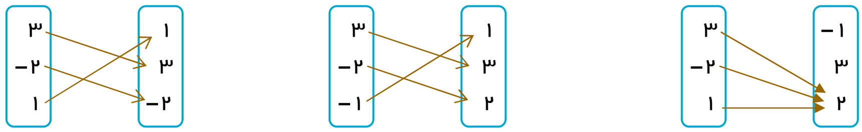
اگر به x عدد -۱ بدهیم، باید y صفر شود. (گزینه‌های اول، سوم و چهارم چنین نیستند و رد می‌شوند.)

توجه کنید:

روش عادی شامل رسم تقریبی هر گزینه است که به زمان بیشتری نیاز دارد.

تمرین

۱ الف) نوع هر تابع را مشخص کنید.



ب) اگر $f=\{(۲,b),(a,۴),(۲,a+b)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a+b$ را حساب کنید.

۲ جدول روبرو مربوط به یک تابع همانی است، مقدار $\dfrac{a+d}{b+c}$ را بیابید.

x	$۳a$	$a^۲-b$	$۷+\sqrt{b}$	$\sqrt{۲c}$
$f(x)$	۶	۳	c	d

۳ نمودار تابع ثابت $f(x)=۴x+n-۲mx$ از نقطه‌ی $(۳,-۵)$ عبور کرده است. حاصل $m^۲+n^۲$ را مشخص کنید.

۴ اگر f یک تابع همانی باشد و $f(۲k+۳)=k+۵$ ، در این صورت $f(\sqrt{۲})$ را بیابید.

۵ f تابع همانی، g تابع ثابت با برد $\{۳\}$ و $h(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۰ \\ -x-۱ & x<۰ \end{cases}$ است. مقدار عبارت $A=\dfrac{۲f(-۶)+g(-۱۰۰۰۰)}{h(\sqrt{۳})-h(-۴)}$ را بیابید.

۶ اگر f یک تابع همانی و $g(x)=f(۲x-۱)-۳x+۲$ باشد، مقدار $g(-۱)$ را حساب کنید.

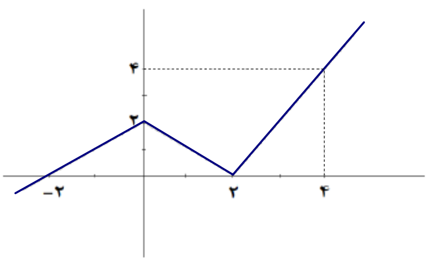
۷ نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) تابع $y=|x-۴|$.   ب) تابع $y=۲-|x|$.

۸ نمودار تابع روبرو را رسم کنید:

$$y=\begin{cases} x-۱ & x<۱ \\ ۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

۹ تابع روبرو را با چند ضابطه نوشته و دامنه و برد آن را مشخص کنید:



تمرینات منتخب کتاب

۱ کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ چرا؟

الف) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

ب) اگر دامنه‌ی یک تابع همانی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، آنگاه حاصل $f(x)+f(-x)$ همواره برابر صفر است.

پ) اگر f یک تابع ثابت باشد، آنگاه $f(kx)=kf(x)$ است.

۲ اطلاعات مربوط به هر تابع را کامل کرده و نمودار آن را رسم کنید:

الف) تابع $\begin{cases} f:A\longrightarrow B \\ f(x)=x^۲-۱ \end{cases}$ با $D_f=\{۲,-۱,-۲\}$ و $R_f=\{\quad,\quad,\quad\}$.

ب) تابع $\begin{cases} f:A\longrightarrow B \\ f(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$ با $D_f=\{\quad,\quad,\quad\}$ و $R_f=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۵}\}$.

پ) تابع خطی $f:A\longrightarrow B$ با $D_f=\{-\frac{۱}{۲},۰,۲\}$ و $R_f=\{-\frac{۳}{۲},۰,۶\}$.

۳ در تابع ثابت $f(x)=c$:

الف) مقادیر $f(a)$، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب) اگر در این تابع $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۴ اگر $f=\{(a,۱),(b,۲),(c,۵)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین عددهای a، b و c را به‌دست آورید.

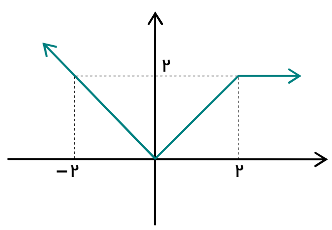
۵ در هر مورد زیر، مقدار $n\in\mathbb{N}$ را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی داده شده روی نیمساز نواحی اول و سوم واقع باشد.

الف) $(۲,n^۲-۳n+۴)$ ب) $(-۱,n^۲-۴n+۲)$

۶ اگر f یک تابع ثابت با دامنه‌ی دو عضوی و $m,n\in\mathbb{N}$ باشد، مقدار $m+t$ را بیابید.

$$f=\{(-۱,n^۲-۲n),(m-۴,۳),(m+n,t)\}$$

۷ ضابطه‌ی تابع مقابل را مشخص کنید:



0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۸ اگر هزینه‌ی توقفگاه خودرو در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

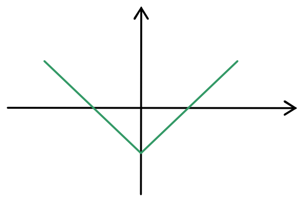
$$C(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\le x<۲ \\ x+۱ & ۲\le x<۱۰ \\ ۰ & ۱۰\le x\le ۱۲ \end{cases}$$

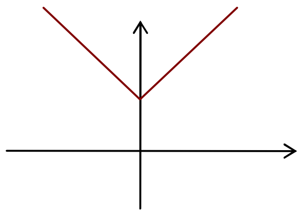
پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه‌ی توقف هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد روی محور عرض را معادل ۵۰۰ تومان بگیرید.)

۹ با توجه به نمودارهای زیر، مشخص کنید کدام ضابطه به کدام نمودار مربوط است.

الف) $y=|x|+۲$.

ب) تابع $y=|x|-۳$.

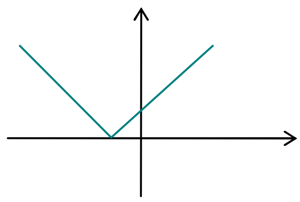


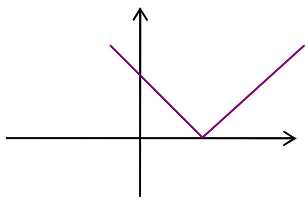


۱۰ مانند تمرین قبل عمل کنید.

الف) $y=|x+۱|$.

ب) تابع $y=|x-۴|$.

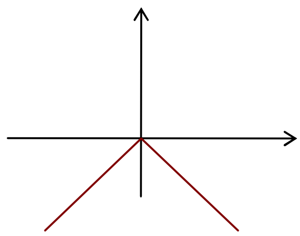


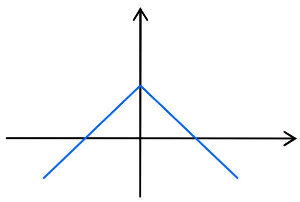


۱۱ مانند تمرین قبل عمل کنید.

الف) تابع $y=-|x|$.

ب) تابع $y=-|x|+۱$.





۱۲ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) تابع $y=|۲x-۳|$.

ب) تابع $y=|۳x+۱|$.

TEST تمرین تست

۱ اگر $f=\{(-۳,۲),(۵,a+۷)\}$ تابعی ثابت باشد، a کدام است؟

❶ ۲ ❷ ۲− ❸ ۵− ❹ ۱۰−

۲ در تابع همانی f، حاصل $f(-۳)+f(۲)$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۵ ❸ ۵− ❹ ۱−

۳ با فرض آن‌که $f(x)=۲$ و $g(x)=-۲$ باشد، جواب معادله‌ی $x\times f(۱۰)-۲x\times g(۱۰)=۱$ کدام است؟ (دامنه‌ی هر دو تابع $\mathbb{R}$ است.)

❶ $\frac{۱}{۱۰}$ ❷ $-\frac{۱}{۲}$ ❸ $\frac{۱}{۶}$ ❹ $-\frac{۱}{۱۰}$

۴ کدام مورد همواره درست است؟

❶ اگر دامنه‌ی یک تابع با برد آن برابر باشد، آن تابع همانی است.

❷ نمودار تابع همانی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$، لزوماً از مبدأ نمی‌گذرد.

❸ دامنه و برد تابع ثابت، همواره تک عضوی هستند.

❹ تابع $f=\{(۲,۲)\}$ هم تابع ثابت است و هم تابع همانی.

۵ اگر $f=\{(a,۲),(۳,b),(c,۷)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a، b و c کدام است؟

❶ ۴ ❷ $\frac{۱۱}{۳}$ ❸ ۸ ❹ ۱۲

۶ اگر تابع $f=\{(a,b-۱),(c,m+۱),(n,p-۳)\}$ ثابت باشد و بدانیم که نقطه‌ی $(۱,۵)$ یکی از نقاط نمودار تابع است، واریانس اعداد b، m و p کدام است؟

❶ $\frac{۵}{۳}$ ❷ $\frac{۸}{۳}$ ❸ $\frac{۱۷}{۳}$ ❹ $\frac{۱۹}{۳}$

۷ اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و x و y دو عدد دلخواه باشند، کدام ممکن است درست نباشد؟

❶ $f(-kx)=-kf(x)$

❷ $f(xy)=f(x)f(y)$

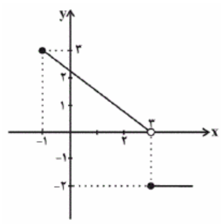
❸ $g(x+y)+g(x-y)=g(x)+g(y)$

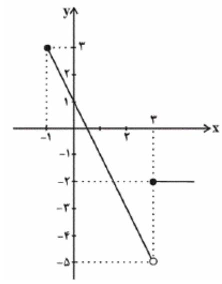
❹ $g(x+y)g(x-y)=g(x^۲-y^۲)$

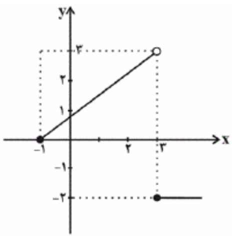
۸ اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+x & x<۰ \\ ۲x-۱ & ۰\leq x\leq ۲ \\ x^۳-۲ & x>۲ \end{cases}$ و $a=f(-۱)$ باشد، حاصل $f(a)-f(۳)$ کدام است؟

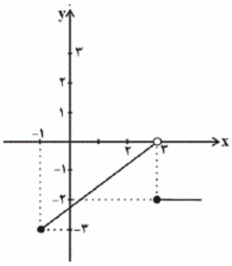
❶ -۶ ❷ -۷ ❸ -۲۲ ❹ -۲۳

۹ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+۱ & -۱\leq x<۳ \\ -۲ & x\geq ۳ \end{cases}$ کدام است؟

❶ 

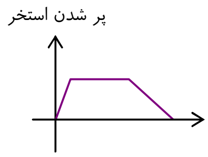
❷ 

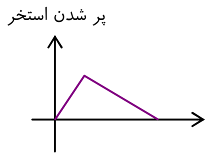
❸ 

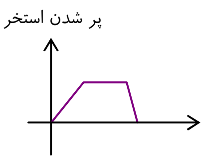
❹ 

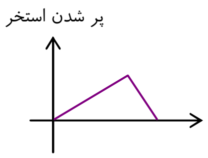
۱۰ کدام نمودار مربوط به متن زیر است؟

«استخر آبی توسط یک شیر ۷ ساعت طول می‌کشد تا پر شود. وقتی پر شد، پس از ۳ ساعت شیر تخلیه را باز می‌کنیم تا در طی ۴ ساعت آب استخر خالی شود.»

❶ 

❷ 

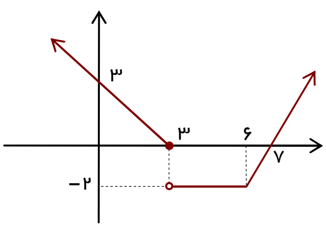
❸ 

❹ 

۱۱ تابع f به ازای $-۳<x<۱$ تابعی همانی و به ازای $x\geq ۱$ و $x\leq -۳$ تابعی ثابت است. اگر $f(۲)=-۲f(-۴)$ و $f(-۳)+f(۱)=-۲$ باشد، حاصل $\dfrac{f(-۲)f(۲)}{f(-۸)}$ کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۲}$ ❷ ۸ ❸ ۴ ❹ ۲

۱۲ در تابع مقابل حاصل $f(-۱)-f(۱۰)$ کدام است؟



❶ ۶
❷ -۴
❸ -۲
❹ ۱۰

۱۳ اگر تابع $f=\{(۱,a^۲+۳),(۲,۴),(۳,a+b),(-a,۴)\}$ تابعی ثابت با سه عضو باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

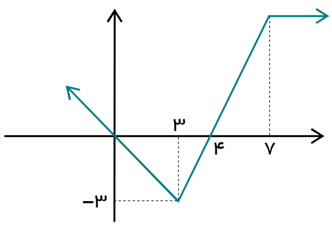
❶ -۲ ❷ -۳ ❸ -۵ ❹ -۶

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۱۴ مساحت محصور بین نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\leq 4 \\ -1 & 4<x<8 \\ x-9 & x\geq 8 \end{cases}$ و محورهای مختصات کدام است؟

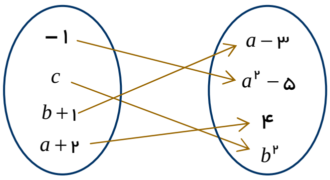
❶ $\frac{17}{2}$ ❷ ۱۰ ❸ ۵ ❹ $\frac{19}{2}$

۱۵ با توجه به نمودار تابع f، حاصل عبارت $f(-1)+f(11)$ کدام است؟



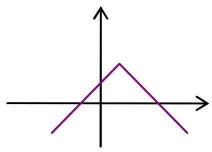
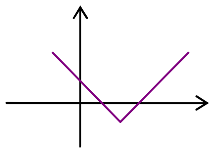
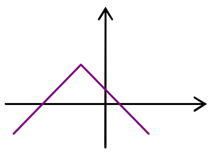
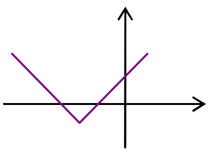
❶ ۱۴
❷ ۱۲
❸ ۱۰
❹ ۸

۱۶ اگر نمودار مقابل یک تابع همانی باشد، مقدار $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟



❶ ۱۲
❷ ۱۶
❸ ۲۴
❹ ۳۰

۱۷ نمودار تابع $y=-|x-2|+5$ شبیه کدام است؟

❶  ❷  ❸  ❹ 

۱۸ اگر ضابطه‌ی $f(x)=\frac{a+1}{x}+b(x^2-1)+(2a+c)x$ مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۴- ❸ ۲- ❹ ۲

۱۹ اگر $f(x)=\sqrt{|2x-5|}$ باشد، مقدار $f(-2)+2f(\frac{1}{2})$ کدام است؟ (کنکور ۹۷)

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۷

۲۰ اگر $f(x)=x\sqrt{2+|x|}$ باشد، مقدار $f(2)+4f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟ (کنکور خارج ۹۷)

❶ ۲ ❷ ۲/۵ ❸ ۳/۵ ❹ ۳

۲۱ اگر $f(x)=|2x-5|$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2}+2)+f(1+\sqrt{2})$ کدام است؟ (کنکور ۹۵)

❶ ۲ ❷ $2\sqrt{2}+2$ ❸ $4\sqrt{2}-4$ ❹ ۳

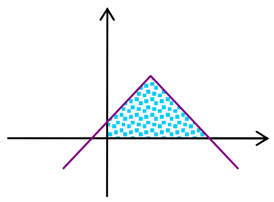
۲۲ اگر $f(x)=|۲x-۳|$ باشد، مقدار $f(\sqrt{۲}+۱)+f(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟ (کنکور ۹۶)

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ $۴\sqrt{۲}$ ❹ ۳

۲۳ کدام مراحل برای تبدیل نمودار $y=|x|-۱$ به نمودار $y=|x+۲|+۱$ باید انجام شود؟

❶ دو واحد به چپ و دو واحد به پایین
❷ دو واحد به راست و دو واحد به پایین
❸ دو واحد به چپ و دو واحد به بالا
❹ دو واحد به راست و دو واحد به بالا

۲۴ نمودار تابع $y=-|x-۲|+۳$ رسم شده است. مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار کدام است؟



❶ ۹
❷ ۸/۵
❸ ۷/۵
❹ ۸

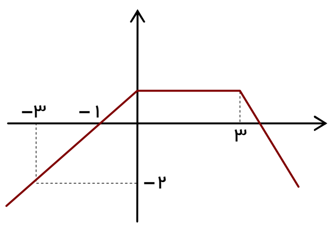
۲۵ اگر $f(x)=\begin{cases}-۲x+a & x\le -۲\\ -x^۲-۳x-a & x\ge -۲\end{cases}$ معرف یک تابع باشد، a کدام است؟

❶ -۲ ❷ -۱ ❸ ۱ ❹ ۲

۲۶ در تابع $f(x)=\begin{cases}x-۳ & x\ge ۱\\ x^۲+۲x & x<۱\end{cases}$ حاصل $f(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟

❶ -۲ ❷ $۲f(۴)$ ❸ $-۲f(۲/۵)$ ❹ ۲

۲۷ در تابع f با نمودار روبرو، اگر $۲f(۲)+f(۵)=-۱$ باشد، مقدار عبارت $f(۴)-f(-۴)$ کدام است؟



❶ -۲
❷ ۲
❸ ۴
❹ -۴

۲۸ اگر تابع $f=\{(a+c,۱),(a-b,-۱),(۳,a+۳b)\}$ تابعی همانی باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ -۱ ❸ ۱ ❹ ۲

۲۹ اگر a دو برابر b و $a+b=۶$ باشد، کدام تابع ثابت است؟

❶ $\{(\frac{a}{۲},-b),(b,-\frac{a}{۲}),(-۳,a-b)\}$
❷ $\{(a,۲+b),(۰,a),(۲,۲b)\}$
❸ $\{(-۱,۳b),(b,ab),(۳,a+۲)\}$
❹ $\{(۱,a-۱),(b,۱+b),(-۱,\frac{a}{۲})\}$

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۳۰ اگر f تابعی ثابت، $f(1)f(2)=2f(1)+3$ و $f(-1)f(2)=1$ باشد، مقدار $2f(3)-f(1)$ کدام است؟

1. -5
2. -1
3. 1
4. 5

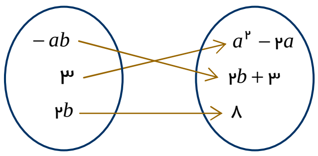
۳۱ اگر تابع $f=\{(-1,a+b),(a^2+1,d),(3a+2b,0),(ab,c-1)\}$ تابعی همانی باشد، مجموع اعضای برد تابع $g=\{(b,d+1),(a,c+d),(b-a,c-2)\}$ کدام است؟

1. 0
2. -1
3. 1
4. 2

۳۲ نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ با نمودار تابع همانی (با دامنه‌ی $\mathbb{R}$) در چند نقطه متقاطع هستند؟

1. 0
2. 3
3. 1
4. 2

۳۳ دامنه‌ی تابع ثابت مقابل دو عضوی است. مقدار $5a+4b$ کدام است؟



1. 0
2. 10
3. 20
4. 30

۳۴ تابع ثابت $f(x)=mx+h+2x$ نمودار تابع $g(x)=hx^2-3$ را در نقطه‌ای به طول -2 قطع کرده؛ مقدار $f(h)-g(m)$ چیست؟

1. 0
2. -3
3. 1
4. 3

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۴

تابـــع (۲)

فهرست مطالب	صفحه

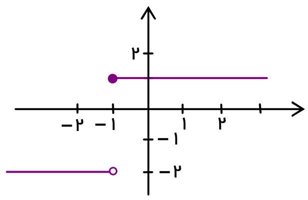
۱ توابـع پلکانی

در این بخش با نوع مهمی از توابع که رفتاری مشابه تابع ثابت دارند، آشنا می‌شویم.

شروع با یک نمونه‌ی ساده:

در تابع زیر، دامنه به دو بخش تقسیم شده و ضابطه روی هر یک از این دو بخش ثابت است:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq -1\\ -2 & x<-1\end{cases}$$



معرفی توابعی مانند نمونه‌ی قبل:

تابع پلکانی:

هر گاه دامنه‌ی یک تابع به قسمت‌هایی جدا از هم تقسیم شده و در هر قسمت، ضابطه‌ی تابع عددی ثابت باشد، به آن یک تابع پله‌ای یا پلکانی گویند.

نمونه‌های دیگری از توابع پلکانی ببینید:

مثال: هزینه‌ی دریافتی یک پارکینگ اتومبیل‌ها با قاعده‌ی زیر به مشتریان اعلام شده است:

«تا قبل از یک ساعت اول ۱۰۰۰۰ تومان و بعد از آن، هر ساعت اضافه ۵۰۰۰ تومان»

اولاً: جدولی برای هزینه‌ی پارکینگ تا چهار ساعت تشکیل دهید.

ثانیاً: نمودار مختصاتی هزینه‌ها را بر حسب مدت زمان استفاده از پارکینگ طبق جدول رسم کنید.

پاسخ

با توجه به شرایط گفته شده:

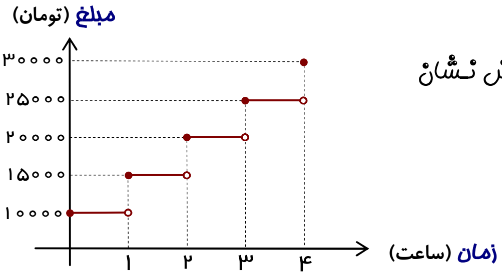
- از زمان ورود به پارکینگ تا قبل از پایان یک ساعت، هر چقدر اتومبیل بماند، باید مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان پرداخت شود.
- اگر به ۱ ساعت رسیده یا رد شود، تا قبل از ۲ ساعت باید مبلغ ۱۵۰۰۰ = ۵۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ تومان پرداخت گردد.

با ادامه‌ی این روند، جدول زیر حاصل خواهد شد:

زمان	از ۰ تا قبل ۱	از ۱ تا قبل ۲	از ۲ تا قبل ۳	از ۳ تا قبل ۴	۴ ساعت
مبلغ	۱۰۰۰۰	۱۵۰۰۰	۲۰۰۰۰	۲۵۰۰۰	۳۰۰۰۰

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

حالا می‌توانیم: زمان را روی محور طول و مبالغ را روی محور عرض نشان داده و نمودار تابع را رسم کنیم:



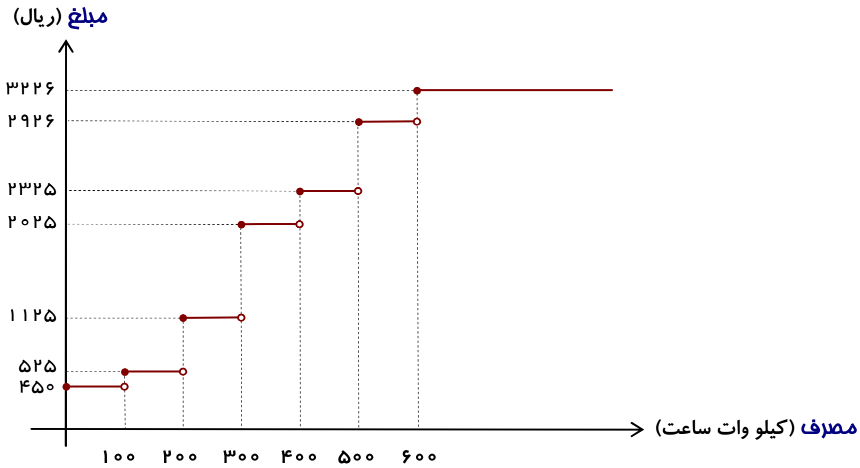
مثال: (از کتاب)

تعرفه مصرف برق خانگی: هزینه‌ی برق هر خانه بر مبنای مصرف تعداد «کیلو وات ساعت» و طبق جدول زیر محاسبه می‌شود:

(یک کیلو وات ساعت، مصرف ده لامپ روشن صد واتی در طول یک ساعت است.)

پله‌های مصرف	از ۰ تا ۱۰۰	مازاد ۱۰۰ تا ۲۰۰	مازاد ۲۰۰ تا ۳۰۰	مازاد ۳۰۰ تا ۴۰۰	مازاد ۴۰۰ تا ۵۰۰	مازاد ۵۰۰ تا ۶۰۰	مازاد بر ۶۰۰
هزینه (ریال)	۴۵۰	۵۲۵	۱۱۲۵	۲۰۲۵	۲۳۲۵	۲۹۲۶	۳۲۲۶

اطلاعات مندرج در جدول، ضابطه‌ی یک تابع پلکانی است و نمودار آن به آسانی رسم می‌شود:



مثال: با توجه به مثال قبل؛

الف) اگر مصرف خانه‌ای در یک ماه ۲۴۶/۲۳ کیلووات ساعت باشد، هزینه‌ی برق آن خانه را حساب کنید.

ب) مبلغ هزینه را به عنوان مساحتی روی نمودار نشان دهید.

پاسخ

الف) طبق ضابطه‌ی گفته شده:

- هزینه‌ی ۱۰۰ کیلو وات اول: ۴۵۰۰۰ = ۴۵۰×۱۰۰ ریال.
- هزینه‌ی ۱۰۰ کیلو وات دوم: ۵۲۵۰۰ = ۵۲۵×۱۰۰ ریال.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

- هزینه‌ی مازاد ۴۶/۲۳ کیلو وات آخر: ۵۲۰۰۹ = ۱۱۲۵×۴۶/۲۳ ریال.

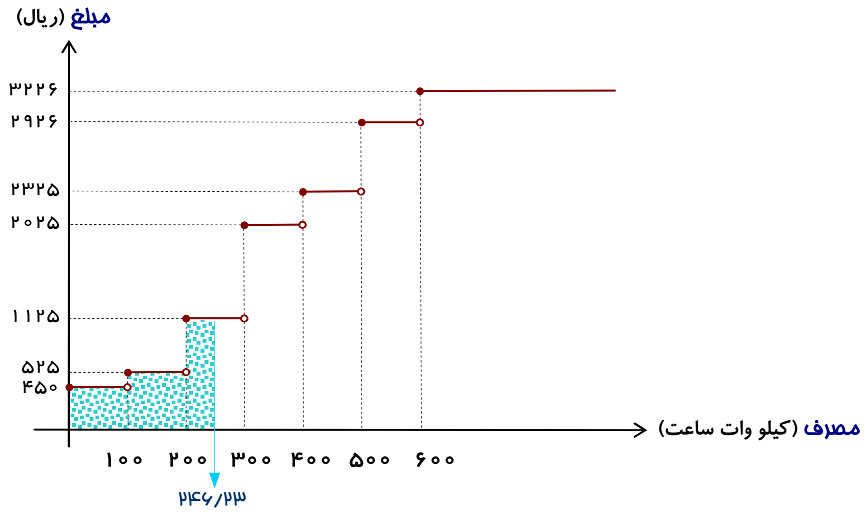
کل هزینه برابر است با:

$$۴۵۰۰۰+۵۲۵۰۰+۵۲۰۰۹=۱۴۹۵۰۹ \quad \text{(ریال)}$$

ب) با توجه به فرمول مساحت مستطیل (**عرض** × **طول**) و با قدری دقت می‌بینید که:

عدد ۴۵۰۰۰ برابر مساحت پایین نمودار در قطعه‌ی اول است.

عددهای ۵۲۵۰۰ و ۵۲۰۰۹ نیز با مساحت زیر نمودار تا طول ۲۴۶/۲۳ قابل بیان هستند.



نتیجه:

هزینه‌ی برق مصرفی، دقیقاً برابر مساحت بین نمودار و محور طول، در فاصله‌ی ۰ تا ۲۴۶/۲۳ است.

یک تابع پلکانی خاص را ببینید:

تابع علامت:

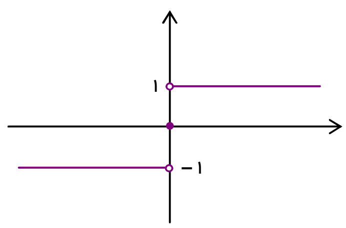
مقدار این تابع به ازای هر عدد حقیقی x را با $sign(x)$ (یا گاهی $\operatorname{sgn}(x)$) نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y=sign(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

یعنی، این تابع:

به هر مقدار مثبت عدد ۱، به هر مقدار منفی عدد ۱− و به عدد صفر، همان صفر را نسبت می‌دهد.

نمودار تابع علامت با توجه به ضابطه چنین است:



مثال: مقدار هر عبارت را حساب کنید.

الف) $sign(-۰/۵)+sign(|۱-۴|)$

ب) $sign(۱-\sqrt{۲})-۲sign(\frac{۳-۲\times۴}{۲-۳})$

پاسخ

الف) طبق ضابطه:

$$sign(-۰/۵)+sign(\underbrace{|۱-۴|}_{=۳})=-۱+۱=۰$$

ب) می‌دانیم $\sqrt{۲}\cong۱/۴$ و در نتیجه $۱-\sqrt{۲}$ منفی است. در مورد کسر کافی است علامت صورت و مخرج را بدانیم:

$$sign(۱-\sqrt{۲})-۲sign(\frac{\overbrace{۳-۲\times۴}^{=-۵}}{\underbrace{۲-۳}_{=-۱}})=-۱-۲(+۱)=-۱-۲=-۳$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^۲sign(x^۲+۱)+۱۶sign(-۵)=۰$$

پاسخ

توجه کنید که $x^۲+۱$ همیشه مقداری مثبت است و در نتیجه: $sign(x^۲+۱)=۱$. پس معادله ساده نوشته و حل می‌شود:

$$x^۲\times۱+۱۶\times(-۱)=۰ \to x^۲-۱۶=۰ \to x^۲=۱۶ \Rightarrow x=۴, x=-۴$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$sign(۱۲-۳k)=-۱$$

پاسخ

باید $۱۲-۳k$ عددی منفی باشد؛ یعنی $۱۲-۳k<۰$. جواب این نامعادله، جواب معادله‌ی بالا است:

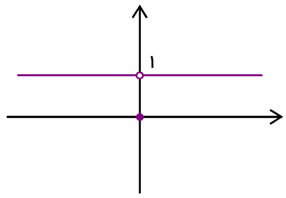
$$۱۲-۳k<۰ \to -۳k<-۱۲ \xrightarrow{\div(-۳)} \frac{-۳k}{-۳}>\frac{-۱۲}{-۳} \Rightarrow k>۴$$

پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

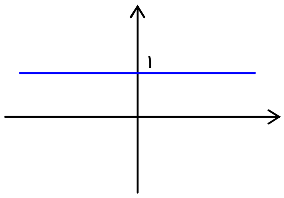
مثال: نمودار توابع $f(x)=sign(x^۲)$ و $g(x)=sign(x^۲+۱)$ را رسم کنید.

پاسخ

اگر $x=۰$ باشد، $x^۲=۰$ و در غیر این صورت $x^۲$ مثبت است. بعلاوه، $x^۲+۱$ همیشه مثبت است. بنابراین ضابطه‌ها به صورت ساده‌تر زیر بوده و نمودارها طبق آن‌ها رسم می‌شوند:



$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x=۰ \\ ۱ & x\neq ۰ \end{cases}$$



$$g(x)=۱$$

حالت خاصی از توابع پله‌ای اهمیت ویژه دارد:

جزء صحیح:

برای یک عدد حقیقی x، جزءِ صحیح آن با نماد $[x]$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

- اگر x عددی صحیح باشد، جزءِ صحیح آن برابر خودش است. مثلاً:

$$[۳]=۳ \quad \text{و} \quad [-۷]=-۷$$

- اگر x عددی صحیح نباشد، باید بین دو عدد صحیح قرار گیرد؛ $n<x<n+۱$. آنگاه: جزءِ صحیح x برابر عدد صحیح قبل از آن است. مثلاً:
  - چون $۱<۱/۷<۲$ است، پس $[۱/۷]=۱$.
  - چون $-۱>-۱/۵>-۲$ است، در نتیجه $[-۱/۵]=-۲$ خواهد بود.

بعلاوه:

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ است را **«تابع جزء صحیح»** نامگذاری می‌کنیم.

مثال: اگر $f(x)=[۳x]+[-x]$ باشد، مقدار $f(\frac{۱}{۴})$ را حساب کنید.

پاسخ

واضح است که:

$$f(\frac{۱}{۴})=[۳\times\frac{۱}{۴}]+[-\frac{۱}{۴}]=[\frac{۳}{۴}]+[-\frac{۱}{۴}]=۰-۱=-۱$$

توجه کنید:

عدد $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$ بین ۰ و ۱ قرار داشته و $-\frac{۱}{۴}=-۰/۲۵$ بین ۱- و ۰ قردار دارد.

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$[-\sqrt{۳}]+sign(\sqrt{۳})+|\sqrt{۳}-۱|$$

پاسخ

چون $\sqrt{۳}\cong ۱/۷$ است، عدد $-\sqrt{۳}$ بین ۲- و ۱- واقع است. همچنین $\sqrt{۳}-۱$ عددی مثبت بوده و در نتیجه:

$$[-\sqrt{3}]+sign(\sqrt{3})+|\underbrace{\sqrt{3}-1}_{>0}|=-2+1+(\sqrt{3}-1)=-1+\sqrt{3}-1=-2+\sqrt{3}$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر $[x]=-2$ باشد، آنگاه محدوده‌ی x کدام است؟

۱) $-2\le x\le -1$ ۲) $-2\le x<-1$ ۳) $-2<x\le -1$ ۴) $-2<x<-1$

پاسخ

طبق تعریف بالا، جزءصحیح هر عدد بین -2 و -1 و همچنین عدد -2 در تساوی $[x]=-2$ صادق است. بنابراین: جواب گزینه‌ی دوم است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x]=2$ ب) $[x]+3=1$ پ) $2[x]+3=0$

پاسخ

الف) اگر x هر عددی از ۲ تا قبل از ۳ باشد، جزءصحیح آن برابر ۲ است:

$$[x]=2 \Rightarrow 2\le x<3$$

ب) معادله به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$[x]=1-3 \Rightarrow [x]=-2$$

اگر x هر عددی از -2 تا قبل از -1 باشد، جزءصحیح آن برابر -2 است. جواب: $-2\le x<-1$

پ) معادله را ساده می‌نویسیم:

$$2[x]+3=0 \to 2[x]=-3 \Rightarrow [x]=-\frac{3}{2}$$

چون مقدار جزء صحیح همیشه یک عدد صحیح است، جوابی برای x جواب ندارد.

اکنون، رسم نمودار تابع جزءصحیح را ببینید:

مثال: نمودار تابع $y=[x]$ را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

با توجه به مفهوم این تابع، در محدوده‌های مناسب x، مقدار y را مشخص کرده و نمودار به آسانی رسم می‌شود.

- اگر x عددی بین ۰ و ۱ باشد، جزءصحیح آن برابر صفر است. به صورت دقیق‌تر:

$$0\le x<1 \Rightarrow y=0$$

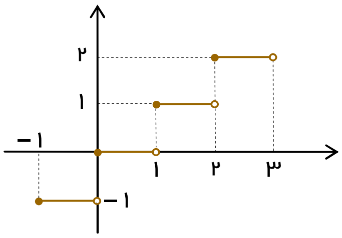
- اگر x عددی از ۱ تا قبل از ۲ باشد، جزءصحیح آن برابر ۱ است:

$$1\le x<2 \Rightarrow y=1$$

به صورت مشابه:

در هر محدوده‌ی جدید، مقدار تابع ۱ واحد افزایش می‌یابد. (رفتن به یک پله بالاتر)

نمودار را می‌بینید:



$$۳ \le x < ۴ \Rightarrow y = ۳$$
$$۴ \le x < ۵ \Rightarrow y = ۴$$
$$\vdots$$

توجه کنید:

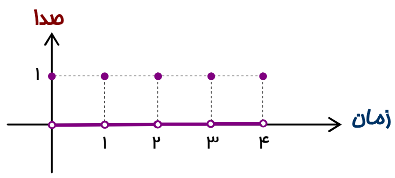
ما فقط نمودار را در چند محدوده رسم کرده‌ایم؛ ولی چون دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}$ است، پله‌های نمودار در سمت چپ به طرف پایین و در سمت راست به طرف بالا تا بی‌نهایت ادامه دارد. پس:

برد تابع $= \mathbb{Z}$ **(تمام اعداد صحیح)**

در پایان این بخش، چند رفتار پلکانی دیگر یا مشابه آن را با نمودار مدل‌سازی می‌کنیم.

❖ **ساعت سخنگو**

شاید دیده باشید: در برخی ساعت‌های قدیمی، در زمان‌های کامل 1:0 و 2:0 و ... و 12:0، یک کبوتر مصنوعی از ساعت بیرون آمده و آن ساعت مشخص را اعلام می‌کرد. رفتار کبوتر را می‌توان با عدد ۰ در زمان‌های عادی و ۱ در زمان‌های کامل به صورت یک تابع پلکانی نشان داد:

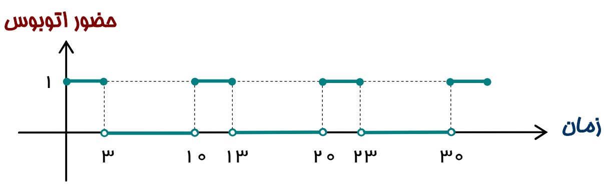


نمودار در سمت راست تا $x = ۱۲$ ادامه دارد.

❖ **ایستگاه اتوبوس**

یک ایستگاه اتوبوس در نظر بگیرید که دقیقاً هر ۱۰ دقیقه یک اتوبوس به آن وارد شده، ۳ دقیقه توقف کرده و بعد از پیاده یا سوار شدن مسافران، ایستگاه را ترک می‌کند.

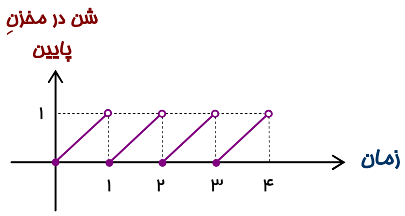
این رفتار را هم می‌توان با یک تابع پله‌ای نمایش داد:



نمودار در سمت راست ادامه دارد.

❖ **ساعت شنی** (پر شدن مخزن)

در این وسیله‌ی قدیمیِ سنجش زمان، مخزنِ پایین ابتدا خالی است و در یک واحد زمان، پر می‌شود. هر چند، چون پر شدن مخزن تدریجی است، نمودار مربوط به آن پلکانی نیست، ولی نموداری مشابه پلکانی دارد:



0912 172 0728
@alireza_karbalaie

۲ جبــر توابع

دو تابع f و g را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۰)\} \quad \text{و} \quad g=\{(۱,۵),(۲,-۳),(۴,۱),(۷,-۲)\}$$

می‌خواهیم تابعی معرفی کنیم که اثر آن روی هر مقدار ورودی، برابر **جمع اثر دو تابع** بالا باشد. این تابع را با $f+g$ نشان می‌دهیم و مجموع دو تابع f و g نام دارد. چون می‌خواهیم تابع جدید اثر جمعی داشته باشد، باید:

اثر تابع $f+g$ روی عدد ۱ برابر $f(۱)+g(۱)$ باشد.

بنابراین:

پس زوج مرتب $(۱,۶)$ یک عضو تابع $f+g$ است. $\qquad (f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۵=۶$

با این قاعده، سایر مقادیر تابع را بررسی می‌کنیم:

زوج مرتب $(۲,۱)$ یک عضو تابع $f+g$ است. $\qquad (f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۴-۳=۱$

$$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۰+\underline{???}$$

می‌بینید که $g(۳)$ وجود ندارد و بنابراین $(f+g)(۳)$ قابل محاسبه نیست.

(**یعنی:** عدد ۳ در دامنه‌ی تابع $f+g$ قرار ندارد.)

نتیجه:

تابع $f+g$ فقط برای عددهایی قابل محاسبه است که در آن، هر دو تابع f و g مقدار داشته باشند.

بنابراین:

باید آن عدد در اشتراک دامنه‌های دو تابع واقع باشد: $\qquad D_{f+g}=D_f \cap D_g$

چون در نمونه‌ی بالا $D_f \cap D_g=\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۲,۴,۷\}=\{۱,۲\}$ است، فقط مقادیر $(f+g)(۱)$ و $(f+g)(۲)$ قابل محاسبه است که دیدیم و بنابراین:

$$f+g=\{(۱,۶),(۲,۶)\}$$

روش‌ها و حقایق بالا، به صورت مشابه هنگام تفریق و ضرب دو تابع هم درستند:

سه عمل روی توابع:

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه سه تابع $f+g$ ، $f-g$ و fg به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad (f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad , \quad (fg)(x)=f(x)\times g(x)$$

بعلاوه:

دامنه‌ی هر سه تابع به صورت یکسان $D_f \cap D_g$ است.

مثال: برای دو تابع $f=\{(۲,۱),(۱,۴),(۳,۰)\}$ و $g=\left\{(۱,۰),(۰,۳),(۲,\frac{۱}{۲})\right\}$، توابع $f-g$ و fg را مشخص کنید.

پاسخ

توجه کنید چنان که در بالا گفته شد، توابع $f-g$ و fg فقط می‌توانند روی دامنه‌ی مشترک عمل کنند:

$$D_f=\{۱,۲,۳\}\ ,\ D_g=\{۰,۱,۲\}\ \rightarrow\ D_f\cap D_g=\{۱,۲\}$$

پس دو تابع را در نقاط ۱ و ۲ اثر می‌دهیم:

$$x=۱:\ \ (f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۴-۰=۴\quad,\quad (fg)(۱)=f(۱)g(۱)=۴\times ۰=۰$$

$$x=۲:\ \ (f-g)(۲)=f(۲)-g(۲)=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\quad,\quad (fg)(۲)=f(۲)g(۲)=۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f-g=\left\{(۱,۴),(۲,\frac{۱}{۲})\right\}\quad و \quad fg=\left\{(۱,۰),(۲,\frac{۱}{۲})\right\}$$

مثال: اگر $f(x)=۲[x]-۳$ و $g(x)=۲\sqrt{x}+۱$، حاصل $\frac{۲(f+g)(۴)}{(f\times g)(۰/۲۵)}$ را بیابید.

پاسخ

محاسبه‌ی هر یک از مقادیر مورد نیاز:

$$f(۴)=۲(۴)-۳=۵\ ,\ g(۴)=۲(۲)+۱=۵$$

$$f(۰/۲۵)=۲(۰)-۳=-۳\ ,\ g(۰/۲۵)=۲(۰/۵)+۱=۲$$

جای‌گذاری مقادیر در عبارت:

$$\frac{۲(f+g)(۴)}{(f\times g)(۰/۲۵)}=\frac{۲f(۴)+۲g(۴)}{f(۰/۲۵)\times g(۰/۲۵)}=\frac{۲(۵)+۲(۵)}{-۳\times ۲}=\frac{۲۰}{-۶}=-\frac{۱۰}{۳}$$

تقسیم توابع:

تقسیم دو تابع f و g نیز مشابه سه عمل قبل تعریف می‌شود:

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

توجه کنید:

دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ نیز فقط شامل عضوهای $D_f\cap D_g$ است، ولی اگر $g(x)=۰$ باشد، باز هم مقدار $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابل محاسبه نخواهد بود. یعنی، چنین عددهایی هم نمی‌توانند در دامنه قرار گیرند. پس:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g\mid\ g(x)=۰\}$$

مثال: در مورد دو تابع $f=\{(۲,۱),(۱,۴),(۳,۰)\}$ و $g=\left\{(۱,۰),(۰,۳),(۲,\frac{۱}{۲})\right\}$،

الف) توابع $\frac{g}{f}$ و $\frac{f}{g}$ را مشخص کنید.

ب) ابتدا تابع $۲g$ را حساب کرده و سپس توابع $۲g-f$ و $\frac{f}{۲g}$ را مشخص کنید.

پاسخ

الف) دامنه‌ی مشترک را مشخص می‌کنیم:

$$D_f=\{۱,۲,۳\}\ ,\ D_g=\{۰,۱,۲\}\ \rightarrow\ D_f\cap D_g=\{۱,۲\}$$

چون تابع f در نقاط ۱ و ۲ مقدارش صفر نمی‌شود، هر دو در تابع $\frac{g}{f}$ قرار می‌گیرند:

$$\frac{g}{f}(۱)=\frac{g(۱)}{f(۱)}=\frac{۰}{۴}=۰\ ,\ \frac{g}{f}(۲)=\frac{g(۲)}{f(۲)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ \frac{g}{f}=\{(۱,۰),(۲,\frac{۱}{۲})\}$$

ولی تابع g در نقطه‌ی ۱ مقدار صفر دارد و بنابراین تابع $\frac{f}{g}$ نمی‌تواند در ۱ حساب شود و فقط عدد ۲ در دامنه‌ی آن هست:

$$\frac{f}{g}(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲\ \Rightarrow\ \frac{f}{g}=\{(۲,۲)\}$$

ب) در محاسبه‌ی $۲g$، دامنه‌ی g ثابت مانده و فقط مقادیر تابع (مؤلفه‌ی دوم) در عدد ۲ ضرب می‌شود:

$$۲g=\left\{(۱,۲\times ۰),(۰,۲\times ۳),(۲,۲\times\frac{۱}{۲})\right\}=\{(۱,۰),(۰,۶),(۲,۱)\}$$

محاسبه‌ی $۲g-f$:

$$(۲g-f)(۱)=۲g(۱)-f(۱)=۰-۴=-۴\quad ,\quad (۲g-f)(۲)=۲g(۲)-f(۲)=۱-۱=۰$$
$$\Rightarrow\ ۲g-f=\{(۱,-۴),(۲,۰)\}$$

تعیین تابع $\frac{f}{۲g}$، مشابه قسمت (الف)، فقط عدد ۲ در دامنه است:

$$x=۲:\ \frac{f}{۲g}(۲)=\frac{f(۲)}{(۲g)(۲)}=\frac{۱}{۱}=۱\ \Rightarrow\ \frac{f}{۲g}=\{(۱,۱)\}$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر $f=\{(۱,۰),(-۱,۲),(۳,۷)\}$ و $g=\{(۱,۸),(۲,۵),(-۱,۴)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f-g$ ب) $\frac{g}{f}$

پاسخ

دامنه‌ی مشترک $\{۱,-۱\}$ است؛ مشابه قبل:

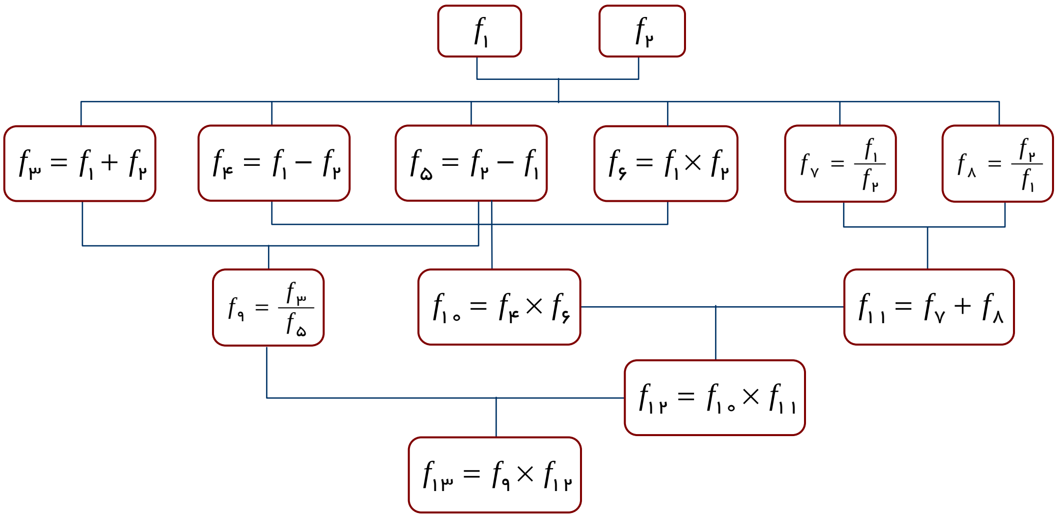
$$f-g=\{(۱,-۸),(-۱,-۲)\}$$

چون $f(۱)=۰$ است، عدد ۱ در دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارد. بنابراین:

$$\frac{g}{f}(-۱)=\frac{g(-۱)}{f(-۱)}=\frac{۴}{۲}=۲\ \Rightarrow\ \frac{g}{f}=\{(-۱,۲)\}$$

پایه یازدهم رشته انسانی جناب استاد کربلایی

مثال: با توجه به ضابطه‌ی $f_۱(x)=x+۱$ و $f_۲(x)=x-۱$ ، درخت زیر را به ازای $x=۲$ کامل کنید.



پاسخ

باید به ترتیب عمل کنید تا با شماره‌های کمتر، مقدار تابع با شماره‌های بیشتر، حساب شود:

$$f_۱(۲)=۲+۱=۳ \quad \text{و} \quad f_۲(۲)=۲-۱=۱$$

اکنون می‌توان ادامه داد:

$$f_۳(۲)=f_۱(۲)+f_۲(۲)=۳+۱=۴ \qquad f_۴(۲)=f_۱(۲)-f_۲(۲)=۳-۱=۲$$

$$f_۵(۲)=f_۲(۲)-f_۱(۲)=۱-۳=-۲ \qquad f_۶(۲)=f_۱(۲)\times f_۲(۲)=۳\times۱=۳$$

$$f_۷(۲)=\frac{f_۱(۲)}{f_۲(۲)}=\frac{۳}{۱}=۳ \qquad f_۸(۲)=\frac{f_۲(۲)}{f_۱(۲)}=\frac{۱}{۳} \qquad f_۹(۲)=\frac{f_۳(۲)}{f_۵(۲)}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

بقیه موارد نیز به روش مشابه حساب می‌شوند.

مثال: با توجه به ضابطه‌های $f(x)=x^۲-۴x$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$، ضابطه و دامنه‌ی توابع fg و $\frac{g}{f}$ را به‌دست آورده و بعلاوه مقدار $(g-f)(۱)$ را بیابید.

پاسخ

ضابطه‌ی توابع به آسانی نوشته می‌شود:

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(x^۲-۴x)\times\frac{۱}{x}=\frac{x^۲-۴x}{x}$$

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\frac{۱}{x}}{x^۲-۴x}=\frac{۱}{x(x^۲-۴x)}$$

دامنه‌ی تابع f شامل تمام اعداد $\mathbb{R}$ و دامنه‌ی تابع g همه‌ی اعداد به جز ریشه‌ی مخرج، یعنی $\mathbb{R}-\{0\}$ است. پس دامنه‌ی fg تابع اشتراک این دو مجموعه است:

$$D_{fg}=\mathbb{R}\bigcap(\mathbb{R}-\{0\})=\mathbb{R}-\{0\}$$

برای دامنه‌ی $\frac{g}{f}$، باید جواب‌های $f(x)=0$ از اشتراک بالا حذف شود:

$$f(x)=0 \to x^2-4x=0 \to x(x-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$$

فقط باید عدد ۴ از اشتراک حذف شود، چون عدد ۰ در اشتراک دو دامنه قرار ندارد.

$$D_{\frac{g}{f}}=(\mathbb{R}-\{0\})-\{4\}=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

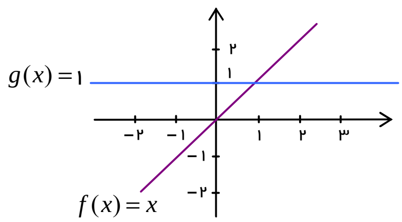
بالاخره، چون $f(1)=1^2-4(1)=1-4=-3$ و $g(1)=\frac{1}{1}=1$ است، بنابراین:

$$(g-f)(1)=g(1)-f(1)=1-(-3)=1+3=4$$

در پایان، مواردی مرتبط با نمودار جبر توابع را ببینید:

مثال: (از کتاب)

به کمک نمودارهای رسم شده‌ی f و g، ابتدا نمودار تابع $f+g$ را فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه‌ی تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



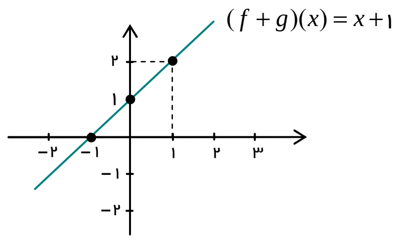
الف) مقدار تابع در نقاط $x=-1$، $x=0$ و $x=1$.

مقدار تابع در این سه نقطه:

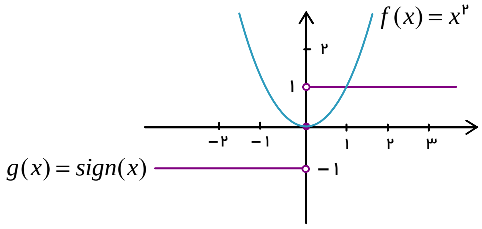
$$(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=-1+1=0$$
$$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=0+1=1$$
$$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=1+1=2$$

ضابطه‌ی تابع نیز چنین است: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+1$

این تابع خطی است و برای رسم آن، مختصات دو نقطه کافی خواهد بود. از محاسبات بالا، سه نقطه‌ی $(-1,0)$ و $(0,1)$ و $(1,2)$ حاصل می‌شود که در نمودار زیر می‌بینید:



ب) مانند قسمت قبل، برای توابع مقابل و نقاط $x=-۱$، $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ عمل کنید.



پاسخ

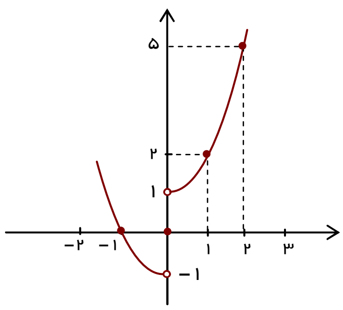
مقدار تابع جمع در این نقطه‌ها:

$$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)=۱-۱=۰$$
$$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=(۰)^۲+۰=۰$$
$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=(۱)^۲+۱=۲$$
$$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=(۲)^۲+۱=۵$$

چون تابع g سه ضابطه‌ای است، ضابطه‌ی جمع نیز به همین صورت است:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x<۰ \\ x^۲+۰ & x=۰ \\ x^۲+۱ & x>۰ \end{cases}=\begin{cases} x^۲-۱ & x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ x^۲+۱ & x>۰ \end{cases}$$

از محاسبات بالا، چهار نقطه‌ی $(-۱,۰)$، $(۰,۰)$، $(۱,۲)$ و $(۲,۵)$ حاصل می‌شود که در نمودار روبرو می‌بینید:



مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

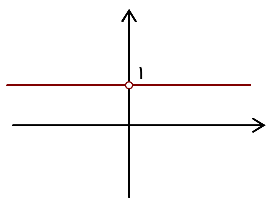
اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=|x|$ باشد، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

پاسخ

ضابطه‌ی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{|x|}{|x|}=۱$$ (البته باید $x\neq ۰$ باشد.)

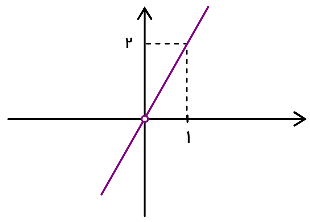
بنابراین نمودار تابع خط $y=۱$ است که فقط در $x=۰$ نمودار ندارد:



0912 172 0728 @alireza_karbalaie

مثال: (مشابه کتاب)

اگر $g(x)=x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه‌ی تابع f را مشخص کنید.



پاسخ

خط داده شده در نمودار از نقاط $(0,0)$ و $(1,2)$ گذشته، پس شیب آن $m=\frac{2-0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$ بوده و معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$$

یعنی ضابطه‌ی $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت $2x$ بوده و در نتیجه:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=2x \rightarrow \frac{f(x)}{x^2}=2x \Rightarrow f(x)=x^2\times 2x=2x^3$$

0912 172 0728

@alireza_karbalaie

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

نمونه تست‌های بیشتر و برخی نکات در مورد توابع پلکانی را می‌آوریم:

طبق جدول محاسبه‌ی هزینه‌ی برق مصرفی بر حسب «کیلو وات ساعت»، هزینه‌ی برق مصرفی به ازای مصرف ۳۴۰ کیلو وات ساعت، چند ریال است؟

میزان مصرف برحسب کیلووات ساعت	هزینه برحسب ریال
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵
مازاد بر ۳۰۰	۲۰۰۰

❶ ۴۱۰۰۰۰
❷ ۲۵۰۰۰۰
❸ ۳۶۰۰۰۰
❹ ۲۹۰۰۰۰

پاسخ

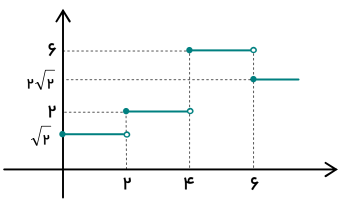
هزینه‌ی مصرف در سه محدوده‌ی اول:
(صد کیلو وات اول، هر کیلو وات ۴۵۰ ریال، صد کیلو وات دوم، هر کیلو وات ۵۲۵ ریال، صد کیلو وات سوم، هر کیلو وات ۱۱۲۵ ریال)،
باید کامل پرداخت شود:

$$۱۰۰\times۴۵۰+۱۰۰\times۵۲۵+۱۰۰\times۱۱۲۵=۱۰۰\times(۴۵۰+۵۲۵+۱۱۲۵)=۱۰۰\times۲۱۰۰=۲۱۰۰۰۰$$

مازاد ۳۰۰ تا ۳۴۰، یعنی ۴۰ کیلو وات هم باید هر کیلو وات ۲۰۰۰ ریال محاسبه شود:

$$۴۰\times۲۰۰۰=۸۰۰۰۰ \Rightarrow \text{کل هزینه}=۲۱۰۰۰۰+۸۰۰۰۰=۲۹۰۰۰۰$$

در تابع پلکانی مقابل، حاصل $\dfrac{f(۶)\,f(۲\sqrt{۶})}{f(\frac{\sqrt{۱۱}}{۲})}$ کدام است؟



❶ $۱۲\sqrt{۲}$
❷ ۱۲
❸ ۶
❹ $\dfrac{۱۲}{\sqrt{۲}}$

گزینه ۲

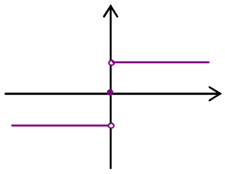
توجه کنید: $۲\sqrt{۶}\cong۲\times۲/۴=۴/۸$ است و چون $\sqrt{۱۱}$ بین ۳ و ۴ است، $\dfrac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ در محدوده‌ی $x<۲$ واقع است. اکنون با دقت در نمودار، مقادیر نوشته می‌شوند:

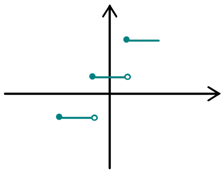
$$\frac{f(6)\,f(2\sqrt{6})}{f(\frac{\sqrt{11}}{2})}=\frac{2\sqrt{2}\times 6}{\sqrt{2}}=2\times 6=12$$

کدام تابع زیر پلکانی محسوب نمی‌شود؟

❶ $\begin{cases} 0 & x<0 \\ -2x & x=0 \\ 3 & x=5 \\ 4 & x>5 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} 0 & x<0 \\ -2x & x=0 \\ 3 & x=5 \\ 4x & x>5 \end{cases}$

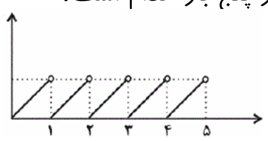
❸ 

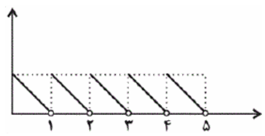
❹ 

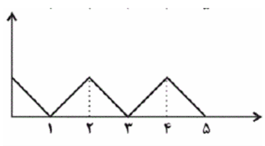
گزینه ۳

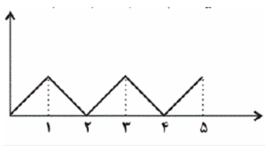
در تابع دوم، فقط برای $x>5$ مقدار تابع دارای ضابطه‌ی $y=4x$ بوده و ثابت نیست.

اگر مخزن یک ساعت شنی با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین بریزد، نمودار خالی شدن مخزن آن در پنج بار کدام است؟

❶ 

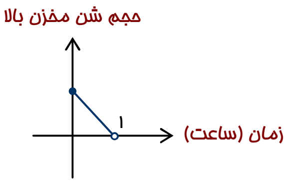
❷ 

❸ 

❹ 

گزینه ۲

در ابتدا مخزن پر است و در طی یک ساعت، حجم شن داخل مخزن صفر می‌شود.
پس باید در ابتدا، مقدار تابع زیاد باشد و به مرور صفر شده و این روند تکرار شود:



(تکرار پنج باره‌ی این عمل، در گزینه‌ی دوم آمده است.)

اگر $f(x)=sign(x)$ و $g(x)$ تابعی ثابت و $\frac{3f(3)-4g(-3)}{f(-1)+2g(1)}=-4$ باشد، حاصل $f(\sqrt{5})\times g(0)$ کدام است؟

❶ $\frac{1}{4}$ ❷ $\frac{7}{12}$ ❸ $-\frac{7}{12}$ ❹ $-\frac{1}{4}$

گزینه ۱

قرار دهید: $g(x)=k$. طبق خاصیت تابع علامت:

$$\frac{۳(۱)-۴k}{-۱+۲k}=-۴ \rightarrow ۳-۴k=۴-۸k \rightarrow \underbrace{-۴k+۸k}_{=۴k}=\underbrace{۴-۳}_{=۱} \Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

پس $g(x)=\frac{۱}{۴}$ بوده و در نتیجه:

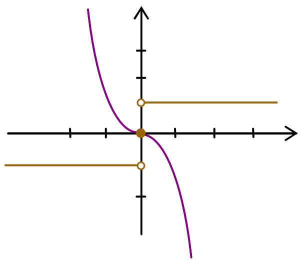
$$f(\sqrt{۵})\times g(۰)=۱\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

اگر نمودار توابع $f(x)=sign(x)$ و $g(x)=\begin{cases}-x^۲ & x\geq ۰\\ x^۲ & x<۰\end{cases}$ در یک دستگاه مختصات رسم شوند، چند نقطه‌ی تلاقی (برخورد) دارند؟

❶ ۱ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۰

گزینه ۱

نمودار تابع f را می‌شناسیم؛ نمودار g هم با استفاده از مقدار تابع در $x=-۱$ و $x=۰$ و $x=۱$ به آسانی رسم (تقریبی) می‌شود:



می‌بینید که:
فقط در مبدأ دو نمودار برخورد دارند.

روش دوم:

ضابطه‌ها را در سه حالت $x=۰$ و $x<۰$ و $x>۰$ مساوی قرار می‌دهیم:

$x=۰: \quad f(۰)=g(۰) \rightarrow ۰=-(۰)^۲=۰$ **قابل قبول**

$x<۰: \quad f(x)=g(x) \rightarrow -۱=x^۲$ **غیر ممکن**

$x>۰: \quad f(x)=g(x) \rightarrow ۱=-x^۲$ **غیر ممکن**

پس فقط یک جواب وجود دارد.

تساوی $sign(۲x+۳)-۲sign(۵-x)=-۳$ برای چند عدد صحیح یک رقمی x برقرار است؟

❶ ۱۰ ❷ ۹ ❸ ۸ ❹ بی‌شمار

گزینه ۳

با توجه به خروجی تابع علامت، تنها با مقادیر به صورت $-۳=\underbrace{sign(۲x+۳)}_{=-۱}-۲\underbrace{sign(۵-x)}_{=۱}$ تساوی ممکن می‌شود:

$$sign(۲x+۳)=-۱ \rightarrow ۲x+۳<۰ \Rightarrow x<-\frac{۳}{۲}$$

$$sign(۵-x)=۱ \rightarrow ۵-x>۰ \Rightarrow x<۵$$

اشتراک دو جواب به صورت $x<-\frac{۳}{۲}$ بوده و جواب‌های مورد نظر چنین هستند:

$$x=-۲,-۳,\ldots,-۹$$

در ادامه مواردی مرتبط با تابع جزءصحیح را ببینید.

در تابع $f(x)=۲[x]+[-x]$ ، مقدار $f(-\frac{۱}{۲})+f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۸)

❶ -۲ ❷ -۱ ❸ ۰ ❹ ۱

گزینه ۱

طبق مفهوم جزء صحیح:

$$f(-\frac{۱}{۲})=۲\underbrace{[-\frac{۱}{۲}]}_{[-۰/۵]=-۱}+\underbrace{[-(-\frac{۱}{۲})]}_{[۰/۵]=۰}=۲(-۱)+۰=-۲$$

$$f(\frac{۳}{۲})=۲\underbrace{[\frac{۳}{۲}]}_{[۱/۵]=۱}+\underbrace{[-\frac{۳}{۲}]}_{[-۱/۵]=-۲}=۲(۱)-۲=۰$$

پس جواب برابر $-۲+۰=-۲$ است.

اگر $f(x)=[۲x-۱]$ باشد، مقدار $f(-\frac{۳}{۴})+f(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

❶ ۰ ❷ -۲ ❸ -۱ ❹ ۱

گزینه ۲

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۵}\cong ۲/۲$، خواهیم داشت:

$$f(-\frac{۳}{۴})=[۲(-\frac{۳}{۴})-۱]=[-\frac{۳}{۲}-۱]=[-۱/۵-۱]=[-۲/۵]=-۳$$

$$f(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=[۲(\frac{\sqrt{۵}}{۲})-۱]=[\underbrace{\sqrt{۵}-۱}_{\cong ۲/۲-۱=۱/۲}]=[۱/۲]=۱$$

پس جواب برابر $-۳+۱=-۲$ است.

اگر $f(x)=[۱-۳x]$ باشد، مقدار $f(-۰/۷)-f(-۰/۰۷)$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ ۲ ❷ ۶ ❸ ۰ ❹ ۱

گزینه ۱

مقادیر را در تابع جایگزین می‌کنیم:

$$f(-۰/۷)=[۱-۳(-۰/۷)]=[۱+۲/۱]=[۳/۱]=۳$$
$$f(-۰/۰۷)=[۱-۳(-۰/۰۷)]=[۱+۰/۲۱]=[۱/۲۱]=۱$$

پس جواب برابر $۳-۱=۲$ است.

0912 172 0728 @alireza_karbalaie
پایه یازدهم رشته انسانی جناب استاد کربلایی

کدام مورد نادرست است؟

❶ $[\pi]=۳$ ❷ $[۱-\pi]=-۳$ ❸ $[-\sqrt{۶}]=-۲$ ❹ $[\sqrt{۸}]=۲$

گزینه ۳

با توجه به مقادیر تقریبی:

$$\pi \cong ۳/۱۴ \quad و \quad -\sqrt{۶}\cong -۲/۴ \quad و \quad \sqrt{۸}\cong ۲/۸$$

فقط مورد سوم نادرست است:

$$[-\sqrt{۶}]=[-۲/۴]=-۳$$

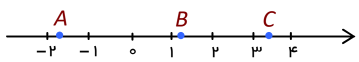
حاصل عبارت $\dfrac{۳[۱-\pi]-[۲\pi]}{[۲/۹۱]+[-۰/۰۱]}$ کدام است؟

❶ -۱۲ ❷ -۱۵ ❸ -۸ ❹ -۶

گزینه ۲

$$\frac{۳[\overbrace{۱-\pi}^{\cong -۲/۱۴}]-[\overbrace{۲\pi}^{\cong ۶/۲۸}]}{[۲/۹۱]+[-۰/۰۱]}=\frac{۳(-۳)-۶}{۲+(-۱)}=\frac{-۱۵}{۱}=-۱۵$$

با توجه به نقاط روی محور، حاصل $\dfrac{\left[\dfrac{۱-۲A}{۵}\right]+۲[B]}{\left[\dfrac{C}{۲}\right]-۳}$ کدام است؟



❶ ۱ ❷ -۱ ❸ $-\dfrac{۱}{۲}$ ❹ $\dfrac{۱}{۲}$

گزینه ۲

باید حدود عددهای $\dfrac{۱-۲A}{۵}$ و $\dfrac{C}{۲}$ را مشخص کنیم. طبق محور:

$$-۲<A<-۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۲<-۲A<۴ \xrightarrow{+۱} ۳<۱-۲A<۵ \xrightarrow{\div ۵} \frac{۳}{۵}<\frac{۱-۲A}{۵}<۱$$

$$۳<C<۴ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۳}{۲}<\frac{C}{۲}<۲$$

بنابراین:

$$\frac{\left[\dfrac{۱-۲A}{۵}\right]+۲[B]}{\left[\dfrac{C}{۲}\right]-۳}=\frac{۰+۲(۱)}{۱-۳}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

توجه کنید:

اگر استدلال بالا طولانی یا دشوار است، می‌توانید در عبارت کسری جای A، B و C مقادیر تقریبی طبق محور جایگزین کنید.

اگر a ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $۲x^۲+۲x-۳=۰$ باشد، $[-a]$ کدام است؟

❶ -۱ ❷ -۲ ❸ -۳ ❹ -۴

گزینه ۱

حل معادله به روش دلتا:

$\Delta=۴+۲۴=۲۸$ است و جواب مثبت معادله $a=\frac{-۲+\sqrt{۲۸}}{۴}=\frac{۲(-۱+\sqrt{۷})}{۴}=\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}$ است. با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۷}\cong ۲/۶$، خواهیم داشت:

$$a=\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}\cong\frac{۱/۶}{۲}=۰/۸ \rightarrow -a\cong -۰/۸ \xrightarrow{-۱<-a<۰} [-a]=-۱$$

تابع $f(x)=[x]$ را برای $-۲<x\le ۳$ رسم کرده‌ایم. برد تابع شامل چند عضو است؟

❶ ۷ ❷ ۶ ❸ ۵ ❹ ۴

گزینه ۲

بدون رسم نمودار می‌توان این گونه استدلال کرد:

در محدوده‌ی $-۲<x<-۱$ داریم: $y=-۲$ — در محدوده‌ی $-۱\le x<۰$ داریم: $y=-۱$

در محدوده‌ی $۰\le x<۱$ داریم: $y=۰$ — در محدوده‌ی $۱\le x<۲$ داریم: $y=۱$

در محدوده‌ی $۲\le x<۳$ داریم: $y=۲$ — و برای $x=۳$ داریم: $y=۳$

پس برد به صورت $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ است.

ضابطه‌ی تابع $y=[-۲x+|x|]+x$ در دامنه‌ی $-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳}$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ $-۲x$ ❷ $x+۱$ ❸ $x-۲$ ❹ $۲x+\frac{۸}{۳}$

گزینه ۲

چون x عددی منفی است، $|x|=-x$ بوده و داخل براکت برابر می‌شود با:

$$-۲x-x=-۳x$$

محدوده‌ی $-۳x$ را با استفاده از فرض معلوم می‌کنیم:

$$-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times(-۳)} ۲>-۳x>۱$$ **(با ضرب در عدد منفی، جهت تغییر می‌کند.)**

بنابراین $[-۳x]=۱$ است و در نتیجه:

$$y=[-۳x]+x=۱+x$$

نکته ۱

وقتی عدد صحیح k به صورت جمع یا تفریق داخل جزءِصحیح باشد، می‌تواند از براکت خارج شود:

$$[x \pm k] = [x] \pm k$$

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی زیر را معلوم کنید:

$$۲[x-۴]+[x]=۴$$

پاسخ

طبق خاصیت قبل، معادله ساده و سپس حل می‌شود:

$$۲([x]-۴)+[x]=۴ \rightarrow ۳[x]=۱۲ \rightarrow [x]=۴ \Rightarrow ۴ \le x < ۵$$

اگر $\frac{۶}{۵} < x \le \frac{۷}{۵}$ باشد، حاصل $[-۵x+۲]$ کدام است؟

❶ -۵ ❷ -۱ ❸ -۳ ❹ -۲

گزینه ۱

روش عادی به عهده‌ی داوطلبان، روش عدد گذاری:

عدد $x=\frac{۷}{۵}$ در محدوده‌ی $\frac{۶}{۵} < x \le \frac{۷}{۵}$ قرار دارد. جواب تست برابر است با:

$$[-۵x+۲]=[-۵x]+۲=[-۵(\frac{۷}{۵})]+۲=[-۷]+۲=-۷+۲=-۵$$

نکته ۲

برای عبارت معروف $[x]+[-x]$، یعنی وقتی داخل براکت‌ها قرینه هستند، فقط دو مقدار حاصل می‌شود:

- اگر داخل براکت‌ها صحیح باشد، حاصل همیشه برابر صفر است.

مانند:

$$[۳]+[-۳]=۰ \quad \text{و} \quad [-۷]+[۷]=۰$$

- اگر داخل براکت‌ها غیرصحیح باشد، حاصل همیشه برابر -۱ است.

مانند:

$$[۲/۱]+[-۲/۱]=-۱ \quad \text{و} \quad [-۵/۹]+[۵/۹]=-۱$$

اگر $f(x)=[x]+[-x]$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

❶ $f(-۲)=۰$ ❷ $f(۲/۷)=-۱$ ❸ $f(-۲/۷)=۱$ ❹ $f(۲)=۰$

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

گزینه ۳

چون $-۲/۷$ عددی غیر صحیح است:

$$f(-۲/۷)=[-۲/۷]+[۲/۷]=-۱$$

تابع $f(x)=[x]+[-x]$ با دامنه‌ی $-۳\le x\le ۳$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه‌ی صحیح در دامنه برابر ۳ است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

❶ ۶ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ ۰

گزینه ۴

چون در نقاط صحیح داریم: $f(x)=[x]+[-x]=0$، بنابراین در نقاط صحیح مخرج عبارت $\frac{g(x)}{f(x)}$ صفر بوده و در کل تعریف نشده است. پس هیچگاه برابر ۳ نخواهد شد.

نکته ۳

در مورد عددهای کوچک (بین ۱- تا ۱) به موارد کاربردی زیر توجه کنید:

این عددها با توان رسانی یا جذر گرفتن، بازهم بین ۱- تا ۱ می‌مانند، ولی:

باید به علامت مثبت یا منفی آن‌ها توجه داشته باشید!

- اگر $0<a<1$ باشد، توان و جذر آن هم بین ۰ و ۱ هستند.
- اگر $-1<a<0$ باشد، توان زوج a بین ۰ و ۱ و توان فرد a بین ۱- و ۰ است. (جذر بی معنی است.)

(نمونه‌ی بعد را ببینید!)

اگر $-1<x<0$ باشد، حاصل عبارت $[x]+[x^3]+[x^6]+[x^9]$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ -۱ ❸ -۲ ❹ -۳

گزینه ۴

عددهای x، x^3 و x^9 بین ۰ و ۱- هستند و عدد x^6 بین ۰ و ۱ قرار دارد. بنابراین:

$$[x]+[x^3]+[x^6]+[x^9]=-1-1+0-1=-3$$

نمونه‌هایی از اعمال جبری توابع ببینید:

اگر $f=\{(1,2),(-3,4),(3,5),(7,-1)\}$ و $g=\{(3,-1),(2,1),(7,2),(1,0)\}$ باشند، دامنه‌ی توابع $g\times f$ و $f-g$ به ترتیب کدام است؟

❶ $\{1,3,7\}$ و $\{-3\}$ ❷ $\{3,7\}$ و $\{-3\}$

❸ $\{1,3,7\}$ و $\{1,3,7\}$ ❹ $\{0,-5,-2\}$ و $\{2,6,-3\}$

گزینه ۳

می‌دانیم که دامنه‌ی هر دو تابع، اشتراک دامنه‌های دو تابع است:

$$D_f \cap D_g = \{1,-3,3,7\} \cap \{3,2,7,1\} = \{1,3,7\}$$

اگر $f = \{(2,5),(3,4),(4,6),(1,7)\}$ و $g = \{(1,3),(2,6),(5,2),(4,9)\}$ باشند، برد تابع $g-f$ کدام است؟

(کنکور ۱۳۹۸)

❶ $\{-4,1,3\}$ ❷ $\{-4,2,3\}$ ❸ $\{-4,1,2,3\}$ ❹ $\{1,2,3,4\}$

گزینه ۱

کافی است مقادیر تابع در دامنه‌ی مشترک $\{1,2,4\}$ حساب شوند:

$$(g-f)(4) = 9-6 = 3 \qquad (g-f)(2) = 6-5 = 1 \qquad (g-f)(1) = 3-7 = -4$$

پس برد برابر $\{-4,1,3\}$ است.

اگر $f = \{(0,4),(1,8),(10,12)\}$ و $g = \{(-3,6),(1,-6),(10,20)\}$ باشند، حاصل $\dfrac{(f-g)(1)}{(\frac{f}{g})(10)}$ کدام است؟

❶ $\dfrac{65}{3}$ ❷ $\dfrac{70}{3}$ ❸ $\dfrac{61}{3}$ ❹ $\dfrac{71}{3}$

گزینه ۲

محاسبه‌ی مقادیر صورت و مخرج طبق تعریف:

$$(\frac{f}{g})(10) = \frac{f(10)}{g(10)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad (f-g)(1) = f(1)-g(1) = 8-(-6) = 14$$

در نتیجه:

$$\frac{(f-g)(1)}{(\frac{f}{g})(10)} = \frac{14}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{14}{1}}{\frac{3}{5}} = \frac{14\times 5}{1\times 3} = \frac{70}{3}$$

اگر $f = \{(2,3),(4,-1),(-1,3)\}$ و $g = \{(2,3),(4,1),(-1,-2)\}$ باشند، تابع $\dfrac{g}{g-f}$ کدام است؟

❶ $\{(4,\frac{1}{2}),(-1,\frac{2}{5}),(2,0)\}$ ❷ $\{(4,\frac{1}{2}),(-1,\frac{2}{5})\}$

❸ $\{(-1,\frac{2}{5})\}$ ❹ $\{(4,0),(-1,\frac{2}{5}),(2,0)\}$

گزینه ۲

اشتراک دامنه‌ها $\{2,4,-1\}$ است، ولی چون در مخرج $(g-f)(2)=3-3=0$ است، فقط عددهای ۴ و ۱− در دامنه هستند.
محاسبه‌ی مقادیر:

$$\frac{g}{g-f}(-1)=\frac{g(-1)}{g(-1)-f(-1)}=\frac{-2}{-2-3}=\frac{2}{5} \quad و \quad \frac{g}{g-f}(4)=\frac{g(4)}{g(4)-f(4)}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

اگر $f=\{(3,4),(2,6),(5,3),(1,5)\}$ و $g=\{(5,6),(1,2),(3,2),(4,1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

❶ $\{\frac{5}{3},2,-3\}$ ❷ $\{\frac{7}{3},3,-3\}$ ❸ $\{\frac{5}{3},4,-2\}$ ❹ $\{\frac{7}{3},3,-2\}$

گزینه ۲

ابتدا باید توابع جمع و تفریق حساب شوند. به آسانی:

$$f+g=\{(3,6),(5,9),(1,7)\} \quad و \quad f-g=\{(3,2),(5,-3),(1,3)\}$$

چون دامنه‌ی مشترک $\{5,1,3\}$ است، مانند قبل:

$$(\frac{f+g}{f-g})(1)=\frac{7}{3} \qquad (\frac{f+g}{f-g})(3)=\frac{6}{2}=3 \qquad (\frac{f+g}{f-g})(5)=\frac{9}{-3}=-3$$

پس برد برابر $\{\frac{7}{3},3,-3\}$ است.

اگر $f(x)=(|a|-|b|)x$ تابع همانی، $g(x)=(b^2-1)x+(a^2+1)c$ تابعی ثابت و $(f-g)(x)=x+5$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

گزینه ۲

با توجه به ضابطه‌ی توابع ثابت و همانی:

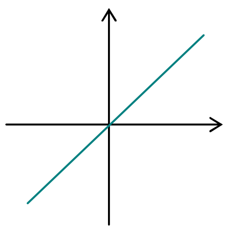
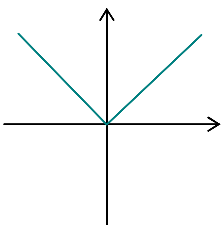
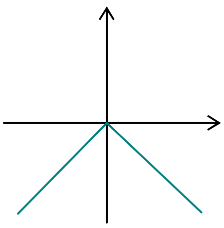
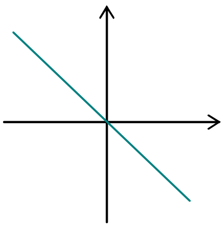
- چون f همانی است: $|a|-|b|=1$
- چون g ثابت است:

$$b^2-1=0 \to b=\pm1 \to |b|=1 \xrightarrow{|a|-|b|=1} |a|-1=1 \to |a|=2 \Rightarrow a=\pm2$$

پس تا این‌جا $f(x)=x$ و $g(x)=((\pm2)^2+1)c=5c$ بوده است. تفریق ضابطه‌ها:

$$x-5c=x+5 \to -5c=5 \to c=-1 \Rightarrow ac=2(-1)=-2 \quad یا \quad ac=-2(-1)=2$$

اگر $f(x)=-x$ و $g(x)=-sign(x)$ باشد، نمودار تابع $y=f(x)g(x)$ کدام است؟

❶

❷

❸

❹


گزینه ۲

ضابطه‌ی تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$y=(-x)(-sign(x))=x\times sign(x)=\begin{cases} x\times ۱ & x>۰ \\ x\times ۰ & x=۰ \\ x\times(-۱) & x<۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} x & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

واضح است که نمودار دوم صحیح است.

تابع $f(x)=|۲x-۲|$ و $g(x)=[x]$ با دامنه‌ی $-۱\le x\le ۱$ است. اگر مجموعه‌ی A برد تابع $f\cdot g$ باشد، کدام عدد عضو A است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ -۳ ❷ -۲ ❸ ۲ ❹ ۳

گزینه ۱

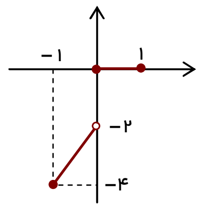
دامنه‌ی تابع ضرب همان $-۱\le x\le ۱$ و $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\underbrace{|۲x-۲|}_{=۲|x-۱|}[x]$ است. با ساده کردن ضابطه، نمودار رسم شده و برد تشخیص داده می‌شود:

$$-۱\le x<۰:\ \xrightarrow{[x]=-۱}\ (f\cdot g)(x)=-۲|\overbrace{x-۱}^{<۰}|=۲(x-۱)=۲x-۲$$

$$۰\le x<۱:\ \xrightarrow{[x]=۰}\ (f\cdot g)(x)=۲|x-۱|(۰)=۰$$

$$x=۱:\ \rightarrow\ (f\cdot g)(۱)=۰$$

اکنون نمودار تابع قابل رسم است:



در بین گزینه‌ها؛

فقط عدد -۳ در برد قرار دارد.

پایه یازدهم رشته انسانی جناب استاد کربلایی

تمرینات

۱ نمودار تابع پلکانی زیر را رسم کرده و دامنه و بردش را مشخص کنید:

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & -۲\le x<۰ \\ ۱ & ۰\le x<۲ \\ ۰ & ۲\le x<۴ \\ -۱ & ۴\le x<۵ \end{cases}$$

۲ حاصل عبارت زیر را مشخص کنید:

$$[-\sqrt{۲}]+sign(\sqrt{۲})+|\sqrt{۲}+۱|$$

۳ معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$x^{۲}sign(x^{۲}+۱)+۹sign(-۵)=۰$$

۴ الف) ضابطه‌ی تابع $y=sign(x)$ را نوشته، آن را رسم کرده و دامنه و بردش را مشخص کنید.

ب) اگر $sign(۲-k)=-۱$ باشد، حدود k را تعیین کنید.

۵ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

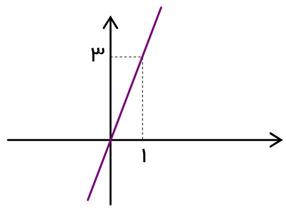
$$A=\frac{۵[-۰/۹]-[-۳]}{۶[-۴/۵]+[۱/۹۸]}$$

۶ برای تابع $f(x)=[x]-[-x]$، مقادیر $f(۲)$ و $f(۱-\sqrt{۲})$ را حساب کنید.

۷ اگر $[x+۱]=۲$ باشد، حدود متغیر x را مشخص کنید.

۸ اگر $f=\{(۲,۰),(۴,-۱),(-۱,۳)\}$ و $g=\{(۲,۵),(۳,-۱),(-۱,۲),(۴,۳)\}$ باشند، توابع $۲f-g$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

۹ اگر $f(x)=x^{۲}$ و تابع $\frac{f}{g}(x)$ دارای نمودار روبرو باشد، ضابطه‌ی تابع g را بنویسید.



۱۰ اگر $f(x)=c$ تابع ثابت و g تابع همانی باشد، مقدار c را از تساوی مقابل بیابید.

$$\frac{g(۲)+۳f(۵)}{[۱/۵]+g(-۲)}=-۱$$

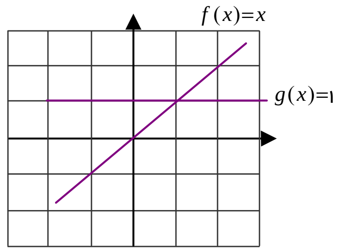
0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۱۱ برای تابع $f(x)=\text{sgn}([x])$ ، مقدار $f(۲)+f(\sqrt{۳})$ را حساب کنید.

۱۲ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{۵[-۰/۹]-[-۳]}{۲[\text{sgn}(-۲/۵)]+[۱/۹۸]}$$

۱۳ به کمک نمودارهای رسم شده‌ی توابع f و g: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)



الف) نمودار تابع $f+g$ را در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ مشخص کنید.

ب) نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

۱۴ اگر $f(x)=۳x-۱$ و $g=\{(۱,۰),(-۱,۳),(۳,۷)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید. (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

الف) D_{f-g} ب) $(۲f)(-۳g)(۱)$

تمرینات
منتخب کتاب

۱ با استفاده از محور، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$[۳/۹۹]=$ $[-۴/۲]=$ $[۴/۲]=$

$[\pi]=$ $[-۲]=$ $[-۱/۲]=$

۲ جدول زیر را کامل کنید:

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x)=[x]$	$x=-۲/۳$ $x=۵$	
$f(x)=[-x]$	$x=۱/۷$ $x=۲/۳$	

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x)=[x]+[-x]$	$x=۱$ $x=۱/۳$ $x=۱/۷$ $x=۲$	
$f(x)=[۳x]$	$x=۱$ $x=۰/۲$ $x=۱/۳$	

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۳ جدول مالیاتی زیر در یک شرکت برای سال جدید مالی تصویب شده است:

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰	معاف از مالیات
مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰	۱۰
مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰	۱۵
مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰	۲۵

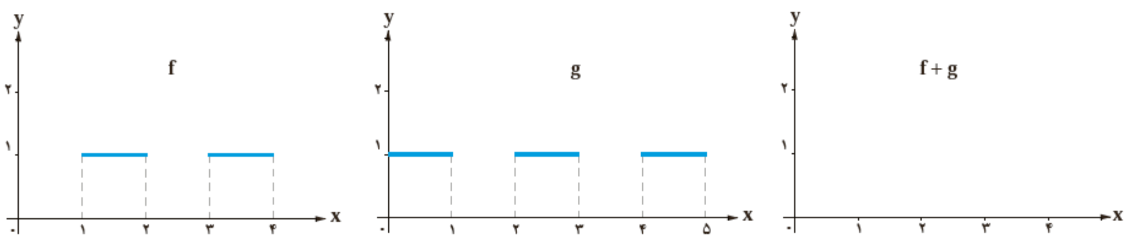
الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه‌ی سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید:

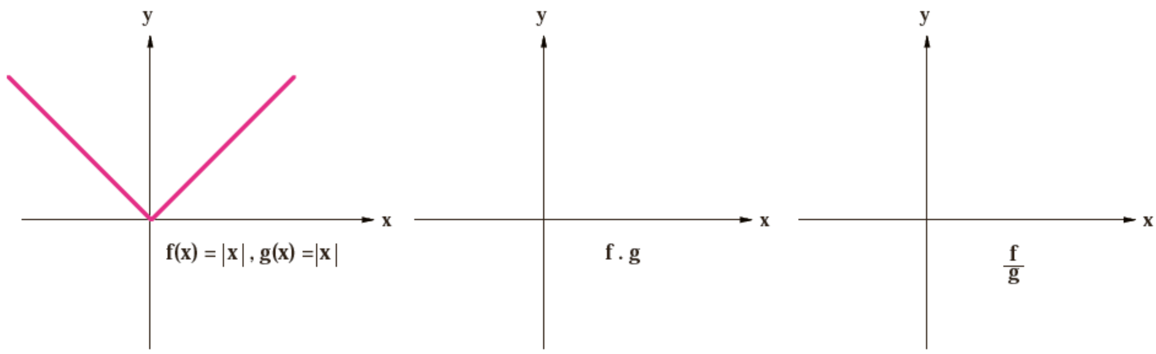
- کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان.
- کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان.
- کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان.

۴ در هر مورد زیر، با توجه به نمودار توابع داده شده‌ی f و g، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید:

الف)



ب)



۵ یک شرکت سرمایه‌گذاری دارای دو کارخانه‌ی A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تُن کاشی در کارخانه‌ی A به ترتیب $-۲x^۳+۱۶x$ و $۸x+۶$ و در کارخانه‌ی B به ترتیب $-x^۲+۱۲x$ و $۲x+۹$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):

الف) تابع سود شرکت را مشخص کنید.

ب) این شرکت با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم می‌رسد؟

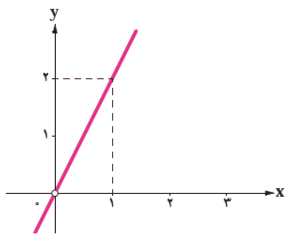
۶ تابع $f(x)=[x]$ با دامنه‌ی $۰\leq x\leq ۱$، تابع $g(x)=|x|$ با دامنه‌ی $۱\leq x\leq ۲$ و تابع $h(x)=x^۲-۴$ با دامنه‌ی $-۱\leq x\leq ۱$ را در نظر بگیرید. سپس موارد زیر را انجام دهید:

الف) تعیین ضابطه و رسم نمودار تابع $s(x)=f(x)+g(x)$.

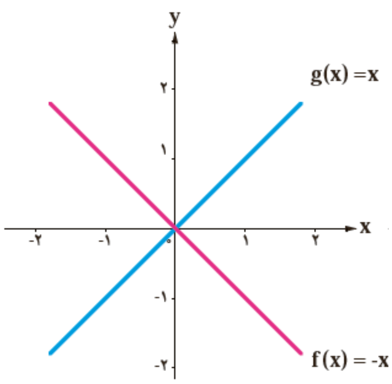
ب) تعیین ضابطه و رسم نمودار تابع $q(x)=\dfrac{h(x)}{f(x)}$.

پ) تعیین ضابطه و رسم نمودار تابع $p(x)=h(x)\times g(x)$.

۷ اگر $f(x)=x^۲$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه‌ی تابع g را مشخص کنید.



۸ به کمک نمودارهای رسم شده‌ی f و g، ابتدا نمودار تابع $f+g$ را فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه‌ی تابع آن و نیز نقاط $x=-۲$ و $x=۰$ و $x=۱$ و $x=۲$ رسم کنید.



0912 172 0728
@alireza_karbalaie

TEST تمرین تست

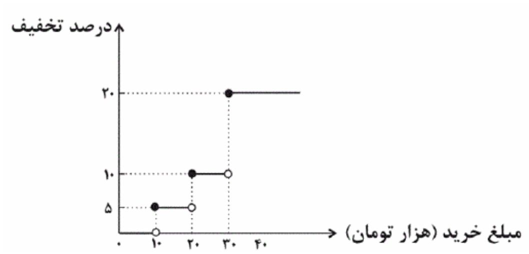
۱ حاصل عبارت $sign(\frac{۱}{۲})+sign(\sqrt{۲}-۳)-sign(\pi)$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ -۱

۲ حاصل عبارت $۲sign(۵-\sqrt{۶})-۳sign([[\sqrt{۲}]]+[-[\sqrt{۲}]])$ کدام است؟ **(براکت‌ها جزءصحیح هستند.)**

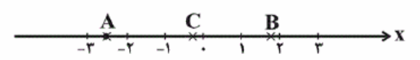
❶ ۱ ❷ ۲ ❸ -۲ ❹ -۱

۳ یک فروشگاه برای خریدهای مشتریان طبق تابع پلکانی زیر بر حسب مازاد مبلغ خرید، یک تخفیف مشخص می‌دهد. اگر از این فروشگاه پنجاه هزار تومان خرید کنیم، چند تومان تخفیف می‌گیریم؟



❶ ۴۰۰۰
❷ ۴۵۰۰
❸ ۵۵۰۰
❹ ۶۰۰۰

۴ با توجه به اعداد مشخص شده روی محور، حاصل عبارت $\dfrac{-[\frac{A}{۳}]-[-C]}{۴[-\frac{B}{۲}]}$ کدام است؟ **(براکت‌ها جزءصحیح هستند.)**



❶ $\frac{۱}{۴}$ ❷ $-\frac{۱}{۴}$ ❸ $\frac{۳}{۴}$ ❹ $-\frac{۳}{۴}$

۵ اگر $f(x)=\begin{cases}-[x] & x<-۱\\ ۳ & -۱\le x\le ۲\\ sign(x) & x>۲\end{cases}$ باشد، حاصل $f(-\frac{۳}{۲})+f(\sqrt{۲}+۱)$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۰ ❸ ۳ ❹ -۱

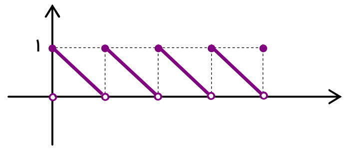
۶ حاصل عبارت $[\sqrt{۱}]+۲[\sqrt{۲}]+۳[\sqrt{۳}]+۴[\sqrt{۴}]+۵[\sqrt{۵}]$ کدام است؟

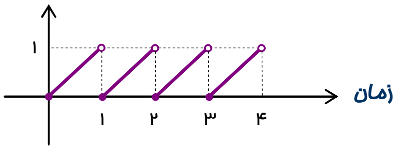
❶ ۲۶ ❷ ۲۴ ❸ ۲۲ ❹ ۲۰

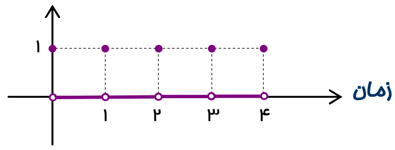
۷ یک شرکت باربری برای حمل بار بین دو شهر بابت ۳۰ کیلوگرم بار یا کمتر، ۱۰۰۰۰ تومان و بابت هر اضافه بار تا کمتر از ۱۰ کیلوگرم ۵۰۰۰ تومان اضافه دریافت می‌کند. این شرکت برای بارهای بین ۵۰ تا ۵۹ کیلوگرم چند تومان دریافت می‌کند؟

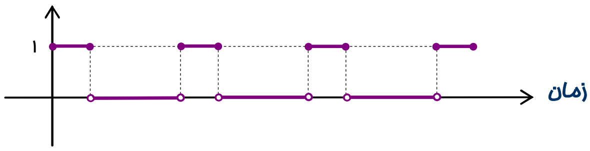
❶ ۳۰۰۰۰ ❷ ۳۵۰۰۰ ❸ ۲۵۰۰۰ ❹ ۲۰۰۰۰

۸ در یک ساعت دیواری، پرنده‌ای رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید و ساعت جدید را اعلام می‌کند. کدام نمودار این رفتار را نشان می‌دهد؟

❶


❷


❸


❹


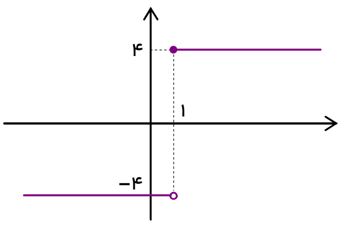
۹ تابع دو ضابطه‌ای f برای $[x]$ فرد به صورت $f(x)=\frac{x^۲}{۲}$ و برای $[x]$ زوج به صورت $f(x)=۲x^۲$ تعریف شده است.

مقدار $f(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})+f(-۲\sqrt{۲})$ کدام است؟

❶ ۵ ❷ $\frac{۶۵}{۴}$ ❸ $\frac{۱۷}{۴}$ ❹ ۱۷

۱۰ نمودار روبرو مربوط به تابع پلکانی $f(x)=\begin{cases} k-۶ & x<۱ \\ (m-۸)x+۲n & x\geq ۱ \end{cases}$ است.

حاصل $m+n+k$ کدام است؟



❶ ۱۲
❷ -۱۰
❸ -۶
❹ ۸

۱۱ برای مقدار صحیح x حاصل عبارت $[۷x]+[-۷x]$ کدام است؟

❶ ۷ ❷ -۷ ❸ ۱۴ ❹ ۰

۱۲ برد تابع $y=[x]-۲$ با دامنه‌ی $۱<x\leq ۵$ کدام است؟

❶ $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ ❷ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ ❸ $\{-۲,-۱,۱,۲,۳\}$ ❹ $\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$

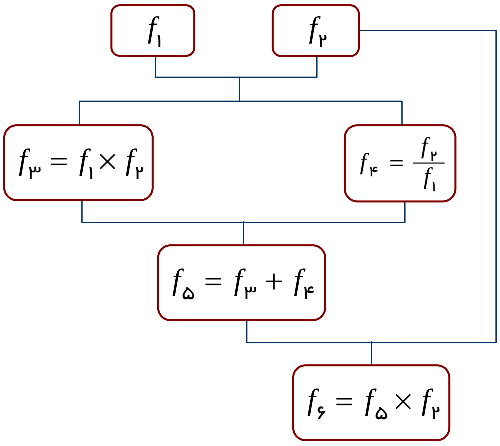
۱۳ حاصل عبارت $|[-\frac{۷}{۳}]|+[|-\frac{۷}{۳}|]$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ -۱ ❸ ۳ ❹ ۵

۱۴ اگر $f=\{(۰,۲),(-۱,-۶),(۳,۱۰)\}$ و $g=\{(۰,۸),(۱۰,۱۱),(۳,۹)\}$ باشد، تابع $(f\times f)+g$ است؟

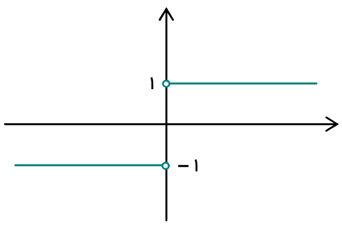
❶ $\{(۱۰,۱۲۰),(۳,۱۸)\}$ ❷ $\{(۰,۱۸),(۳,۹۶)\}$
❸ $\{(-۱,۱۲),(۰,۱۰۰)\}$ ❹ $\{(۰,۱۲),(۳,۱۰۹)\}$

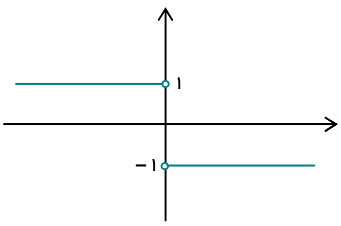
۱۵ اگر $f_{۱}(x)=۴-x$ و $f_{۲}(x)=۲x+۱$ باشد، مقدار تابع $f_{۶}$ به ازای $x=-۲$ کدام است؟

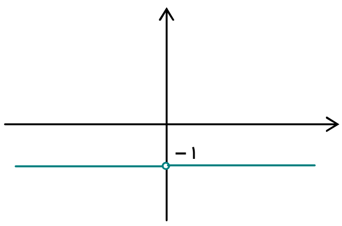


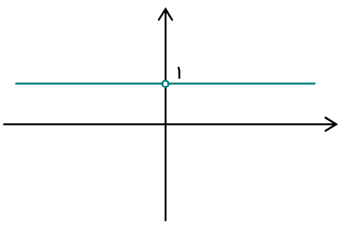
❶ ۴۲/۵
❷ ۵۵/۵
❸ ۶۴/۶
❹ −۱۸/۴

۱۶ اگر $f(x)=-|x|$ و $g(x)=|x|$ باشد، نمودار تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

❶ 

❷ 

❸ 

❹ 

۱۷ مقدار تابع $f(x)=sign(-x+۲)+۳[-x-۲]$ در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۲}$ برابر کدام است؟

❶ -۶ ❷ -۸ ❸ -۹ ❹ -۵

۱۸ در کدام مورد، تبدیل تابع به دو ضابطه نادرست انجام شده است؟

❶ $y=|x-۱|=\begin{cases} x-۱ & x>۱ \\ ۱-x & x\leq ۱ \end{cases}$

❷ $y=۳+|x-۲|=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ ۵-x & x<۲ \end{cases}$

❸ $y=-|x|+۴=\begin{cases} ۴-x & x\geq ۰ \\ ۴+x & x<۰ \end{cases}$

❹ $y=-|x+۵|-۳=\begin{cases} ۲+x & x\geq -۵ \\ -۸-x & x<-۵ \end{cases}$

۱۹ اگر $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=-۱$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشند، نمودار کدام‌یک از توابع زیر از همه‌ی نواحی دستگاه مختصات مـی-گذرد؟

❶ fg ❷ $f-g$ ❸ $f+g$ ❹ $\frac{f}{g}$

0912 172 0728
@alireza_karbalaie

۲۰ اگر $f_۱(x)=x^۲-۱$ و $f_۲(x)=۲x+۱$ باشند و قرار دهیم: $f_۳=f_۱+f_۲$ و $f_۴=\frac{f_۳}{f_۱}$، در این صورت مقدار $f_۴(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۲۱ اگر $f(x)=[x]-۲$ با دامنه‌ی $۱\le x<۲$ و $g(x)=|x|+۲$ با دامنه‌ی $۱\le x\le ۳$ باشند، تابع $f+g$ کدام است؟

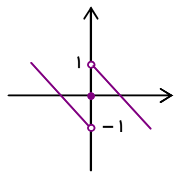
۱) $\begin{cases}(f+g)(x)=x-[x]\\ D_{f+g}=\{x:۱\le x\le ۲\}\end{cases}$

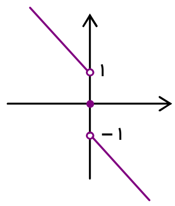
۲) $\begin{cases}(f+g)(x)=|x|+[x]\\ D_{f+g}=\{x:۱\le x\le ۳\}\end{cases}$

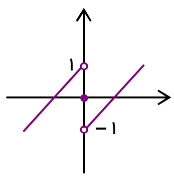
۳) $\begin{cases}(f+g)(x)=x+۱\\ D_{f+g}=\{x:۱\le x<۲\}\end{cases}$

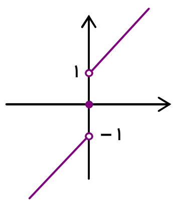
۴) $\begin{cases}(f+g)(x)=[x]-x\\ D_{f+g}=\{x:۱\le x<۲\}\end{cases}$

۲۲ اگر $f(x)=-x$ و $g(x)=sign(x)$ باشند، نمودار تابع $f+g$ کدام گزینه خواهد بود؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳ نمودار تابع $y=-|۲x+۳|+۱$ محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع طول‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۳

۲۴ اگر $f_۱(x)=\sqrt{۲x-۱}+۲$ و $f_۲(x)=\frac{|-x|}{x+۲}$ باشند و قرار دهیم: $f_۳=f_۱f_۲$ و $f_۴=f_۳-f_۲$، در این صورت مقدار تابع $f_۵=\frac{f_۳}{f_۴}$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۵ اگر $f(x)=|۲x|$ و $g(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -x & x<۰\end{cases}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $(g-f)(x)$ کدام است؟

۱) $|x|$ ۲) $-|x|$ ۳) $-x$ ۴) x

۲۶ در تابع $f(x)=[x+\frac{۳}{۲}]-[-x]$، مقدار $f(\frac{۹}{۴})+f(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟ (کنکور ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۷ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۴,۵),(۳,۳)\}$ و $g=\{(۳,۲),(۲,۳),(۶,۱),(۱,۸)\}$ باشند، برد تابع $g\times f$ کدام است؟
(کنکور خارج ۹۸)

❶ $\{۶,۸,۱۲\}$ ❷ $\{۶,۱۲,۱۶\}$ ❸ $\{۳,۶,۱۲,۱۶\}$ ❹ $\{۶,۸,۱۲,۱۶\}$

۲۸ حاصل عبارت $sign(۳\pi-۱۰)-۳sign(a^۲+۱)+۲sign(۷-۵\sqrt{۲})$ کدام است؟ (a عددی حقیقی است.)

❶ -۶ ❷ -۴ ❸ -۲ ❹ -۸

۲۹ تساوی $sign(ab)=sign(a-b)$ در چند حالت زیر برقرار است؟

الف) اگر $a>b$ باشد.

ب) اگر a و b طبیعی و $a>b$ باشد.

پ) اگر $a=b$ باشد.

ت) اگر a و b منفی و $|a|<|b|$ باشد.

ث) اگر $b=۰$ باشد.

❶ ۴ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۳۰ مجموع جواب‌های معادله‌ی $x^{۲sign(۲-\sqrt{۳})}-۲xsign(-۱-x^۲)=۸sign(x)$ کدام است؟

❶ ۶ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ -۲

۳۱ اگر $[x]=-۳$ باشد، جمع مقادیر ممکن برای $[-۲x-۳]$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۳

۳۲ اگر $[\frac{۵x-۱}{۳}]=۱$ باشد، تعداد مقادیر ممکن برای $[x^۲]$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۳۳ در تابع پلکانی $f(x)=\begin{cases}(a-۳)x-۲ & -۳\le x<-۱\\ \frac{۲b+۱}{a-۱} & -۱\le x\le ۲\\ (c+۲)x-۱ & x>۲\end{cases}$ داریم: $f(\frac{a}{۲})=-۱$. مقدار $f(-b)-b$ کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۲}$ ❷ ۰ ❸ $-\frac{۱}{۲}$ ❹ -۱

۳۴ تابع $f(x)=۲([x]+[-x])x-۱-ax$ در نقاط خارج $\mathbb{Z}$ ثابت است. مقدار $sign(\frac{[\pi+۲a]}{-۲})-۲a$ کدام است؟

❶ ۲ ❷ ۵ ❸ ۴ ❹ ۳

۳۵ از شرایط $sign(a+۱)=۱$ و $sign(a-۲)=-۱$ حدود a کدام است؟

❶ $a>۲$ ❷ $a<-۱$ ❸ $-۱<a<۲$ ❹ $\varnothing$

۳۶ کمترین مقدار تابع $f(x)=\frac{[۳x]}{sign(-x)}$ با دامنه‌ی $\{\frac{۱}{۴},-\sqrt{۲},\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\}$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ -۳ ❸ -۵ ❹ -۱

0912 172 0728
@alireza_karbalaie

۵

آمـــار

۱ شاخص‌های آماری

در پایه‌ی دهم، چندین شاخص (معیار) آماری را دیده‌ایم، مانند میانه، میانگین، انحراف معیار و . . .

می‌توان گفت:

شاخص آماری:
معیاری آماری است که تغییرات نسبی یک ویژگی از جامعه آماری را نشان می‌دهد.

توجه کنید:
شاخص‌ها در واقع تخمین‌هایی از پارامترهای جامعه بوده و توسط آماره‌های چندین نمونه‌ی انتخاب شده از جامعه برآورد می‌شوند. در این مبحث، چندین شاخص مهم مربوط به جوامع انسانی که به اقتصاد افراد یا خانواده‌های آن‌ها مرتبط هستند را بررسی خواهیم کرد.

اولین شاخص مرتبط با معیشت افراد یا خانوار:

خط فقر:
کمینه (کمترین) درآمدی است که برای زندگی یک نفر (یا یک خانواده) در یک ماه مورد نیاز است.

روش محاسبه:
اگر میانگین و میانه‌ی درآمد ماهانه‌ی افراد جامعه را داشته باشیم، دو روش زیر برای تعیین خط فقر وجود دارد:

۱) نصف میانگین **۲)** نصف میانه

مثال: درآمد افراد جامعه‌ای بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:

۱,۱,۲,۱۸۰,۴,۵,۷,۹,۱۰,۱۱

خط فقر را به هر دو روش بیابید. کدام روش برای این جامعه بهتر و دقیق‌تر است؟

پاسخ

میانگین برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{1+1+2+180+4+5+7+9+10+11}{10}=\frac{230}{10}=23$$

داده‌های مرتب شده: ۱,۱,۲,۴,۵,۷,۹,۱۰,۱۱,۱۸۰ و در نتیجه میانه برابر است با:

$$Q_2=\frac{5+7}{2}=\frac{12}{2}=6$$

خط فقر توسط میانگین برابر $\frac{23}{2}=11/5$ میلیون تومان و توسط میانه برابر $\frac{6}{2}=3$ میلیون تومان خواهد بود.

توجه کنید:

در مثال قبل، چون داده‌ی دورافتاده‌ی ۱۸۰ وجود دارد، میانه مرکزیت داده‌ها را بهتر نشان داده و خط فقر بر جسب میانه (۳ میلیون) دقیق‌تر است.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر درآمد ماهیانه ۹ نفر از افراد یک اداره (بر حسب میلیون تومان) به صورت زیر باشد، با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانه، چند نفر زیر خط فقر قرار دارند؟

۵ , ۷ , ۱۰ , ۸ , ۵ , ۶ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۵

پاسخ

داده‌های مرتب شده: ۵,۵,۶,۷,۸,۱۰,۱۰,۱۱,۱۵ بوده و میانه (داده‌ی وسط) برابر است با:

$$Q_۲ = ۸$$

پس خط فقر برابر $\frac{۸}{۲} = ۴$ میلیون تومان بوده و هیچ کس زیر خط فقر نیست.

مثال: درآمد کارکنان یک شرکت بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:

$۳,۱۰,۲,۸,۴,x,۷,۹,۶,۴$

اگر خط فقر به روش میانگین برابر ۳ میلیون تومان باشد، مقدار x را حساب کنید.

پاسخ

میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۳+۱۰+۲+۸+۴+x+۷+۹+۶+۴}{۱۰} = \frac{۵۳+x}{۱۰}$$

نصف این مقدار باید برابر ۳ باشد:

$$\frac{\frac{۵۳+x}{۱۰}}{۲} = ۳ \rightarrow \frac{۵۳+x}{۲۰} = ۳ \rightarrow ۵۳+x = \underbrace{۲۰\times۳}_{=۶۰} \Rightarrow x = ۶۰-۵۳ = ۷$$

خط فقر بین‌المللی:

بانک جهانی، درآمد ۱/۲۵ دلار در روز برای هر فرد را خط فقر بین‌المللی اعلام کرده است.

توجه کنید:

مزیت تعیین خط فقر بین‌المللی این است که توسط آن می‌توان وضعیت فقر در کشورهای مختلف را با یکدیگر مقایسه کرد. ضمناً، ایراد این روش این است که به شرایط خاص اجتماعی، سیاسی و اقتصادی هر کشور توجه کافی نشده و ممکن است با واقعیت فقر در یک کشور خاص مطابقت نداشته باشد.

مثال: خانواده‌ای شش نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. درآمد ماهانه این خانواده به دلار باید حداقل چقدر باشد تا آن‌ها زیر خط فقر نباشند؟

پاسخ

با توجه به خط فقر بین المللی، هر نفر باید لااقل $۳۷/۵ = ۳۰ \times ۱/۲۵$ (دلار) در ماه درآمد داشته باشد. چون شش نفر هستند:

$$۶ \times ۳۷/۵ = ۲۲۵ \quad \text{(دلار در ماه)}$$

شاخص دیگری مرتبط با اقتصاد افراد یا خانوار:

شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی:

متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی افراد جامعه برای مجموعه‌ای بزرگ از کالاها و خدمات مورد نیاز آن‌ها در طول یک سال است. این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

توجه کنید:

در کشور ما، این شاخص بر اساس متوسط هزینه‌ی حدود ۴۰۰ نوع کالای خوراکی، هزینه‌ی مسکن، پوشاک و خدماتی چون سلامت، حمل و نقل و تحصیل محاسبه می‌شود.

روش تعیین:

بعد از تعیین سبد هزینه‌ی خانوار (کالا یا خدمت به همراه مقدار آن)،

- مبلغ کل هزینه‌ی خانوار در سال پایه را حساب می‌کنیم.
- مبلغ کل هزینه‌ی خانوار در سال مورد نظر را حساب می‌کنیم.

در این صورت:

$$\text{شاخص بهای کالا و خدمات} = \frac{\text{مبلغ کل در سال مورد نظر}}{\text{مبلغ کل در سال پایه}} \times ۱۰۰$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمات در طول یک سال را .... گویند.

۱) شاخص توده بدنی
۲) شاخص آموزش
۳) شاخص خط فقر
۴) شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی

پاسخ

مورد چهارم صحیح است.

مثال: (از کتاب)

سبد هزینه‌ی خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده است. فرض کنید قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال در هر کیلوگرم بوده و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال در هر کیلوگرم برسد. اگر مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای نان و گوشت را در سال مورد نظر حساب می‌کنیم:

$$\frac{(200\times1500)+(80\times70000)}{(200\times1000)+(80\times50000)}\times100=\frac{300000+5600000}{200000+4000000}\times100$$
$$=\frac{5900000}{4200000}\times100=\frac{59}{42}\times100=1/405\times100=140/5$$

شاخص بسیار مهم دیگری در یک جامعه‌ی انسانی:

تورم:
تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم گویند.

نرخ تورم:
این شاخص میزان تغییرات شاخص بهای کالاها و خدمات را نسبت به سال پایه با یک عدد درصدی نشان می‌دهد:

(شاخص بها در سال پایه) − (شاخص بها در سال مورد نظر) = **نرخ تورم** (درصد)

توجه کنید:
در حالت عادی، شاخص بها در سال پایه برابر ۱۰۰ است.

مثال: فرض کنید گوشت و نان دو کالا باشند به طوری که قیمت آن‌ها در سال جاری به ترتیب ۴۰۰۰۰ و ۴۰۰۰ تومان و در سال پایه به ترتیب ۳۰۰۰۰ و ۳۰۰۰ تومان باشد و مقدار مصرف نیز به ترتیب ۳۰ و ۱۲ کیلوگرم باشد.
الف) شاخص بهای گوشت و نان را در سال جاری به‌دست آورید.
ب) نرخ تورم را حساب کنید.

پاسخ

الف) شاخص بها در سال جاری:

$$\frac{30\times40000+12\times4000}{30\times30000+12\times3000}\times100=\frac{30\times40+12\times4}{30\times30+12\times3}\times100=\frac{1248}{936}\times100$$
$$=\frac{206}{156}\times100=1/32\times100=132$$

ب) نرخ تورم برابر است با:

$$132-100=32\,\%$$

مثال: اگر بهای نان در سال ۹۹ برابر ۱۰ و نرخ تورم در سال ۹۹ نسبت به سال ۹۷ برابر ۲۰ درصد باشد، بهای نان در سال ۹۷ را بیابید.

پاسخ

اگر بهای نان در سال ۹۷ را x بگیرید، شاخص بها در سال ۹۹ برابر است با:

$$\frac{۱۰}{x}\times ۱۰۰$$

چون تورم ۲۰ درصد است، باید:

$$\frac{۱۰}{x}\times ۱۰۰-۱۰۰=۲۰ \to \to \frac{۱۰۰۰}{x}=۱۲۰ \to ۱۲۰x=۱۰۰۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰۰۰}{۱۲۰}=\frac{۱۰۰}{۱۲}=۸/۳۳$$

توجه کنید:

اگر شاخص بهای کالا در سال پایه ۱۰۰ نباشد، نرخ تورم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{نرخ تورم (درصد)}=\frac{b-a}{a}\times ۱۰۰$$

که در آن a شاخص بهای کالا در سال پایه و b شاخص بهای کالا در سال مورد نظر است.

(اگر $a=۱۰۰$ باشد، فرمول بالا به همان فرمول قبلی تبدیل خواهد شد.)

مثال: تورم قیمت کالایی از سال ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۱ برابر ۵۰ درصد و شاخص بهای این کالا در سال ۱۴۰۱ برابر ۱۷۰ است. شاخص بهای کالا در سال ۱۴۰۰ را بیابید.

پاسخ

اگر شاخص مورد نظر را با x نشان دهیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۷۰-x}{x}\times ۱۰۰=۵۰ \xrightarrow{\times x} ۱۰۰\times(۱۷۰-x)=۵۰x \xrightarrow{\div ۵۰} ۲(۱۷۰-x)=x$$

$$\to ۳۴۰-۲x=x \to ۳۴۰=۳x \Rightarrow x=\frac{۳۴۰}{۳}\cong ۱۱۳/۳$$

شاخص دیگری در جامعه:

نرخ بیکاری:

از تقسیم تعداد افراد بیکار بر تعداد افراد فعال حاصل می‌شود.

$$\text{نرخ بیکاری (درصد)}=[(\text{تعداد افراد بیکار})\div(\text{تعداد افراد فعال})]\times ۱۰۰$$

توجه کنید:

- به فردی بالای ۱۶ سال که به طور موقت بیکار شده، یا در جستجوی شغل باشد یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخصی باشد، بیکار گفته می‌شود.
- به مجموعه‌ی کل افراد بیکار و افرادی که مشغول به‌کار هستند، فعال گفته می‌شود. پس:

تعداد افراد فعال = تعداد افراد شاغل + تعداد افراد بیکار

مثال: در یک کشور نرخ بیکاری ۱۵ درصد است. اگر جمعیت فعال این کشور ۲۰ میلیون نفر باشد، تعداد بیکاران و سپس تعداد شاغلین را محاسبه کنید.

پاسخ

اگر تعداد افراد بیکار را بر حسب میلیون نفر x بگیریم، باید:

$$۱۵=\frac{x}{۲۰}\times ۱۰۰ \rightarrow ۱۵=۵x \Rightarrow x=\frac{۱۵}{۵}=۳ \quad \text{(میلیون نفر)}$$

اکنون تعداد شاغلین قابل تعیین است:

$$۲۰-۳=۱۷ \quad \text{(میلیون نفر)}$$

مثال: در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد شانزده ساله و بیشتر، شاغل هستند. در این منطقه ۲۰۰ نفر شانزده ساله و بیشتر جویای کار می‌باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) چند شغل در این منطقه ایجاد شود تا نرخ بیکاری در آن برابر ۵ درصد شود؟

پاسخ

الف) تعداد افراد فعال برابر $۱۲۰۰+۲۰۰=۱۴۰۰$ نفر است و در نتیجه:

$$\text{نرخ بیکاری}=\frac{۲۰۰}{۱۴۰۰}\times ۱۰۰=\frac{۱}{۷}\times ۱۰۰=۰/۱۴۳\times ۱۰۰=۱۴/۳\ \%$$

ب) تعداد مورد نظر را x بگیرید. در این صورت تعداد افراد بیکار $۲۰۰-x$ خواهد شد و باید نرخ بیکاری به ۵ درصد تبدیل شود:

$$\frac{۲۰۰-x}{۱۴۰۰}\times ۱۰۰=۵ \rightarrow \frac{۲۰۰-x}{۱۴}=۵ \rightarrow ۲۰۰-x=\underbrace{۱۴\times ۵}_{=۷۰}$$

$$\rightarrow -x=۷۰-۲۰۰=-۱۳۰ \Rightarrow x=\frac{-۱۳۰}{-۱}=۱۳۰$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

در یک منطقه ۱۸۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل هستند. در این منطقه ۴۰۰ نفر بالای ۱۶ سال و بیشتر جویای کار می‌باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل ایجاد شود تا نرخ بیکاری در این منطقه کمتر از ۳ درصد باشد.

پاسخ

الف) کاملاً تکرار مثال قبل است:

$$\text{نرخ بیکاری}=\frac{۴۰۰}{۲۲۰۰}\times ۱۰۰=\frac{۲}{۱۱}\times ۱۰۰\cong ۱۸/۲\ \%$$

ب) تعداد مورد نظر را x بگیرید. در این صورت تعداد افراد بیکار $۴۰۰-x$ خواهد شد و باید نرخ بیکاری کمتر از ۳ درصد شود:

$$\frac{۴۰۰-x}{۲۲۰۰}\times ۱۰۰<۳ \rightarrow \frac{۴۰۰-x}{۲۲}<۳ \rightarrow ۴۰۰-x<۶۶ \Rightarrow \underbrace{۴۰۰-۶۶}_{۳۳۴}<x$$

پس لازم است حداقل ۳۳۵ شغل ایجاد شود.

شاخص دیگری وجود دارد که میزان سهولت در درک متن را از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت قواعد نگارش (درجه‌ی خوانایی متن) مشخص می‌کند.

شاخص پایه آموزش:

این شاخص برای هر متن به صورت زیر تعریف و محاسبه می‌شود:

$0/4 \times$ (**میانگین تعداد کلمات در هر جمله + درصد کلمات «دشوار»**) = **شاخص پایه‌ی آموزش**

بعد از محاسبه، جواب را به نزدیک‌ترین عدد طبیعی تبدیل می‌کنیم. (به روش گِرد کردن)

(توسط روش فوق، عددی طبیعی از ۱ تا ۱۲ حاصل می‌شود که نشان دهنده‌ی پایه‌ی تحصیلی مربوط به آن متن یا کتاب است.)

توجه کنید:

منظور از کلمات دشوار، کلمات دو هجایی (دو بخشی) بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات است.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

برای کتابی با متوسط طول جملات ده کلمه‌ای و ۱۷ درصد کلمات سخت:

الف) شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید.

ب) این کتاب مناسب چه پایه‌ای است؟

پاسخ

محاسبه‌ی شاخص طبق روش بالا:

$$(17+10)\times 0/4 = 27\times 0/4 = 10/8 \cong 11$$

پس کتاب مناسب پایه‌ی یازدهم است.

۲ سری‌های زمانی

برخی از متغیرها در طول زمان تناوب، یعنی رفتاری تا حدود زیادی تکراری دارند. شناخت الگوی رفتـار و تکـرار آن‌هـا، باعث می‌شود شناخت بهتری از این متغیرها داشته باشیم و امکان پیش‌بینی نسبتاً دقیقی از متغیر در آینده برای ما فراهم شود.

سری زمانی:

مجموعه‌ی داده‌هایی که در طول زمان با **فاصله‌های منظم** گردآوری می‌شوند.

توجه کنید:

اگر روی محور افقی «زمان» و روی محور عمودی «مقادیر مشاهده شده» (یعنی: داده‌ها) را مشخص کرده و نمودار پراکنش نگاشت داده‌ها را توسط پاره خطهایی رسم کنیم، **نمودار** آن سری زمانی حاصل می‌شود.

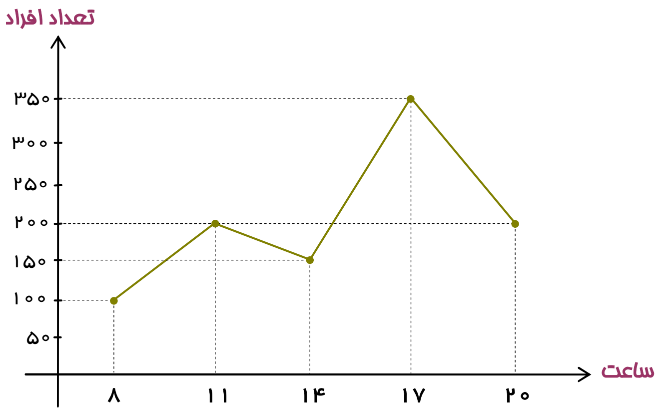
مثال: تعداد مراجعان به یک مرکز خرید بین ساعات ۸ تا ۲۰ طبق جدول زیر است:

ساعت	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰
تعداد مشتری	۱۰۰	۲۰۰	۱۵۰	۳۵۰	۲۰۰

نمودار سری زمانی مربوطه را رسم کنید.

پاسخ

نقاط مربوطه‌ی (۸,۱۰۰)، (۱۱,۲۰۰)، (۱۴,۲۵۰) و ... را در یک دستگاه مشخص کرده و آن‌ها را به هم متصل می‌کنیم:



0912 172 0728
@alireza_karbalaie

در ادامه، توسط سری زمانی یا نمودار آن، به دو روش زیر مقادیری از متغیر را تخمین زده یا پیش‌بینی می‌کنیم:

درون‌یابی و برون‌یابی

درون‌یابی:

تخمین مقادیر بین داده‌های ثبت شده است.

(چنان‌که خواهیم دید، درون‌یابی و برون‌یابی به روش خطی انجام خواهد شد. روش انجام هر دو در ادامه . . .)

برای انجام درون‌یابی یا برون‌یابی به نوشتن معادله‌ی خط نیاز است، ببینید:

یادآوری:

معادله یک خط توسط شیب m و مختصات یک نقطه‌ی $(x_۱, y_۱)$ روی آن نوشته می‌شود:

$$\boxed{y - y_۱ = m(x - x_۱)}$$

بنابراین:

وقتی مختصات دو نقطه‌ی $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ از یک خط را داریم، ابتدا $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ را مشخص کرده و بعد توسط مختصات یکی از دو نقطه به دلخواه، معادله را می‌نویسیم.

مثال: معادله‌ی خط گذرا از نقاط $(-۲, ۵)$ و $(۳, -\frac{۵}{۲})$ را بنویسید.

پاسخ

شیب برابر است با: $m = \frac{-\frac{۵}{۲} - ۵}{۳ - (-۲)} = \frac{-\frac{۱۵}{۲}}{۵} = -\frac{۳}{۲}$ ، معادله:

$$y - ۵ = -\frac{۳}{۲}(x + ۲) \rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x - ۳ + ۵ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + ۲$$

مثال: تعداد مشتری‌ها در یک مرکز خرید بین ساعات ۸ تا ۱۶ به صورت زیر داده شده است:

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
تعداد مشتری	۳۰۰	۶۵۰	۷۰۰	۴۰۰	۲۰۰

الف) نمودار سری زمانی را رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، تعداد مشتری این فروشگاه را در ساعت ۱۳ تخمین بزنید. (به روش درون‌یابی)

پاسخ

الف) نمودار مشابه قبل در دستگاه رسم می‌شود. (به عهده‌ی دانش‌آموزان عزیز.)

ب) روش درون‌یابی چنین است:

چون ساعت ۱۳ در جدول بین ساعت ۱۲ و ۱۴ قرار دارد، با توجه به تعداد مشتری‌ها در این ساعت‌ها، نقاط (۱۲,۷۰۰) و (۱۴,۴۰۰) را در نظر گرفته و معادله‌ی خط گذرا از آن‌ها را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۴۰۰-۷۰۰}{۱۴-۱۲}=-۱۵۰ \rightarrow y-۷۰۰=-۱۵۰(x-۱۲) \rightarrow y=-۱۵۰x+۱۸۰۰+۷۰۰$$
$$\rightarrow y=-۱۵۰x+۲۵۰۰$$

اکنون کافی است عدد ۱۳ جای x قرار گیرد:

$$-۱۵۰\times۱۳+۲۵۰۰=-۱۹۵۰+۲۵۰۰=۵۵۰$$

برون‌یابی:

تخمین مقادیر قبل یا بعد از داده‌های ثبت شده است.

برای نمونه:

سؤال (نهایی- خرداد ۱۴۰۲): تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده را درون‌یابی گویند. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

نادرست است؛ زیرا:

عبارت آورده شده، تعریف برون‌یابی است!

مثال: با توجه به سری زمانی داده شده در جدول زیر، میزان فروش در سال هفتم را برآورد کنید.

سال	۲	۳	۴	۵
فروش	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵

پاسخ

روش برون‌یابی چنین است:

گام اول: با میانگین گرفتن از هر دوی سطر اول و سطر دوم جدول، یک نقطه مشخص می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۲+۳+۴+۵}{۴}=\frac{۱۴}{۴}=\frac{۷}{۲}=۳/۵ \quad و \quad \bar{y}=\frac{۱۰+۱۵+۲۰+۲۵}{۴}=\frac{۷۰}{۴}=\frac{۳۵}{۲}=۱۷/۵$$

پس میانگین جدول، یعنی؛ نقطه‌ی (۳/۵,۱۷/۵) مشخص می‌شود.

گام دوم: چون سال هفتم که مورد نظر است، در جدول نزدیک به سال پنجم قرار دارد، نقطه‌ی (۵,۲۵) را نیز در نظر می‌گیریم و توسط دو نقطه‌ای که اکنون داریم، معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۲۵-۱۷/۵}{۵-۳/۵}=\frac{۷/۵}{۱/۵}=\frac{۷۵}{۱۵}=۵ \rightarrow y-۲۵=۵(x-۵) \Rightarrow y=۵x$$

در پایان، کافی است $x=۷$ را در معادله‌ی خط جایگزین کنیم:

$$y=۵\times۷=۳۵ \quad \text{(تخمین فروش در سال هفتم)}$$

خطای تخمین:

وقتی مقداری را توسط درون‌یابی یا برون‌یابی تخمین می‌زنیم، اگر از مقدار واقعی اطلاع داشته باشیم، خطای تخمین را با e نشان داده و به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$e=|\text{مقدار تخمین} - \text{مقدار واقعی}|$$

برای نمونه؛

اگر توسط درون‌یابی یا برون‌یابی به عدد ۲۴۵/۵ برسیم و به طریقی مطلع شویم که مقدار واقعی ۲۴۳ بوده است، خطا برابر می‌شود با:

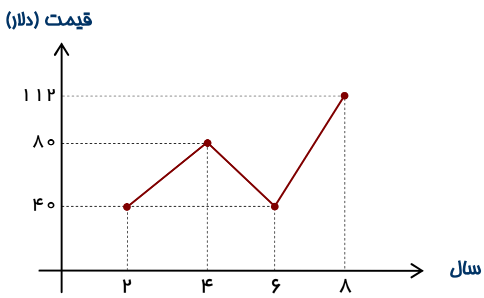
$$e=|۲۴۳-۲۴۵/۵|=|-۲/۵|=۲/۵$$

مثال: با توجه به نمودار سری زمانی روبرو:

الف) قیمت کالا را در سال سوم تخمین بزنید.

ب) قیمت کالا را در سال دهم تخمین بزنید.

پ) اگر قیمت واقعی در سال‌های سوم و دهم به ترتیب ۷۰ و ۱۳۰ دلار باشد، خطای تخمین‌های خود را حساب کنید.



پاسخ

الف) طبق درون‌یابی:

معادله‌ی خط گذرا از نقاط (۲,۴۰) و (۴,۸۰) را نوشته و عدد ۳ را جایگزین می‌کنیم:

$$m=\frac{۸۰-۴۰}{۴-۲}=\frac{۴۰}{۲}=۲۰ \rightarrow y-۴۰=۲۰(x-۲) \rightarrow y=۲۰x \xrightarrow{x=۳} ۲۰\times۳=۶۰$$

ب) طبق برون‌یابی:

به روش گفته شده، توسط تمام نقاط (۲,۴۰)، (۴,۸۰)، (۶,۴۰) و (۸,۱۱۲)، یک نقطه مشخص می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۴}=\frac{۲۰}{۴}=۵ \quad و \quad \bar{y}=\frac{۴۰+۸۰+۴۰+۱۱۲}{۴}=\frac{۲۷۲}{۴}=۶۸$$

نقطه‌ی (۵,۶۸) حاصل شد؛ چون سال دهم به سال ۸ در جدول نزدیک است، به کمک (۸,۱۱۲) و (۵,۶۸) معادله خط می‌نویسیم:

$$m=\frac{۱۱۲-۶۸}{۸-۵}=\frac{۴۴}{۳}\cong۱۵ \rightarrow y-۶۸=۱۵(x-۵) \Rightarrow y=۱۵x-۷$$

اکنون $x=۱۰$ را جایگزین می‌کنیم:

$$y=۱۵\times(۱۰)-۷=۱۴۳ \qquad \text{(تخمین قیمت در سال دهم)}$$

پ) خطای درون‌یابی برابر $|۷۰-۶۰|=۱۰$ و خطای برون‌یابی برابر $|۱۳۰-۱۴۳|=|-۱۳|=۱۳$ است.

0912 172 0728
@alireza_karbalaie

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

در ابتدا، نمونه تست‌ها و برخی نکات مرتبط با خط فقر را می‌آوریم.

درآمد افراد یک جامعه به صورت مرتب شده از کوچک به بزرگ در زیر آمده است. اگر خط فقر به روش میانگین ۱/۰۵ میلیون تومان باشد، خط فقر به روش میانه چند میلیون تومان است؟

$$۰/۸,۰/۹,۱/۶,m,n,۲/۹,۳/۵,۳/۷$$

(1) ۱ (2) ۰/۹۵ (3) ۰/۹ (4) ۰/۸۵

گزینه ۴

باید میانگین برابر $\bar{x}=۲\times۱/۰۵=۲/۱$ باشد. پس:

$$\frac{۰/۸+۰/۹+۱/۶+m+n+۲/۹+۳/۵+۳/۷}{۸}=۲/۱ \rightarrow ۱۳/۴+m+n=۸\times۲/۱=۱۶/۸$$

$$\Rightarrow m+n=۱۶/۸-۱۳/۴=۳/۴$$

چون $\frac{۸+۱}{۲}=۴/۵$ است، میانه توسط داده‌های چهارم و پنجم حساب می‌شود:

$$Q_۲=\frac{m+n}{۲}=\frac{۳/۴}{۲}=۱/۷ \rightarrow \text{خط فقر به روش میانه: } \frac{Q_۲}{۲}=\frac{۱/۷}{۲}=۰/۸۵ \text{ میلیون تومان}$$

با توجه به جدول زیر، اگر بخواهیم به افرادی که پایین‌تر از خط فقر (بر حسب میانه) قرار دارند، یارانه پرداخت کنیم، به چند نفر یارانه تعلق می‌گیرد؟

درآمد ماهانه (هزار تومان)	تعداد اعضای خانوار
۴۲۰۰	۳
۵۲۰۰	۴
۲۰۰۰	۲
۷۵۰۰	۵
۲۶۰۰	۲

(1) ۰
(2) ۳
(3) ۹
(4) ۶

گزینه ۱

برای تعیین خط فقر بر حسب میانه، درآمد هر یک از ۱۶ نفر را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۴۲۰۰}{۳}=۱۴۰۰ \text{ و } \frac{۵۲۰۰}{۴}=۱۳۰۰ \text{ و } \frac{۲۰۰۰}{۲}=۱۰۰۰ \text{ و } \frac{۷۵۰۰}{۵}=۱۵۰۰ \text{ و } \frac{۲۶۰۰}{۲}=۱۳۰۰$$

درآمدها به ترتیب از چپ: ۵ نفر ۱۵۰۰ , ۳ نفر ۱۴۰۰ , ۶ نفر ۱۳۰۰ , ۲ نفر ۱۰۰۰

چون $\frac{16+1}{2}=8/5$ است، میانه توسط داده‌های هشتم و نهم، یعنی $\frac{1300+1400}{2}=1350$ و در نتیجه خط فقر برابر $\frac{1350}{2}=675$ است. می‌بینید که هیچ فردی درآمد کمتر از خط فقر ندارد.

با توجه به جدول زیر، خط فقر بر حسب میانه از خط فقر بر حسب میانگین . . .

درآمد ماهانه (هزار تومان)	تعداد اعضای خانوار
۲۰۰۰	۱
۲۴۰۰	۲
۳۰۰۰	۳
۴۸۰۰	۴
۱۰۰۰۰	۵
۶۰۰۰	۶

❶ تقریباً ۷۱ هزار تومان کمتر است.
❷ تقریباً ۱۴۲ هزار تومان کمتر است.
❸ تقریباً ۱۴۲ هزار تومان بیشتر است.
❹ تقریباً ۷۱ هزار تومان بیشتر است.

گزینه ۱

تعداد اعضای جدول ۲۱ نفر و جمع درآمد کل خانواده‌ها ۲۸۲۰۰ هزار تومان است. میانگین درآمد هر نفر:

$$\bar{x}=\frac{28200}{21}\rightarrow \text{خط فقر: } \frac{\bar{x}}{2}=\frac{\frac{28200}{21}}{2}=\frac{28200}{42}=671/42 \text{ هزار تومان}$$

برای تعیین خط فقر بر حسب میانه، درآمد هر یک از افراد را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{2000}{1}=2000 \text{ و } \frac{2400}{2}=1200 \text{ و } \frac{3000}{3}=1000 \text{ و } \frac{4800}{4}=1200 \text{ و } \frac{10000}{5}=2000 \text{ و } \frac{6000}{6}=1000$$

درآمدها به ترتیب از چپ: ۶ نفر ۲۰۰۰ , ۶ نفر ۱۲۰۰ , ۹ نفر ۱۰۰۰

چون $\frac{21+1}{2}=11$ است، میانه برابر داده‌ی یازدهم: ۱۲۰۰ و در نتیجه خط فقر برابر $\frac{1200}{2}=600$ است. پس خط فقر بر حسب میانه، از خط فقر بر حسب میانگین کمتر است:

$$671/42-600=71/42$$

اگر درآمد افراد یک جامعه چهار برابر شود، مقادیر خط فقر با استفاده از میانگین (a) و خط فقر با استفاده از میانه (b) چه تغییری می‌کند؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ a و b دو برابر می‌شوند.
❷ a و b چهار برابر می‌شوند.
❸ a دو برابر و b چهار برابر می‌شود.
❹ a چهار برابر و b دو برابر می‌شود.

گزینه ۲

طبق خواص میانگین و میانه هنگام تغییر داده‌ها، واضح است:
با چهار برابر شدن داده‌ها، میانگین و میانه نیز ۴ برابر شده و در نتیجه نصف‌های آن‌ها نیز چهار برابر خواهند شد.

نکته ۱

تعیین مناسب خط فقر:

چون میانگین معمولاً مرکزیت داده‌ها را بهتر نشان می‌دهد، تعیین خط فقر توسط میانگین برتری نسبی دارد.

ولی؛

اگر در بین داده‌ها، داده‌ی دورافتاده داشته باشیم، میانه مرکزیت داده‌ها را دقیق‌تر نشان داده و خط فقر باید توسط میانه تعیین شود.

در یک جامعه‌ی آماری، درآمد افراد بر حسب میلیون تومان عبارتند از: ۳،۴،۴،۵،۶،۸ و در جامعه‌ی دیگر درآمد افراد بر حسب میلیون تومان عبارتند از: ۱،۱،۲،۳،۴،۷۰. در هر جامعه، خط فقر را به روش مناسب حساب می‌کنیم. اختلاف این دو خط فقر چقدر است؟

❶ ۱　❷ ۱/۲۵　❸ ۲　❹ ۲/۲۵

گزینه ۲

در جامعه‌ی اول:

$$\bar{x}=\frac{۳۰}{۶}=۵ \rightarrow \text{خط فقر: } \frac{\bar{x}}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

در جامعه‌ی دوم، داده‌ی دورافتاده‌ی ۷۰ وجود داشته و بنابراین باید میانه بکار رود:

$$Q_۲=\frac{۲+۳}{۲}=۲/۵ \rightarrow \text{خط فقر به روش میانه: } \frac{Q_۲}{۲}=\frac{۲/۵}{۲}=۱/۲۵$$

اختلاف این دو مقدار $۲/۵-۱/۲۵=۱/۲۵$ است.

در یک نمونه‌ی تصادفی از کارکنان یک شرکت، میانه و میانگین درآمد ماهیانه‌ی آنان به ترتیب ۲۵۰ و ۳۰۰ واحد پول است. اگر سه نفر آنان درآمد بسیار بالایی داشته باشند، خط فقر کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۹)

❶ ۱۲۵　❷ ۱۵۳　❸ ۱۸۳　❹ ۲۵۰

گزینه ۱

سه نفر درآمد بسیار بالا، یعنی داده‌های مربوطه دورافتاده هستند و در نتیجه باید میانه را بکار ببریم:

$$\text{خط فقر به روش میانه: } \frac{Q_۲}{۲}=\frac{۲۵۰}{۲}=۱۲۵$$

درآمد هفتگی افرادی در جامعه ۲/۸، ۳/۵، ۰/۷، m، ۲/۴، ۰/۹، ۴/۹، ۱، n، ۱/۴ و ۴/۲ (برحسب میلیون تومان) است. حداکثر مقدار $m+n$ برای آن‌که به روش میانه فقط دو نفر زیر خط فقر قرار گیرند، کدام است؟

❶ ۴/۸　❷ ۳/۶　❸ ۲/۸　❹ ۴

گزینه ۴

بدون دو داده‌ی m و n که نامعلوم هستند، داده‌ها را مرتب می‌نویسیم:

$$۰/۷, ۰/۹, ۱, ۱/۴, ۲/۴, ۲/۸, ۳/۵, ۴/۲, ۴/۹$$

پس باید ۰/۷ و ۰/۹ زیر خط فقر بوده ولی ۱ چنین نباشد. یعنی:

$$۰/۹ < \frac{Q_۲}{۲} \leq ۱ \Rightarrow ۱/۸ < Q_۲ \leq ۲$$

برای این‌که بیشترین $m+n$ حاصل شود، m و n را بیشترین مقادیر قرار می‌دهیم:

$$۰/۷, ۰/۹, ۱, ۱/۴, \underset{m}{۲}, \underset{n}{۲}, ۲/۴, ۲/۸, ۳/۵, ۴/۲, ۴/۹$$

جواب $۲+۲=۴$ است.

نمونه‌هایی مرتبط با شاخص بهای کالا و خدمات و تورم ببینید:

اگر سبد هزینه‌ی خانواری در سال پایه از دو کالای نان و مرغ تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۵۰۰ و ۴۰۰۰ تومان و مقدار مصرف یک خانواده در سال به ترتیب برابر ۵۰ و ۲۰۰ کیلوگرم و قیمت این کالاها در سال مورد نظر به ۶۰۰ و ۶۰۰۰ تومان رسیده باشد، تورم در سال مورد نظر چند درصد می‌باشد؟

❶ ۳۷ ❷ ۱۳۷ ❸ ۱۴۹ ❹ ۴۹

گزینه ۴

شاخص بها در سال جدید:

$$\frac{۵۰\times۶۰۰+۲۰۰\times۶۰۰۰}{۵۰\times۵۰۰+۲۰۰\times۴۰۰۰}\times۱۰۰=\frac{۵\times۶+۲\times۶۰۰}{۵\times۵+۲\times۴۰۰}\times۱۰۰=\frac{۱۲۳۰}{۸۲۵}\times۱۰۰\cong۱۴۹ \text{ درصد}$$

اکنون باید شاخص بها در سال پایه که ۱۰۰ است را از عدد بالا کم کنیم:

$$۱۴۹-۱۰۰=۴۹ \text{ درصد}$$

توجه کنید:

همان‌طور که در ساده کردن کسر بالا و برخی نمونه‌های بعدی می‌بینید، می‌توانید تعداد صفرهایی یکسان از تمام عامل‌های جمع (مانند ۵۰×۶۰۰ و ۲۰۰×۴۰۰۰) را حذف کنید تا محاسبات سریع‌تر انجام شود.

قیمت برنج و گوشت در سال پایه به ترتیب ۴۲ و ۱۳۷/۵ هزار تومان و در سال مورد نظر به ترتیب ۱۲۰ و ۲۴۰ هزار تومان است. اگر شاخص بهای برنج و گوشت در سال مورد نظر ۲۴۰ و مقادیر مصرفی برنج و گوشت به ترتیب a و ۱۶ کیلوگرم باشد، مقدار a چند کیلوگرم است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ ۴۸ ❷ ۵۰ ❸ ۶۴ ❹ ۷۵

گزینه ۴

طبق اطلاعات داده شده:

$$\frac{a\times ۱۲۰+۱۶\times ۲۴۰}{a\times ۴۲+۱۶\times ۱۳۷/۵}\times ۱۰۰=۲۴۰ \xrightarrow{\div} \frac{۱۲۰a+۳۸۴۰}{۴۲a+۲۲۰۰}\times ۱۰=\frac{۲۴}{۱}$$

$$\rightarrow ۱۰(۱۲۰a+۳۸۴۰)=۲۴(۴۲a+۲۲۰۰) \rightarrow ۱۲۰۰a+۳۸۴۰۰=۱۰۰۸a+۵۲۸۰۰$$

$$\rightarrow ۱۹۲a=۱۴۴۰۰ \Rightarrow a=\frac{۱۴۴۰۰}{۱۹۲}=۷۵$$

قیمت نان در سال ۹۶ از قیمت آن در سال پایه، ۸۰ درصد بیشتر بوده است. شاخص قیمت نان در سال ۹۶ چقدر بوده است؟

❶ ۸۰ ❷ ۱۲۰ ❸ ۱۶۴ ❹ ۱۸۰

گزینه ۴

اگر شاخص بهای نان در سال ۹۶ را x بگیریم، باید:

$$x-۱۰۰=۸۰ \Rightarrow x=۸۰+۱۰۰=۱۸۰$$

اگر سبد هزینه‌ی خانواری شامل نان، برنج و گوشت باشد و میزان مصرف نان این خانواده، ۴ برابر مصرف گوشت و میزان مصرف برنج آن‌ها، ۱/۵ برابر مصرف نان باشد، در صورتی‌که قیمت نان و گوشت و برنج در سال پایه به ترتیب ۵۰۰، ۲۲۰۰۰ و ۶۰۰۰ و در سال مورد نظر به ترتیب برابر ۱۰۰۰، ۴۱۶۰۰ و ۸۵۰۰ تومان باشد، شاخص بهای این سه کالا در سال مورد نظر کدام است؟

❶ ۱۳۸ ❷ ۱۵۶ ❸ ۱۶۱ ❹ ۱۷۲

گزینه ۳

اگر میزان مصرف گوشت را x بگیرید، مصرف نان $۴x$ و مصرف برنج $۶x = ۴x\times ۱/۵$ بوده است. پس شاخص بها برابر است با:

$$\frac{۴x\times ۱۰۰۰+x\times ۴۱۶۰۰+۶x\times ۸۵۰۰}{۴x\times ۵۰۰+x\times ۲۲۰۰۰+۶x\times ۶۰۰۰}\times ۱۰۰=\frac{۴x\times ۱۰+x\times ۴۱۶+۶x\times ۸۵}{۴x\times ۵+x\times ۲۲۰+۶x\times ۶۰}\times ۱۰۰$$

$$=\frac{x(۴۰+۴۱۶+۵۱۰)}{x(۲۰+۲۲۰+۳۶۰)}\times ۱۰۰=\frac{۹۵۶}{۶۰۰}\times ۱۰۰=\frac{۹۶۶}{۶}=۱۶۱$$

اگر در شاخص بهای کالا، واحد اندازه‌گیری دو برابر شود، آنگاه تغییرات مقدار این شاخص کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

❶ تغییر نمی‌کند. ❷ قابل پیش‌بینی نیست. ❸ دو برابر می‌شود. ❹ نصف می‌شود.

گزینه ۱

چون هم قیمت‌ها در صورت کسر و هم در مخرج دو برابر می‌شوند، با فاکتورگیری از عدد ۲ در صورت و مخرج (دقیقاً مانند فاکتورگیری از x در پاسخ تست قبل)، بعد از ساده کردن ۲ در صورت و مخرج، شاخص با قیمت‌های قبلی و به صورت یکسان حاصل می‌شود.

نتیجه:

اگر قیمت‌ها از تومان به ریال یا برعکس تبدیل شوند، در شاخص بها و تورم، تغییری ایجاد نمی‌شود!

توجه کنید:

در حالت عادی، شاخص بها در سال پایه ۱۰۰ است و در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

درصد تورم + ۱۰۰ = شاخص بها در سال جدید

اگر سبد کالای خانواده‌ای از سه کالای A، B و C تشکیل شده باشد و قیمت کالاها در سال‌های ۹۶ و ۹۷ مطابق جدول زیر باشد، x چقدر باشد که تورم این کالاها با هم در سال ۹۷ نسبت به سال پایه‌ی ۹۶ برابر ۲۰ درصد باشد؟ (مقادیر مصرف کالاهای A، B و C در سال به ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۴۰ کیلوگرم است.)

کالا	قیمت (سال ۹۶)	قیمت (سال ۹۷)
A	۱۲۰۰۰	۱۸۰۰۰
B	۸۰۰۰	x
C	۱۰۰۰۰	۱۱۰۰۰

❶ ۹۲۴۰
❷ ۹۶۰۰
❸ ۸۹۶۰
❹ ۱۰۳۲۰

گزینه ۳

طبق مطلب قبل، باید شاخص بها در سال ۹۷ برابر ۱۲۰ = ۲۰ + ۱۰۰ درصد باشد:

$$\frac{20\times18000+50\times x+40\times11000}{20\times12000+50\times8000+40\times10000}\times100=120$$

$$\xrightarrow{\text{حذف یک صفر در صورت و مخرج}}\frac{2\times18000+5\times x+4\times11000}{2\times12000+5\times8000+4\times10000}\times100=120$$

$$\xrightarrow{\text{حذف دو صفر مخرج با ضریب ۱۰۰}}\frac{36000+5x+44000}{2\times120+5\times80+4\times100}=120\rightarrow\frac{80000+5x}{1040}=120$$

$$\rightarrow 80000+5x=124800\rightarrow 5x=44800\Rightarrow x=\frac{44800}{5}=8960$$

نمونه‌هایی مرتبط با شاخص بیکاری را در ادامه ببینید:

در یک جامعه از بین جمعیت فعال آن، تعداد بیکاران ۷ میلیون نفر و تعداد افراد شاغل ۱۳ میلیون نفر هستند. نرخ بیکاری در این جامعه چند درصد است؟

❶ ۳۳　❷ ۳۵　❸ ۴۲　❹ ۴۷

گزینه ۲

چون جمعیت فعال ۲۰ = ۱۳ + ۷ میلیون نفر است:

$$\text{نرخ بیکاری}=\frac{7}{20}\times100=7\times5=35\ \%$$

در یک کشور، جمعیت شاغل دو برابر جمعیت بیکار است. اگر جمعیت فعال این کشور ۱۲۰ میلیون نفر باشند، نرخ بیکاری تقریباً چند درصد است؟

❶ ۴۰/۳ ❷ ۳۳/۳ ❸ ۳۰ ❹ ۲۸

گزینه ۲

اگر جمعیت بیکار را x بگیریم، جمعیت شاغل $2x$ است و باید:

$$x+2x=120 \rightarrow 3x=120 \Rightarrow x=\frac{120}{3}=40 \quad \text{(میلیون نفر)}$$

در نتیجه نرخ بیکاری برابر است با:

$$\frac{40}{120}\times 100=\frac{100}{3}=33/3\ \%$$

---

۲۰ درصد از جمعیت ۵۰ میلیونی یک کشور کمتر از ۱۶ سال سن دارند. اگر ۷۰ درصد از افراد بالای ۱۶ سال در این کشور دارای تحصیلات دانشگاهی و نرخ بیکاری در این کشور ۲۵ درصد و تعداد بیکاران با تحصیلات دانشگاهی ۱/۵ برابر تعداد بیکاران فاقد تحصیلات دانشگاهی باشد، نرخ بیکاری تحصیل کردگان دانشگاهی چند درصد است؟

❶ ۲۵ ❷ ۳۳/۳ ❸ ۲۶/۳ ❹ ۲۱/۴

گزینه ۴

باید ۸۰ درصد جمعیت کشور، ۱۶ سال یا بیشتر داشته باشند:

$$\frac{80}{100}\times 50=8\times 5=40 \quad \text{میلیون نفر (تعداد افراد فعال)}$$

چون نرخ بیکاری ۲۵ درصد است، می‌توان تعداد افراد بیکار را حساب کرد:

$$\frac{x}{40}\times 100=25 \xrightarrow{\times 40} 100x=1000 \Rightarrow x=10 \quad \text{میلیون نفر (تعداد افراد بیکار)}$$

اگر تعداد بیکاران فاقد تحصیلات a باشد، تعداد تحصیل کردگان بیکار $1/5a$ بوده و:

$$a+1/5a=10 \rightarrow 2/5a=10 \Rightarrow a=\frac{10}{2/5}=4 \quad \text{میلیون نفر}$$

پس $6=4-10$ میلیون نفر تحصیل کرده‌ی بیکار داریم و چون تعداد کل آن‌ها $\frac{70}{100}\times 40=7\times 4=28$ میلیون نفر است، نرخ بیکاری آن‌ها می‌شود:

$$\frac{6}{28}\times 100=\frac{600}{28}=21/4\ \%$$

در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم شود، نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

❶ ۵۰ ❷ ۱۲۵ ❸ ۱۷۵ ❹ ۲۵۰

گزینه ۳

چون n نفر معادل $\frac{۱}{۵}=\frac{۲۰}{۱۰۰}$ از تعداد بیکاران است، تعداد بیکاران $۵n$ نفر بوده است. با توجه به کاهش ۵ درصدی بیکاری؛

$$\frac{n}{۱۵۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰} \rightarrow n=\frac{۱۵۰۰\times ۵}{۱۰۰}=۷۵ \Rightarrow ۵n=۳۷۵ \quad (\text{نفر})$$

یعنی ۳۷۵ نفر بیکار بوده‌اند و تاکنون با ایجاد ۷۵ شغل، تعداد بیکاران ۳۰۰ نفر شده است. اکنون x شغل دیگر ایجاد می‌کنیم تا نرخ بیکاری $\frac{۱}{۳}=۱-\frac{۲}{۳}$ نرخ بیکاری اولیه شود:

$$\frac{۳۰۰-x}{۱۵۰۰}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳۷۵}{۱۵۰۰} \xrightarrow{\times ۱۵۰۰} ۳۰۰-x=۱۲۵ \Rightarrow x=۳۰۰-۱۲۵=۱۷۵ \quad (\text{نفر})$$

به یادآوری شاخص توده‌ی بدنی (نماتوب) و نمونه تست‌هایی از آن توجه کنید.

نکته ۲

نماتوب یا BMI:

این شاخص برای هر شخص با توجه به وزن و اندازه‌ی قد او، چنین محاسبه می‌شود:

$$\text{BMI}=\frac{\text{وزن بر حسب کیلوگرم}}{\text{مجذور قد بر حسب متر}}$$

بعد از محاسبه‌ی این عدد، مطلوب بودن یا نبودن وزن شخص مشخص می‌شود:

$\text{BMI}<۱۹$ یعنی: شخص کمبود وزن دارد.

$۱۹\leq \text{BMI}<۲۵$ یعنی: شخص در محدوده‌ی سلامت وزنی است.

$۲۵\leq \text{BMI}<۳۰$ یعنی: شخص اضافه وزن دارد.

$\text{BMI}\geq ۳۰$ یعنی: شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد.

به یاد داشته باشید:

- باید $\text{BMI}=۱۹$ یا بیشتر از ۱۹، ولی کمتر از ۲۵ باشد، تا شخص دارای سلامت وزنی باشد.
- اگر BMI کمتر از ۱۹ باشد، شخص کمبود وزن دارد.
- اگر BMI برابر ۲۵ یا بیشتر باشد، شخص اضافه وزن دارد.

بعلاوه:

در محدوده‌ی سلامت وزنی، با توجه به سنِ شخص، عددهای مناسب و ایده‌آل زیر بیان شده است:

نماتوب	گروه سنی
۲۲	۱۹_۲۴
۲۳	۲۵_۳۴
۲۴	۳۵_۴۴
۲۵	۴۵_۵۴

(نیاز به حفظ کردن جدول نیست!)

وزن مطلوب شخصی با قد ۲۰۰ سانتی‌متر و شاخص توده‌ی بدنی ۲۴، چقدر باید باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۹۶ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

گزینه ۲

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

اندازه‌ی قد بر حسب متر برابر $\frac{200}{100}=2$ متر است. اگر وزن مطلوب را با x نشان دهیم، باید:

$$\frac{x}{2^2}=24 \rightarrow \frac{x}{4}=24 \Rightarrow x=4\times 24=96 \quad \text{کیلوگرم}$$

با توجه به جدول زیر، اگر بدانیم نماتوب (BMI) علی نسبت به نماتوب ایده‌ال سن او ۲ واحد اختلاف دارد و همچنین قد او ۲۰۰ سانتی‌متر باشد، مقدار وزن علی در حال حاضر چند کیلوگرم است؟ (علی ۲۸ ساله است و کمبود وزن دارد.)

گروه سنی	۱۹-۲۴	۲۵-۳۴	۳۵-۴۴	۴۵-۵۴	۵۵-۶۴
نماتوب ایده‌ال	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶

❶ ۸۴ ❷ ۱۰۰ ❸ ۹۰ ❹ ۹۴

گزینه ۱

برای سن ۲۸، نماتوب ایده‌آل ۲۳ است و در نتیجه نماتوب علی باید $23-2=21$ باشد. چون قد او ۲ متر است:

$$\frac{x}{2^2}=21 \rightarrow \frac{x}{4}=21 \Rightarrow x=4\times 21=84 \quad \text{کیلوگرم}$$

توسط شاخص بعدی می‌توان پایه‌ی (سطح) آموزشی یک متن یا کتاب انگلیسی را مشخص کرد. در واقع این شاخص، میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت قواعد نگارش (درجه‌ی خوانایی متن) را مشخص می‌کند.

نکته ۳

شاخص پایه آموزش:

این شاخص برای هر متن به صورت زیر تعریف و محاسبه می‌شود:

شاخص پایه‌ی آموزش = (میانگین تعداد کلمات در هر جمله + درصد کلمات «دشوار») $0/4\times$

بعد از محاسبه، جواب را به نزدیک‌ترین عدد طبیعی تبدیل می‌کنیم. (به روش گِرد کردن)

از این شاخص عددی طبیعی از ۱ تا ۱۲ به‌دست می‌آید که نشان دهنده‌ی پایه‌ی تحصیلی مربوط به آن کتاب است.

توجه کنید:

هنگام گرد کردن عدد به‌دست آمده به روش بالا ؛

اگر رقم دهم آن عدد اعشاری ۵ یا بیشتر باشد، عدد طبیعی بالاتر را انتخاب کرده و در غیر این صورت، عدد طبیعی قبلی را انتخاب می‌کنیم. برای نمونه؛

(پایه‌ی دوازدم) $11/51 \longrightarrow 12$ و (پایه‌ی هفتم) $7/41 \longrightarrow 7$

برای کتابی با متوسط طول جملات ۱۰ کلمه‌ای و ۱۵ درصد کلمه‌ی دشوار، شاخص پایه‌ی آموزش کدام است؟

❶ ۸ ❷ ۹ ❸ ۱۰ ❹ ۱۱

گزینه ۳

طبق رابطه‌ی گفته شده‌ی بالا:

$$(۱۵+۱۰)\times ۰/۴=۲۵\times ۰/۴=۱۰$$

در کتاب لاتین **A**، مجموع درصد لغات دشوار و میانگین تعداد لغات هر جمله برابر ۱۳ و در کتاب لاتین **B**، مقدار فوق برابر ۱۸ می باشد. شاخص پایه‌ی آموزش کتاب **B** چقدر از شاخص پایه‌ی آموزش کتاب **A** بیشتر است؟

❶ ۱ ❷ ۵ ❸ ۲ ❹ ۳

گزینه ۳

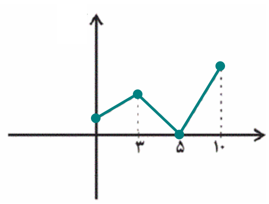
مشابه مورد قبل:

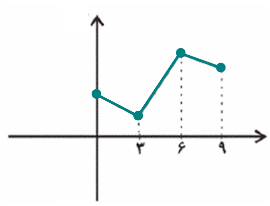
$$\text{شاخص پایه‌ی آموزش A}=[۱۳\times ۰/۴]=[۵/۲]=۵$$
$$\text{شاخص پایه‌ی آموزش B}=[۱۸\times ۰/۴]=[۷/۲]=۷$$

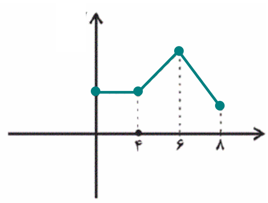
جواب برابر $۷-۵=۲$ است.

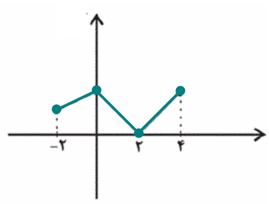
به نمونه تست‌ها و بررسی بیشتری از سری‌های زمانی توجه کنید.

کدام نمودار زیر می‌تواند یک نمودار سری زمانی را نشان دهد؟ (محور افقی را فواصل زمانی در نظر بگیرید.)

❶


❷


❸


❹


گزینه ۲

باید نقاط متوالی روی محور افقی (فواصل زمانی) با هم فاصله‌ی یکسان داشته باشند.

توجه کنید:

در گزینه‌ی چهارم فاصله‌ها یکسان است، ولی زمان -۲ هم وجود دارد که ممکن نیست.

در یک مرکز خرید، تعداد مشتری‌ها بین ساعت ۹ تا ۱۳ در جدول زیر آمده است. درون‌یابی خطی آن در ساعت ۱۰/۵ کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۸)

۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۰۰	۱۵۰	۱۹۰	۲۵۰	۱۲۰

❶ ۱۷۰ ❷ ۱۷۲ ❸ ۱۷۵ ❹ ۱۷۸

گزینه ۱

با استفاده از نقاط $(10,150)$ و $(11,190)$، معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{190-150}{11-10}=40 \rightarrow y-150=40(x-10) \rightarrow y=40x-250$$

اکنون کافی است عدد $10/5$ جای x قرار گیرد: $40\times10/5-250=420-250=170$

روش دوم: (روش کوتاه)

چون عدد $10/5$ میانگین عددهای 10 و 11 است، درون‌یابی نیز میانگین 150 و 190 خواهد بود: $\frac{150+190}{2}=170$

تعداد مراجعه کنندگان به یک درمانگاه بین ساعات ۸ تا ۱۸ یک روز به صورت زیر ثبت شده است. برای برون‌یابی تعداد مراجعه کنندگان در ساعت ۲۰، از کدام معادله خط استفاده می‌شود؟

1. $y=5x-38$
2. $y=8x-38$
3. $y=8x-24$
4. $y=5x-24$

ساعت (x)	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد مراجعه‌کنندگان (y)	۵۲	۳۶	۱۸	۲۰	۲۵	۱۱

گزینه ۱

به روش گفته شده، میانگین ساعت‌ها و تعداد را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{8+10+\cdots+18}{6}=\frac{78}{6}=13 \quad و \quad \bar{y}=\frac{11+25+\cdots+52}{6}=\frac{162}{6}=27$$

اکنون معادله‌ی خط گذرا از نقاط $(13,27)$ و $(18,52)$ را می‌نویسیم:

$$m=\frac{52-27}{18-13}=\frac{25}{5}=5 \rightarrow y-27=5(x-13) \Rightarrow y=5x-38$$

نرخ تورم کشوری در فاصله‌ی زمانی سه سال داده شده، برون‌یابی آن در سال شانزدهم کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۹)

1. ۲۱
2. $21/25$
3. $21/75$
4. ۲۲

سال (x)	۳	۶	۹	۱۲	۱۵
تورم (y)	۲۰/۵	۲۴	۲۲	۲۷	۲۱/۵

گزینه ۲

میانگین‌ها را در جدول حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=9 \quad و \quad \bar{y}=\frac{20/5+24+22+27+21/5}{5}=\frac{115}{5}=23$$

اکنون معادله‌ی خط گذرا از نقاط $(9,23)$ و $(15,21/5)$ را می‌نویسیم:

$$m=\frac{21/5-23}{15-9}=\frac{-1/5}{6}=-\frac{15}{60}=-\frac{1}{4} \rightarrow y-23=-\frac{1}{4}(x-9)$$

حالا $x=16$ را جایگزین می‌کنیم:

$$y=-\frac{۱}{۴}(۱۶-۹)+۲۳=-\frac{۷}{۴}+۲۳=-۱/۷۵+۲۳=۲۱/۲۵$$

به روش پاسخ‌گویی تست بعد به صورت ویژه توجه کنید.

تعداد بازدید کنندگان از یک مرکز تفریحی در طول یک هفته به صورت جدول زیر است. اگر تعداد بازدید کنندگان در روزهای یکشنبه و سه شنبه از طریق درون‌یابی به ترتیب ۱۴۱ و ۱۵۳ نفر به دست آید، مقدار $b+a$ کدام است؟

روزهای هفته	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه
تعداد بازدیدکنندگان	۱۲۰	a	b	۱۸۰

❶ ۲۹۲
❷ ۳۰۰
❸ ۳۰۶
❹ ۳۱۸

گزینه ۳

اولاً: چون باید مقادیر جدول عدد باشند، روزهای هفته را با شماره‌ی آن‌ها جایگزین می‌کنیم: شنبه = ۱ و یکشنبه = ۲ و ... .

ثانیاً: خاصیت زیر وجود دارد:

وقتی بین نقاط A و B، مقدار در نقطه‌ی C را درون‌یابی می‌کنیم، باید شیب AC و شیب BC برابر باشد.

پس:

- با توجه به نقاط $(۱,۱۲۰)$ و $(۳,a)$ و درون‌یابی $(۲,۱۴۱)$ باید:

$$\frac{۱۴۱-۱۲۰}{۲-۱}=\frac{۱۴۱-a}{۲-۳}\rightarrow ۲۱=\frac{۱۴۱-a}{-۱}\rightarrow -۲۱=۱۴۱-a\Rightarrow a=۱۶۲$$

- با توجه به نقاط $(۳,۱۶۲)$ و $(۵,b)$ و درون‌یابی $(۴,۱۵۳)$ باید:

$$\frac{۱۵۳-۱۶۲}{۴-۳}=\frac{۱۵۳-b}{۴-۵}\rightarrow -۹=\frac{۱۵۳-b}{-۱}\rightarrow ۹=۱۵۳-b\Rightarrow b=۱۴۴$$

در نتیجه:

$$b+a=۱۴۴+۱۶۲=۳۰۶$$

روش دوم: (روش کوتاه)

در هر سه نقطه (یعنی: دو نقطه ابتدا و انتها و نقطه‌ی درون‌یابی بین)، روزهای هفته به صورت منظم (با فاصله‌های یکسان) تغییر می‌کنند، در نتیجه باید افزایش تعداد بازدید کنندگان هم یکسان باشد. یعنی، با توجه به مقادیر داده شده‌ی:

$$b\leftarrow ۱۵۳\leftarrow a \quad و \quad a\leftarrow ۱۴۱\leftarrow ۱۲۰$$

باید: $a-۱۴۱=۱۴۱-۱۲۰\Rightarrow a=۱۶۲$. به صورت مشابه:

باید: $b-۱۵۳=۱۵۳-\underbrace{a}_{۱۶۲}\Rightarrow b=۱۵۳-۹=۱۴۴$.

تعداد کالای فروخته شده توسط یک فروشگاه در هفته‌های اول تا هفتم به صورت جدول زیر است:

هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد کالاهای فروخته شده	۸	x	۵	y	۱۵	۱۰	۱۲

پیش‌بینی‌ها نشان می‌دهد که تعداد کالایی که در هفته‌ی نهم به فروش می‌رسد ۸ کالا است. مقدار $x+y$ کدام است؟

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

(کنکور ۱۴۰۰)

❶ ۲۶　　❷ ۳۶　　❸ ۵۰　　❹ ۷۶

گزینه ۴

طبق فرضیات، برون‌یابی در هفته‌ی نهم، برابر ۸ است؛ یعنی:

نقطه‌ی $(۹,۸)$ روی خط برون‌یابی قرار دارد.

تعیین میانگین‌ها:

$$\bar{x}=۴ \quad و \quad \bar{y}=\frac{۸+x+۵+y+۱۵+۱۰+۱۲}{۷}=\frac{x+y+۵۰}{۷}$$

معادله‌ی خط گذرا از نقاط $\left(۴,\frac{x+y+۵۰}{۷}\right)$ و $(۷,۱۲)$ را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۱۲-\frac{x+y+۵۰}{۷}}{۷-۴} \to Y-۱۲=\frac{۱۲-\frac{x+y+۵۰}{۷}}{۷-۴}(X-۷)$$

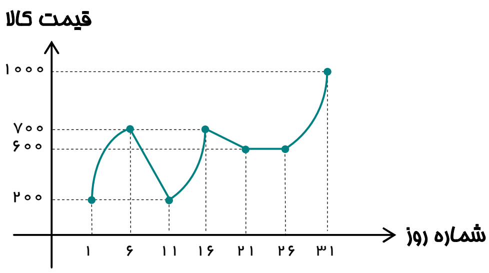
مختصات نقطه‌ی $(۹,۸)$ را جایگزین می‌کنیم:

$$۸-۱۲=\frac{۱۲-\frac{x+y+۵۰}{۷}}{۷-۴}(۹-۷) \to -۴=۲\times\frac{۱۲-\frac{x+y+۵۰}{۷}}{۳} \xrightarrow[\times ۳]{\div ۲} -۶=۱۲-\frac{x+y+۵۰}{۷}$$

$$\to \frac{x+y+۵۰}{۷}=۱۲+۶=۱۸ \to x+y+۵۰=۷\times۱۸=۱۲۶$$

$$\Rightarrow x+y=۱۲۶-۵۰=۷۶$$

با توجه به نمودار زیر، مقدار خطای درون‌یابی در روز دوازدهم کدام است؟ (قیمت واقعی در روز دوازدهم برابر ۳۰۵ تومان است.)



❶ ۱۰ تومان

❷ ۱۵ تومان

❸ ۸ تومان

❹ ۵ تومان

گزینه ۴

با استفاده از نقاط $(۱۱,۲۰۰)$ و $(۱۶,۷۰۰)$، معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۷۰۰-۲۰۰}{۱۶-۱۱}=۱۰۰ \to y-۲۰۰=۱۰۰(x-۱۱)$$

مقدار $x=۱۲$ را جایگزین می‌کنیم:

$$y-۲۰۰=۱۰۰(۱۲-۱۱) \to y=۱۰۰+۲۰۰=۳۰۰$$

پس خطا برابر است با: $|۳۰۰-۳۰۵|=|-۵|=۵$

نکته ۴

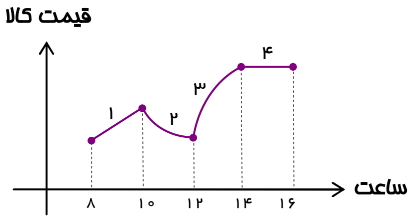
خطای کمتر در درون‌یابی:

هر قدر نمودار سری زمانی بین دو نقطه، به خط مستقیم شبیه‌تر باشد، خطای درون‌یابی در محدوده‌ی بین دو نقطه کمتر است.

بویژه:

اگر نمودار به صورت یک پاره‌خط (مستقیم) باشد، مقدار درون‌یابی با مقدار واقعی برابر بوده و خطا برابر صفر است.

در نمودار زیر که قیمت واقعی یک کالا را بر حسب زمان نشان می‌دهد، اگر خطای درون‌یابی هر لحظه را در بازه‌های زمانی با e نمایش دهیم، کدام گزینه قطعاً صحیح است؟



1. $|e_1| > |e_2|$
2. $|e_3| = |e_2|$
3. $e_1 = e_4$
4. $|e_3| < |e_4|$

گزینه ۳

طبق نکته‌ی قبل، خطا در محدوده‌های اول و چهارم برابر صفر است و در نتیجه $e_1 = e_4$ خواهد بود.

توجه کنید:

کمتر بودن خطا را با توجه به نمودار در نکته‌ی قبل دیدیم. به صورت مفهومی نیز، وقتی می‌توان بین دو کمیت برون‌یابی یا درون‌یابی دقیق‌تری انجام داد که بین آن‌ها به نوعی تناسب برقرار باشد.

برای نمونه؛

- بین فاصله‌ی بین دو شهر و مصرف بنزین خودرو تناسب وجود دارد.
- بین فاصله‌ی بین دو شهر و تغییر درجه‌ی حرارت هوا تناسب وجود ندارد.

با توجه به مفهوم سری زمانی، کدام مورد زیر را می‌توان دقیق‌تر درون‌یابی یا برون‌یابی کرد؟

1. مدت زمانی که دانش‌آموزان در کلاس‌های کنکور حضور دارند؛ {درصد کسب شده در کنکور سراسری}
2. مدت زمان حرکت یک قطار با سرعت ثابت در سطح بدون شیب؛ {مقدار مصرف سوخت}
3. مدت زمان حرکت یک خودرو از تهران به سمت شمال؛ {مقدار فشار وارد شده به کمک فنرها}
4. مدت زمانی که یک بازاریاب اینترنتی صرف صحبت با مشتریان می‌کند؛ {تعداد مشتریان جذب شده}

گزینه ۲

در سه مورد دیگر، بین دو کمیت گفته شده، الزاماً تناسب وجود ندارد.

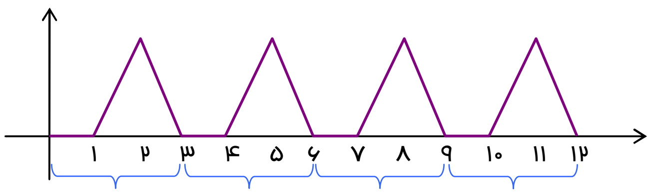
به معرفی نوع خاصی از سری زمانی توجه کنید.

نکته ۵

سری زمانی متناوب:

گاهی داده‌های یک سری زمانی (و در نتیجه نمودار آن) بعد از گذشت یک زمان مشخص، دوباره شروع به تکرار می‌کنند و این تکرار ادامه دارد. (مثل این‌که کپی‌های یک قطعه از نمودار چسبیده به هم در حال تکرار است.)

مانند نمودار متناوب زیر:



توجه کنید:

در چنین حالتی، طول زمانی که داده‌ها و نمودار لازم است تا دوباره تکرار شود را **«دوره‌ی تناوب»** گویند. در نمودار بالا، دوره‌ی تناوب برابر است با:

دوره‌ی تناوب = (زمان انتهای یک قطعه‌ی تکراری) – (زمان ابتدای همان قطعه‌ی تکراری) = $۳ - ۰ = ۳$

نکته‌ی مهم:

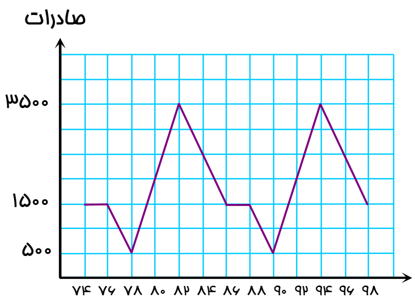
چنان‌که در مثال بعد هم می‌بینید، قاعده‌ی مهم زیر وجود دارد:

اگر به زمان‌های روی محور، به اندازه‌ی دوره‌ی تناوب اضافه یا کم کنید، داده‌ها یکسان می‌مانند!

مثال: در سری زمانی مقابل،

الف) دوره‌ی تناوب را مشخص کنید.

ب) میزان صادرات در سال ۱۴۰۴ را دقیقاً مشخص نمایید.



پاسخ

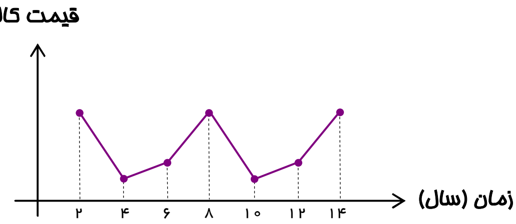
الف) نمودار را از سال ۷۴ تا ۸۶ نگاه کنید. ادامه‌ی نمودار از ۸۶ به بعد، دقیقاً تکرار قبل است و بنابراین:

دوره‌ی تناوب $= ۸۶ - ۷۴ = ۱۲$

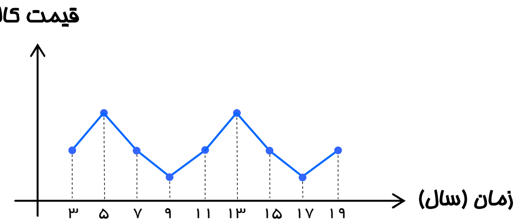
ب) چون $۱۴۰۴ - ۱۲ = ۱۳۹۲$ است، پس مقدار صادرات در سال‌های ۹۲ و ۱۴۰۴ یکسان است:

طبق نمودار: ۲۰۰۰

اختلاف دوره‌ی تناوب دو سری زمانی با نمودارهای داده شده کدام است؟



(الف)



(ب)

1. ۱
2. ۱/۵
3. ۲/۵
4. ۲

گزینه ۴

به آسانی دیده می‌شود که:

در نمودار اول دوره‌ی تناوب $۶ = ۲ - ۸$ و در نمودار دوم برابر $۸ = ۳ - ۱۱$ است.

پس اختلاف آن‌ها برابر $۲ = ۶ - ۸$ خواهد شد.

تمرینات

۱ اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

الف) تورم ب) شاخص بیکاری

۲ اگر گوشت و نان دو کالا باشند به طوری که قیمت آن‌ها در سال جاری به ترتیب ۱۱۰۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومان باشد و در سال پایه به ترتیب ۸۵۰۰۰ و ۴۵۰۰ تومان باشد، به طوری که مقدار مصرفی برابر ۳۰ و ۴۰ کیلوگرم باشد،

الف) شاخص بهای گوشت و نان را در سال جاری به دست آورید.

ب) تورم گوشت و نان را مشخص کنید.

۳ اگر شاخص بهای نان در سال ۹۶ برابر ۱۴۰ و مقدار تورم در سال ۹۶ نسبت به سال ۹۰ برابر ۶۰ درصد باشد، شاخص بهای نان در سال ۹۰ را بیابید.

۴ در یک جامعه نرخ بیکاری ۱۰ درصد و جمعیت فعال ۳۰ میلیون نفر است. تعداد بیکاران را بیابید.

۵ در یک کتاب لاتین، درصد لغات دشوار ۶ و میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۲۰ است. شاخص پایه‌ی آموزش را بیابید.

۶ درآمد ماهانه‌ی هشت نفر از مدیران یک شرکت بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:

۲,۴,۳,۵,۵,۳,۶,۲

الف) خط فقر این داده‌ها را بر اساس میانه و میانگین به دست آورید.

ب) تعداد مدیران زیر خط فقر را در هر دو حالت مشخص کنید.

۷ در شهری ۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ سال به بالا شاغل هستند. در این شهر حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری در آن ۸ درصد شود. (۸۰۰ نفر بیکار در این شهر داریم.)

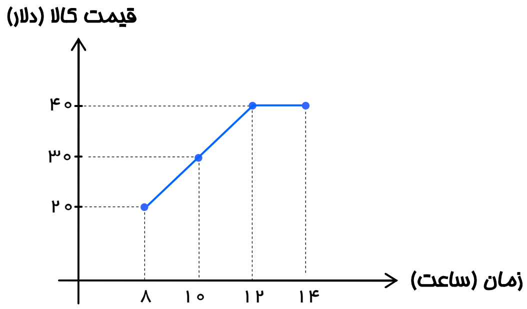
۸ تعداد مشتری‌ها در یک مرکز خرید بین ساعات ۸ صبح تا ۱۶ به صورت جدول زیر می‌باشد:

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
تعداد مشتری	۳۰۰	۶۵۰	۷۰۰	۴۰۰	۲۰۰

الف) نمودار سری زمانی جدول بالا را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار رسم شده تعداد مشتریان فروشگاه را در ساعت ۱۱ درون یابی کنید.

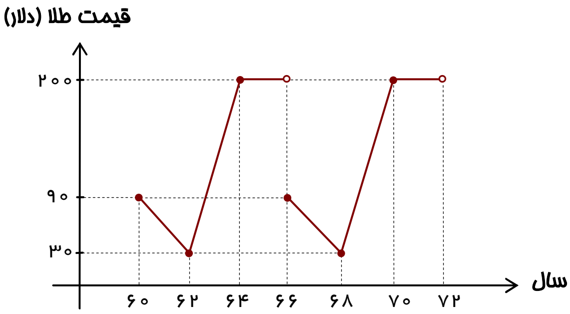
۹ با توجه به نمودار سری زمانی زیر، قیمت کالا را در ساعت ۱۱ و ۱۶ به ترتیب درون‌یابی و برون‌یابی کنید.



۱۰ در نمودار سری زمانی متناوب زیر:

الف) دوره‌ی تناوب داده‌ها چقدر است؟

ب) قیمت طلا در سال ۷۶ را حساب کنید.



۱۱ میزان فروش یک شرکت در پنج سال متوالی بر حسب میلیارد تومان به صورت زیر است: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

سال x	۱	۲	۳	۴	۵
فروش y	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹

الف) نمودار سری زمانی زمانی را رسم کنید.

ب) فروش در سال هفتم را برون یابی کنید

تمرینات
منتخب کتاب

۱ اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵ میلیون ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان یک شرکت چقدر باشد تا هیچ کارمندی در آن شرکت زیر خط فقر نباشد، چه زمانی از میانه درآمد خانوارها برای محاسبه خط فقر استفاده می‌کنیم؟

۲ خانواده ۶ نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین المللی، درآمد ماهانه این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشند؟

۳ در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل هستند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار می‌باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر با ۵ درصد باشد؟

۴ نماتوب یا شاخص توده‌ی بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص‌های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبه‌ی آن باید وزن فرد به کیلوگرم را بر توان دوم قدش بر حسب متر تقسیم کرد. جدول زیر اطلاعات خانواده‌ی صالحی را نشان می‌دهد:

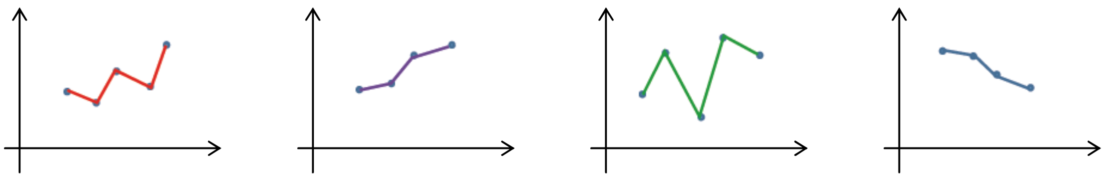
عضو خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارد؟

۵ شاخص پوسیدگی دندان (DMFT) در سال ۱۳۶۰ در ایران برابر با ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پر شده بوده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر با ۶ شده است. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۶ اگر نمودارهای شکل زیر مربوط به سری‌های زمانی باشند، در کدام حالت درون‌یابی و برون‌یابی خطی بهتری امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



۷ یک دکه‌دار تعداد بطری‌های آب فروخته شده از شروع فصل گرما را یک روز در میان، مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

الف) نمودار سری زمانی داده ها را رسم کنید.

ب) تعداد بطری‌های فروخته شده در روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

پ) تعداد بطری‌های فروخته شده در روز دوشنبه از هفته‌ی دوم را برون‌یابی کنید.

۸ تعداد زلزله‌های دارای شدت بیش از ۷ ریشتر در جهان، مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است:

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های شدیدتر از ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

پ) معادله‌ی خطی را که نقطه (۱۰,۲۱) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

ت) با استفاده از خطی که معادله‌ی آن را نوشته‌اید، تعداد زلزله‌های شدیدتر از ۷ ریشتر در سال یازدهم در جهان را برون‌یابی کنید.

ث) اگر بدانیم که در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چقدر است؟

TEST تمرین تست

۱ درآمد افراد یک جامعه‌ی آماری بر حسب میلیون تومان برابر است با: ۲,۲,۲,۳,۴,۴,۴,۵,۵/۵,۶/۵
خط فقر را به روش نصف میانگین به دست می‌آوریم، چند نفر زیر خط فقر قرار ندارند؟

❶ ۷ ❷ ۸ ❸ ۹ ❹ ۱۰

۲ استانی چهار شهر با جمعیت فعال و نرخ بیکاری مطابق با جدول زیر دارد. اگر نرخ بیکاری استان ۲۱/۴ درصد باشد، جمعیت شاغل شهر B چند نفر است؟

	شهر A	شهر B	شهر C	شهر D
جمعیت (میلیون نفر)	۰/۵	۰/۳	۱	۰/۷
نرخ بیکاری	۲۰ درصد	x	۳۲ درصد	۱۰ درصد

❶ ۲۳۵۰۰۰
❷ ۱۵۰۰۰
❸ ۴۵۰۰۰
❹ ۲۵۵۰۰۰

۳ در یک جامعه آماری از بین جمعیت فعال، ۳۰ میلیون نفر شاغل‌اند، ۳ میلیون نفر از کار اخراج شده‌اند، ۷ میلیون نفر دیگر جویای کار هستند و ۲ میلیون نفر دیگر هم از ابتدای ماه بعد سر کار می‌روند. نرخ بیکاری در این جامعه در حال حاضر تقریباً چند درصد است؟

❶ ۲۴/۵ ❷ ۲۸/۵ ❸ ۳۲/۵ ❹ ۳۴/۵

۴ قد زهرا ۱۶۰ سانتی‌متر و وزنش ۸۰ کیلوگرم و قد نگار ۱۸۰ سانتی‌متر و وزنش ۹۰ کیلوگرم است. اگر هر دو ۲۵ ساله باشند، کدام یک از نظر شاخص سلامتی، وزن طبیعی و در محدوده‌ی سلامت وزنی قرار دارد؟ (اگر شاخص توده‌ی بدنی شخص در محدوده‌ی $۱۹ \le \text{BMI} < ۲۵$ باشد، وزن مطلوب دارد.)

❶ نگار ❷ زهرا ❸ هر دو ❹ هیچ‌یک

۵ در یک بخش روستایی ۲۳۴۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل و ۶۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار هستند. حداقل چند شغل در این بخش باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه به ۵ درصد برسد؟
(شغل‌های جدید برای استخدام افراد بیکار است.)

❶ ۲۵۰ ❷ ۳۸۳ ❸ ۴۵۳ ❹ ۴۸۰

۶ تعداد مشتری‌های یک مرکز خرید در ساعت‌های ۹ و ۱۵ به صورت زیر ثبت شده است. به کمک درون‌یابی خطی، تعداد مشتری‌ها در ساعت ۱۲ کدام است؟

ساعت	۹	۱۵
تعداد مشتری	۳۵۰	۶۵۰

❶ ۴۵۰ ❷ ۵۰۰
❸ ۶۰۰ ❹ ۵۵۰

0912 172 0728 @alireza_karbalaie

۷ فرض کنید قیمت نفت در جهان در سال‌های مختلف یک سری زمانی متناوب را تشکیل دهد که هر یک از قیمت‌ها هر ۸ سال تکرار می‌شوند. اگر در سال ۱۳۹۵ و ۱۳۹۷ قیمت هر بشکه نفت به ترتیب ۴۰ و ۸۰ دلار باشد، قیمت هر بشکه نفت در سال ۱۴۰۵ چند برابر قیمت آن در سال ۱۳۸۱ می‌باشد؟

1. ۱
2. ۱/۵
3. ۲/۵
4. ۲

۸ تعداد دانشجویان دختر و پسر یک دانشگاه از سال ۹۱ تا ۹۷ یک سال در میان در جدول زیر آمده است. در سال ۹۶ به کمک درون‌یابی تقریباً چند درصد دانشجویان این دانشگاه دختر بوده‌اند؟

سال	۹۷	۹۵	۹۳	۹۱
دانشجویان دختر	۶۳۰۰	۷۹۰۰	۷۲۳۰	۶۴۵۰
دانشجویان پسر	۵۶۰۰	۶۰۰۰	۵۸۵۰	۵۱۰۰

1. ۴۸
2. ۵۰
3. ۵۵
4. ۶۲

۹ در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل و ۱۴۳ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار هستند. حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری به ۶ درصد برسد؟ (کنکور ۹۸)

1. ۴۰
2. ۴۵
3. ۵۰
4. ۶۰

۱۰ در نمودار سری زمانی، خطا برای هر نقطه، برابر کدام است؟ (کنکور ۹۸)

1. قدرمطلق تفاضل مقدار واقعی از درون‌یابی آن
2. نصف درون‌یابی خطی است.
3. قدرمطلق تفاضل مقدار واقعی از برون‌یابی آن
4. نصف برون‌یابی خطی است.

۱۱ قیمت سه نوع کالا در سال پایه ۲۰۰۰ و ۷۵۰۰ و ۳۵۰۰ واحد پول، در سال مورد نظر به ترتیب ۳۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ و ۵۰۰۰ واحد پول است. تعداد مورد نیاز به این کالا در سال به ترتیب ۶۰ و ۱۰۰ و ۸۰ می‌باشد. مقدار تورم تقریباً چند درصد است؟ (کنکور خارج ۹۸)

1. ۳۵/۸
2. ۳۷/۴
3. ۳۹/۲
4. ۴۰/۱

۱۲ نرخ تورم کشوری با فاصله‌های زمانی دو سال، به صورت جدول زیر است. درون‌یابی آن در سال نهم کدام است؟ (کنکور ۹۹)

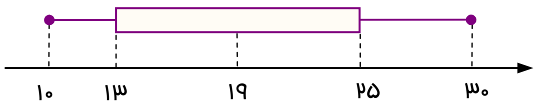
سال (x)	۲	۴	۶	۸	۱۰
تورم (y)	۱۴	۱۸	۱۲	۲۰	۲۶

1. ۲۲
2. ۲۳
3. ۲۴
4. ۲۵

۱۳ شاخص پایه آموزش یک کتاب ۱۰ و میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۵ است. درصد کلمات دشوار کدام عدد می‌تواند باشد؟

1. ۲۰
2. ۱۸
3. ۱۶
4. ۱۵

۱۴ با توجه به نمودار زیر، خط فقر به روش میانه کدام است؟



1) ۱۹
2) ۱۵
3) ۹/۵
4) ۶/۵

۱۵ اگر اختلاف فقیرترین و پر درآمدترین فرد در یک جامعه خیلی زیاد باشد، کدام روش برای یافتن خط فقر واقعی‌تر است؟

1) نصف میانگین
2) نصف میانه
3) غیر قابل محاسبه
4) نصف مد

۱۶ درآمد ماهانه‌ی اعضای جامعه‌ای بر حسب میلیون تومان به صورت a، ۴/۲، ۱/۴، ۱، ۴/۹، ۰/۹، ۲/۴، ۰/۷، ۲/۸، ۳/۵ و b است. اگر بخواهیم فقط یک نفر زیر خط فقر باشد، بیشترین مقدار $a+b$ کدام است؟ (خط فقر به روش میانه)

1) ۲/۷
2) ۲/۸
3) ۳/۶
4) ۴/۸

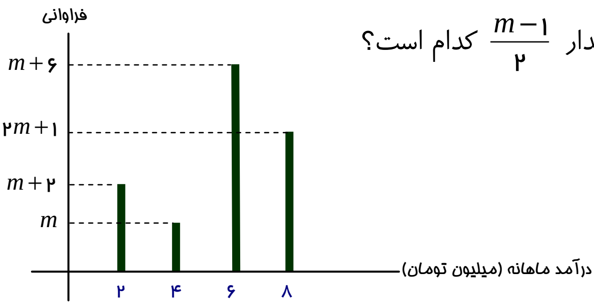
۱۷ اگر تورم یک کالا بین سال‌های ۹۹ تا ۱۴۰۰ برابر ۳۵ درصد و شاخص بهای آن کالا در سال پایه ۱۲۰ باشد، شاخص بهای کالا در سال ۱۴۰۰ کدام است؟

1) ۱۳۵
2) ۱۵۵
3) ۱۶۲
4) ۱۵۲

۱۸ جامعه‌ای را به سه بخش تقسیم کرده‌ایم. خط فقر به روش میانگین در این سه بخش به ترتیب ۸۰۰ هزار تومان، ۱/۵ میلیون تومان و ۲/۵ میلیون تومان است. اگر جمعیت این بخش‌ها به ترتیب ۱۰، ۸ و ۷ نفر باشد، خط فقر به روش میانگین برای کل جامعه کدام است؟ (بر حسب میلیون تومان)

1) ۱
2) ۱/۲
3) ۱/۵
4) ۲

۱۹ اگر طبق نمودار، خط فقر به روش میانگین $\frac{۱۱}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{m-۱}{۲}$ کدام است؟



1) ۱
2) ۲
3) ۳
4) ۴

۲۰ توسط داده‌های جدول، a را درون‌یابی کرده و سپس با تکمیل جدول، b را برون‌یابی کرده‌ایم. مقدار $۳a+۲b$ کدام است؟

زمان (x)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
داده (y)	۶	۴	a	۱۰	۱۳	b

1) ۴۸
2) ۵۰
3) ۵۱
4) ۵۲

۲۱ در یک برون‌یابی، آخرین داده ثبت شده $(۳,a)$، میانگین داده‌های ثبت شده $(۲,۳)$ و معادله‌ی برون‌یابی $y=۳x+b$ بوده است. مقدار $۲a+b$ کدام است؟

❶ ۱۵ ❷ ۱۲ ❸ ۹ ❹ ۳۳