



آموزش ریاضیات انسانی

(تشییمی & کنکور)

ریاضی و آمار (۲)

مدل‌سازی:

دکتر علیرضا کربلایی



0912 172 0728



@alireza_karbalaie

فهرست کامل

۱

گزاره‌های ساده و مرکب

۲۷

معرفی گزاره و درستی یا نادرستی، گزاره‌های ساده و مرکب، روش رسم
جدول درستی گزاره و بررسی حالات درستی آن
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۲

همارزی و استدلال

۲۸

معرفی گزاره‌های همارز؛ بررسی همارزی توسط جدول و بدون جدول،
استدلال و استنتاج
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۳

تابع (۱)

۵۷

یادآوری مفهوم تابع، معرفی و بررسی چند نوع از توابع ساده و نمودار آن‌ها،
تابع قدرمطلق و نمودار آن
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۴

تابع (۲)

۹۴

تابع پلکانی و نمودارهای مربوطه، معرفی تابع جزء صحیح و نمودار آن،
اعمال جبری بین توابع
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست

۵

آمار

۱۳۱

بررسی شاخص‌های آماری (خط قفر، شاخصن بهای کالا، تورم، بیکاری و ...)، سری‌های زمانی، نمودار، برآون‌بایی و درون‌بایی
+ بخش ویژه کنکور، تمرینات تشریحی و تست



۱

گزاره‌های ساده و مرکب

صفحه	فهرست مطالب
۲	مفهوم مقدماتی □
۷	ترکیب گزاره‌ها □
۱۵	ویژه کنکور □
۲۱	تمرینات تشریمی و مختلف کتاب درسی □
۲۳	تمرین تست □

هدف این مبحث، آشنایی با منطق (ریاضی) و کاربردهای ساده‌ای از آن است؛ می‌توان گفت: کاربرد منطق در بیان دقیق و واضح احکام، تشخیص اعتبار استدلال‌ها و درست نتیجه‌گیری کردن است.

بویژه، منطق ریاضی، بیان مفاهیم و کاربرد منطق به زبان و نماد ریاضی است. در این بخش، مفاهیم مقدماتی بیان و بررسی می‌گردد. موضوع محوری:

گزاره:

یک جمله خبری که دارای ارزش «درست» یا «نادرست» باشد را «**گزاره**» گویند و آن را معمولاً با یکی از حروف p ، q ، r و ... نام گذاری می‌کنند.

توجه کنید:

- گزاره باید حتماً خبر بوده و درستی یا نادرستی آن در حال یا آینده قابل تعیین باشد. (ممکن است تعیین درست یا نادرست بودن یک خبر نیاز به زمان داشته و در این زمان ممکن نباشد).
- گزاره‌ای که تنها از یک خبر تشکیل شده، «**گزاره ساده**» می‌نامیم. (بررسی سایر گزاره‌ها کمی پیش‌تر).
- ارزش گزاره دقیقاً یکی از دو حالت زیر است:
 - نادرست (نماد: $\textcolor{red}{\text{ن}}$ یا $\textcolor{red}{F}$)
 - درست (نماد: $\textcolor{red}{د}$ یا $\textcolor{red}{T}$)

بنابراین:

جملات از انواع زیر، گزاره محسوب نمی‌شوند:

- جملاتی که در آنها خبری وجود ندارد؛ مانند جملات عاطفی، سؤالی، امری و ...
- جملاتی که درست یا نادرست بودن آنها هیچ‌گاه قابل تعیین نیست یا به نظر یا سلیقه‌ی اشخاص مختلف بستگی دارد.

(بدانید: افلاطون فیلسوف بزرگ یونانی است. سقراط استاد و ارسطو شاگرد افلاطون بوده‌اند)

مثال: (از کتاب)

- گزاره‌ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.
- الف) شما چند سال دارید؟
 - ب) عدد ۲ عددی اول است.
 - ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.
 - پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است.
 - ث) $2^0 = 2 \times 3 \times 4$
 - ج) سیب قرمز از سیب زرد خوشمزه‌تر است. (نهایی- خردad ۱۴۰۲)
 - ح) لطفاً تخته را پاک کن.

پاسخ

موارد (الف: سؤالی) و (ح: امری) و (ج: تعیین درست یا نادرست سلیقه‌ای است)، گزاره نیستند. سایر موارد گزاره هستند.

ت) نادرست است. پ) نادرست است. ب) درست است.

$$\text{ث)} \quad \text{نادرست است؛ زیرا در محاسبه پاید (ولویت‌ها) رعایت شود: } 14 = 2 + 12 = 2 + \underline{3 \times 4}.$$

ج) نادرست است، برای n فرد، $1 - (-)^n$ عددی منفی است.



مثال: گزاره‌ها و ارزش هر کدام را تعیین کنید.

الف) ریاضی یازدهم از ریاضی سال قبل آسان‌تر است.

ب) تساوی $\sqrt{16} = \sqrt{9} + \sqrt{25}$ برقرار است.

پ) n عددی زوج است.

پاسخ

مورد اول خبر است، ولی چون تعیین درستی آن ممکن نیست، گزاره محسوب نمی‌شود، مورد دوم یک گزاره با ارثش «ن» است؛ زیرا:

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq \sqrt{25} = 5$$

مورد سوم چمله‌ی خبری است، ولی چون از مقدار n اطلاع نداریم، تعیین ارثش خبر غیر ممکن پوشه و گزاره محسوب نمی‌شود.



مثال: عبارت:

«حاصل عبارت $1 + 100 \times 3 \times 2 \times 1$ عددی اول است.»

یک گزاره است. هر چند الان نمی‌دانیم ارزش آن درست یا نادرست است، ولی با بررسی بیشتر قابل تعیین ارزش درستی است.



جدول ارزش:

تمام حالت‌های گوناگون ارزش یک گزاره را می‌توان در یک جدول نمایش داد. وقتی فقط با یک گزاره‌ی ساده p روبرو هستیم، جدول دو حالتی به صورت روپرتو است:

p
د
ن

(کاربرد اصلی جدول، در بررسی درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب است که در ادامه خواهیم دید.)



برعکس کردن خبر موجود در گزاره‌ها به صورت زیر است:

نقیض گزاره:

نقیض یک گزاره‌ی p را با نماد $\sim p$ نوشته و آن را «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

در کل:

چنان‌که در جدول ارزش مقابله دیده می‌شود:

ارزش درستی $p \sim$ دقیقاً برعکس ارزش درستی p است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال: نقیض گزاره‌ی «۴ عددی فرد است.» را به همه‌ی روش‌های زیر می‌توان بیان کرد:

- چنین نیست که ۴ عددی فرد است.
- ۴ عددی فرد نیست.
- ۴ عددی زوج است. (چون زوج و فرد بودن دقیقاً نقطه‌ی مقابله هم هستند).



مورد بعد را با دقت بخوانید:

مثال: نقیض گزاره‌ی «۱ عددی مثبت است.» به صورت «۱ عددی منفی است.» صحیح نیست. زیرا:

باید خلاف خبر را بیان کنید!

می‌دانیم:

خلاف مثبت بودن عدد این است که آن عدد برابر صفر یا منفی باشد. پس نقیض به همه‌ی صورت‌های زیر درست است:

- چنین نیست که ۱ عددی مثبت است.
- ۱ عددی مثبت نیست.
- ۱ عددی منفی یا صفر است.

به بیان نمایین:

نقیض گزاره‌ی «۰ > ۱» به صورت «۰ < ۱» ناصحیح. ولی به هر دو صورت «۰ > ۱» و «۰ < ۱» صحیح است.



مثال: (از کتاب)

در هر یک از حالت‌های زیر، نقیض گزاره را بیان کرده و سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.

ب) تساوی $2 \times 2 = 4$ برقرار است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

پ) عدد ۵ زوج است.

ج) $(5 \times 7) > (3 \times 4)$

ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد.

پاسخ

ب) تساوی $2 \times 2 = 4$ برقرار نیست. (نادرست)

الف) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست. (نادرست)



ت) ارسسطو شاگرد افلاطون نیست. (نادرست) پ) عدد ۵ زوج نیست. (درست)

ج) $\underbrace{5 \times 4}_{20} \leq \underbrace{3 \times 7}_{21}$ (درست) ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار ندارد. (نادرست)



ترکیب گزاره‌ها

از یک یا چند گزاره می‌توان با روش‌هایی که در این بخش می‌بینیم، گزاره‌های جدید ساخت. توجه کنید:

گزاره‌ای که از دو یا چند خبر تشکیل شده باشد، «**گزاره‌ی مرکب**» نامیده می‌شود.

در این بخش، چهار روش برای ترکیب گزاره‌ها آورده خواهد شد. خواهیم دید:
ازش هر گزاره‌ی مرکب، به ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن بستگی دارد.

اولین روش ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب عطفی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q حرف ربط «و» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:
نوشته شده و به صورت « p و q » خوانده می‌شود.
این نوع ترکیب را «**ترکیب عطفی**» و نماد \wedge را «**عاطف**» گویند.

بعلاوه:

قابل درک است که ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دوی p و q درست باشند و در غیر این صورت همواره نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ارزش درستی $p \wedge q$ را در جدول می‌بینید:

برای نمونه:

برای درست بودن عبارت: «عدد ۲ زوج است و $\sqrt{2}$ عددی گویا است.»
باید هر دو گزاره‌ی ساده‌ی «عدد ۲ زوج است» و « $\sqrt{2}$ عددی گویا است» درست باشند. ولی چون گزاره‌ی دوم نادرست است، گزاره‌ی مرکب در کل نادرست است.

مثال: الف) ارزش گزاره‌ی «هر ماه سال ۳۵ روز دارد و هر قرن ۱۰۰ سال است.» را مشخص کنید.

ب) جای خالی در عبارت «۵۳۰ عددی اول است و» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست شود.

پ) جای خالی در عبارت «قرآن مجید ۳۵ سوره دارد و» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی عطفی حاصل نادرست شود.

پاسخ

الف) چون ماه کمتر یا بیشتر از ۳۵ روز هم داریم، گزاره په صورت (ن \wedge د) پوده و نادرست است.

ب) ۵۳ عدد اول است، پس اگر گزاره‌ی دوم نیز درست باشد، کل گزاره درست است، مثلاً:

عدد $\sqrt{2}$ گنج است.



پ) چون گزاره‌ی «قرآن مجید ۳۵ سوره دارد.» نادرست است، گزاره‌ی دوم هر ارزشی داشته باشد، کل گزاره نادرست است.

مثال:

افلاطون شاگرد ارسسطو است. (ن) یا ارسسطو شاگرد افلاطون است. (د)



روش تشکیل جدول:

هنگام تشکیل جدول ارزش گزاره‌های مرکب، موارد زیر را رعایت کنید:

- به تعداد گزاره‌های ساده‌ی $p, q, r \dots$ که آن گزاره‌ی مرکب را تشکیل داده‌اند، توجه کنید:
- چون هر گزاره‌ی ساده دو حالت «د» و «ن» دارد،
- وقتی فقط یک گزاره داریم، تعداد ۲ حالت (دو سطر) در جدول قرار می‌گیرد.

مانند:

p	p	$p \wedge p$
د	د	د
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره‌ی $p \wedge p$

- وقتی دو گزاره p و q داریم، $2 \times 2 = 4$ سطر خواهیم داشت؛ مانند جدول ارزش $p \wedge q$ که بالاتر دیدیم.
- برای سه گزاره، $2^3 = 8$ حالت و در کل وقتی n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب موجود باشد، 2^n حالت داریم.

برای این‌که جدول منظم تشکیل شود:

- در ستون اول، نصف حالت‌ها «د» و نصف دیگر حالت‌ها «ن» قرار می‌گیرد.
- در ستون‌های بعدی تعداد دوباره نصف می‌شود تا آخر.

مثال برای سه گزاره:

در کل ۸ حالت داریم و شروع جدول همیشه به صورت رو به رو است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

مثال: جدول ارزش درستی گزاره‌ی $p \wedge \sim p$ را بینید:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

توجه کنید:

چنان‌که می‌بینید، یک گزاره و نقیض آن هیچ‌گاه نمی‌توانند هر دو درست باشند! (یعنی: **تناقض**)



روش بعدی در ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب فصلی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q رابط «یا» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:

$p \vee q$ نوشته شده و به صورت « p یا q » خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را «ترکیب فصلی» و نماد \vee را «فاصلی» گویند.

بعلاوه:

قابل فهم است که ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است که هر دوی p و q نادرست باشند و در غیر این صورت همواره درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال:

۲ عددی فرد است یا ۹ عددی اول است.

این گزاره نادرست است، زیرا هر دو گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» و «۹ عددی اول است» نادرست هستند.



مثال: جای خالی در عبارت «۱۹ عددی اول است یا . . . » را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست باشد.

پاسخ

چون گزاره‌ی «۱۹ عددی اول است». درست است، گزاره‌ی دوم هر ارزشی داشته باشد، کل گزاره درست است.
مثلاً:

قرآن کریم ۱۱۴ آیه دارد. (ن) یا قرآن کریم ۱۱۴ سوره دارد. (د)



مثال: جدول ارزش گزاره‌ی $q \sim p \vee$ را تشکیل دهید. این گزاره در چه صورتی نادرست است؟

پاسخ

چون دو گزاره‌ی ساده‌ی p و q مشاهده می‌شوند، $=^3$ حالت پایانی چدول تشکیل می‌دهیم.

توجه کنید:

مانند محاسبات ریاضی، از ساده‌ترین گزاره‌ها شروع کرده و در پایان کل گزاره تشکیل می‌شود:



p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
د	د	ن	د
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د

شروع: p

بعد: q

بعد: $\sim q$

پایان: $p \vee \sim q$

می پینید که:

گزاره‌ی $p \vee \sim q$ وقتی نادرست است که p نادرست و q درست باشد.



مثال: جدول ارزش درستی گزاره‌ی $p \vee (q \wedge r)$ را بینید:

توجه کنید:

- چون سه گزاره‌ی ساده وجود دارد، $3^3 = 27$ حالت در جدول داریم.

- ابتدا سه گزاره‌ی ساده را قرار داده، سپس $q \wedge r$ و در آخر

گزاره‌ی مرکب اصلی تعیین ارزش شده است.

هنانکه می‌بینید:

در تشکیل جدول، از جزء به کل حرکت می‌کنیم.



ترکیب شرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q ، گزاره‌ی شرطی به صورت:

$p \Rightarrow q$ نوشته شده و به صورت «اگر p ، آنگاه q » خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را «ترکیب شرطی» گویند.

در این ترکیب، به p «مقدم» و به q «تالی» یا «پیرو» گفته می‌شود.

بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که p درست، ولی q نادرست باشد. به عبارت دیگر:

هنگامی یک استنتاج $q \Rightarrow p$ صحیح است که:

درست بودن p ، حتماً درستی q را نتیجه دهد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د



0912 172 0728



@alireza_karbalaie



مثال: اگر p و q هر دو گزاره‌هایی نادرست باشند، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

$$\text{ب) } (p \vee \sim q) \Rightarrow q \quad \text{الف) } p \Rightarrow \sim p$$

پاسخ

الف) گزاره په صورت $(d \Rightarrow n)$ پوده و طبق چدول درست است.

ب) چون $(p \vee \sim q) \Rightarrow q$ په صورت $(d \vee n)$ پوده و درست است، گزاره‌ی شرطی په صورت $(n \Rightarrow d)$ پوده و نادرست خواهد بود.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر گزاره‌ی p نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $(\sim p \vee q)$ را مشخص کنید.

پاسخ

پاید p درست باشد و $\sim p \wedge \sim q$ نادرست. پناید $\sim q \sim$ نادرست پوده، یعنی $\sim q$ درست پوده است.

در نتیجه:

گزاره‌ی $(\sim p \vee q)$ به صورت $(d \vee n)$ بوده و درست است.

عکس گزاره:

اگر در گزاره‌ی شرطی $q \Rightarrow p$ ، گزاره‌های p و q را جابجا کنیم، «عکس گزاره شرط» به صورت $p \Rightarrow q$ ساخته می‌شود. برای نمونه:

عکس گزاره‌ی: «اگر میانگین ۱۶ و ۱۸ برابر ۱۷ باشد، آنگاه ۱ - عددی مثبت است.» به صورت زیر نوشته می‌شود:

«اگر ۱ - عددی مثبت باشد، آنگاه میانگین ۱۶ و ۱۸ برابر ۱۷ است.»

توجه کنید:

بین ارزش درستی یک گزاره و عکس آن ارتباطی وجود ندارد.

می‌بینید:

در نمونه‌ی بالا، گزاره‌ی شرطی اولیه نادرست بوده، ولی عکس آن به صورت $(d \Rightarrow n)$ بوده و درست است.

حالت بسیار مهمی از ترکیب شرطی:

قانون انتفای مقدم:

چنان‌که در جدول ارزش $q \Rightarrow p$ می‌بینید:

اگر p نادرست باشد، بدون توجه به ارزش q ، ارزش گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ درست است!

این خاصیت را «قانون انتفای مقدم» گویند.

یعنی:

اگر با یک فرض غلط، هر نتیجه‌ی درست یا نادرست را پذیرید، استنتاج شما در کل صحیح بوده است.



0912 172 0728



@alireza_karbalaie



برای نمونه:

استنتاج‌های زیر هر دو درستند:

- اگر -2 عددی مثبت باشد، آنگاه تمام داوطلبان کنکور 1403 رتبه‌ی یک خواهند شد.
- اگر اصفهان مرکز استان فارس باشد، آنگاه ایران یک کشور اروپایی است.

مثال: الف) ارزش گزاره‌ی «اگر عدد 5 زوج باشد، آنگاه هر دهه 100 سال است.» را مشخص کنید.

ب) جاهای خالی در عبارت «اگر آنگاه» را با دو گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی مرکب درست شود.

پ) جای خالی در عبارت «اگر آنگاه قرآن مجید 114 آیه دارد.» را با یک گزاره طوری کامل کنید که گزاره‌ی حاصل نادرست شود.

پاسخ

الف) گزاره‌ی مرکب په صورت $(n \Rightarrow d)$ پوده و نادرست است.

ب) کافی است فقط حالت $(n \Rightarrow d)$ رخ ندهد، مثلاً:

اگر عدد $\sqrt{2}$ گنج باشد، آنگاه 11 عددی اول است.

پ) چون گزاره‌ی «قرآن مجید 114 آیه دارد.» نادرست است، گزاره‌ی اول پاید الاماً درست باشد، تا کل گزاره نادرست شود. مثلاً:

افلاطون شاگرد سقراط است. (د)



مثال: (از کتاب)

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad \text{الف) } (p \Rightarrow q) \wedge r$$

$$(q \Rightarrow p) \wedge r \quad \text{پ) } (r \Rightarrow p) \vee q$$

پاسخ

الف) چون $(p \Rightarrow q)$ په صورت $(n \Rightarrow d)$ پوده و نادرست است، ارزش r هر چه باشد، ترکیب عطفی نادرست است.

ب) چون $(p \Rightarrow q)$ نادرست است، ارزش r هر چه باشد، ترکیب شرطی $(r \Rightarrow n)$ په انتقای مقدم درست است.

پ) چون $(r \Rightarrow p)$ په صورت $(d \Rightarrow r)$ است، الاماً درست است، ترکیب فصلی په صورت $(n \wedge d)$ پوده و درست است.

ت) چون $(q \Rightarrow p)$ په صورت $(d \Rightarrow n)$ پوده و درست است، ترکیب عطفی په صورت $(r \wedge d)$ است. اکنون توجه کنید:

اگر r درست باشد، ترکیب عطفی درست و اگر r نادرست باشد، ترکیب عطفی نیز نادرست است. در نتیجه:

ارزش کل گزاره با ارزش r یکسان است.



مثال: اگر ارزش گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشد، ارزش گزاره‌ی $q \sim (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ را تعیین کنید.

پاسخ

به اجبار پاید q درست باشد، چون در عین صورت، حتماً یکی از دو گزاره‌ی شرطی $q \Rightarrow p$ یا $p \sim q$ نادرست می‌شود. پس $\sim q$ نادرست پوده و $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ است. پا توجه به درست پودن q ؛ اگر p درست باشد، گزاره‌ی مرکب نادرست و اگر p نادرست باشد، گزاره‌ی مرکب درست است.

نتیجه:

گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ با $p \sim q$ است.

ترکیب دوشرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q ، گزاره‌ی دوشرطی به صورت:

$p \leftrightarrow q$ نوشته شده و به صورت « p اگر و تنها اگر q » یا « p آنگاه q و بر عکس» خوانده می‌شود.

در واقع:

هر دوی p و q باید یکدیگر را نتیجه دهند تا این ترکیب، گزاره‌ای درست باشد.

بنابراین:

همان‌طور که در جدول زیر هم می‌بینید، ترکیب دو شرطی وقتی نادرست است که یکی از p یا q دیگری را نتیجه ندهد.

p	q	$p \leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال: ارزش درستی هر گزاره را مشخص کنید.

الف) اگر ۲ فرد باشد، آنگاه ۳ اول است.

ب) ۲ فرد است اگر و فقط اگر ۳ اول باشد.

پاسخ

پا توجه به ارزش هر کدام از گزاره‌های ساده:

الف) گزاره‌ی شرطی به صورت $(d \Rightarrow n)$ پوده و درست است.

ب) گزاره‌ی دو شرطی به صورت $(n \leftrightarrow d)$ پوده و طبق قاعده‌ی مرپوthe نادرست است.



مثال: توسط جدول نشان دهید.

ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ دقیقاً یکسان با ارزش گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ است.

جدول ارزش‌گذاره را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

می‌پینید که ستون آخر هر دو گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ و $p \Leftrightarrow q$ یکسان است.

مثال: (از کتاب)

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim (p \vee q))$

(ب) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

(پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

(الف) $(\sim p \vee q)$ به صورت $(\sim (p \vee q))$ نادرست و $(p \Rightarrow q)$ به صورت $(\sim (p \Rightarrow q))$ درست است، ترکیب دو شرطی به صورت $(\sim p \Leftrightarrow \sim q)$ پوده و درست است.(ب) $(\sim p \vee \sim q)$ به صورت $(\sim (p \vee q))$ درست و $(p \vee q)$ به صورت $(\sim (p \vee q))$ نادرست است، ترکیب دو شرطی به صورت $(p \Rightarrow q)$ پوده و نادرست است.(پ) مثایپه موارد قابل ترکیب دو شرطی به صورت $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ درست است.(ت) چون p درست است، اگر r درست باشد، ترکیب دو شرطی درست و اگر r نادرست باشد، ترکیب دو شرطی نادرست است. پس ترکیب شرطی به صورت $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)$ درست است.ارزش کل گزاره خلاف ارزش r است. (یعنی: همه ارزش با r نادرست است).

ویژه آمادگی کنکور



در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف نظر کنید!

در ابتدا، گزاره‌ها را با دقت و نمونه تست‌های بیشتری بررسی می‌کنیم.

کدام مورد گزاره محسوب می‌شود؟

- ② چه هوای خوبی.
- ④ در پرتاب تاس، احتمال ظاهر شدن ۶، برابر پنجاه درصد است.

کزینه ۳

قطع در مورد سوم یک جمله‌ی خپری داریم که درستی یا نادرستی آن قابل پررسی است.



نقیض کدام گزاره صحیح نوشته شده است؟

- ① $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. نقیض: « $\sqrt{2}$ عددی صحیح است.»
- ② $4^3 - 4^2 = 4^3$ نقیض: « $4^3 - 4^2 > 4^3$ »
- ③ مهدی اخوان ثالث نویسنده کتاب ارغون است. نقیض: «مهدی اخوان ثالث نویسنده کتاب ارغون نیست.»
- ④ ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار دارد. نقیض: «ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد.»

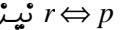
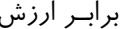
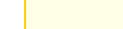
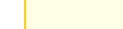
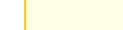
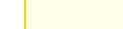
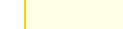
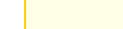
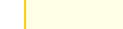
کزینه ۳

نقیض در گزینه ۱: « $\sqrt{2}$ عددی گنگ نیست.»

نقیض در گزینه ۲: «ایران در منطقه‌ی شرق آسیا قرار ندارد.»

بدانید: نویسنده‌ی ارغون (Organon)، ارسطو، شاگرد افلاطون است.)







اگر گزاره‌ی مرکب $(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب کدام است؟

۱ درست - درست ۲ درست - نادرست

۳ نادرست - درست ۴ نادرست - نادرست

گزینه ۴

ارزش کلی گزاره‌ها چنین پوده:

$$\underbrace{(p \wedge q)}_{\text{ن}} \vee \underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_{\text{ن}}$$

چون $(\sim p \Rightarrow q)$ نادرست است، پس $p \sim$ درست و q نادرست پوده است. (یعنی: p نادرست پوده)



اگر ارزش گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow \sim s)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

$\sim r \vee \sim q$ ۴

$p \Rightarrow s$ ۳

$s \Rightarrow \sim q$ ۲

$p \wedge \sim r$ ۱

گزینه ۴

باید $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim s$ درست و s پاشد، پس:

• p نادرست و q درست پوده است. (جواب تست در همین مرحله معلوم شد!)

ادامه برای آموزش:

• باید $(q \wedge r)$ درست و $s \sim$ نادرست پاشد، یعنی r و s هر دو درست پوده‌اند.

اکنون واضح است که سه گزینه‌ی دیگر ارزش نادرست دارند.



اگر گزاره‌ی $p \wedge \sim q \vee \sim p$ نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$ ۲

$(r \wedge q) \vee p$ ۴

$(p \vee \sim r) \wedge q$ ۱

$\sim (p \wedge q) \wedge r$ ۳

گزینه ۴

$(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست $\xrightarrow{\text{natijeh}}$ $(\sim p \text{ و } p \wedge \sim q)$ هر دو نادرست

$$\underbrace{\sim(p \wedge q)}_{\text{ن}} \wedge r$$

پس p درست است و طبق نادرستی $p \wedge \sim q$ ، باید q نادرست، یعنی q هم درست پاشد. اکنون پاچاگذاری می‌پینید که فقط گزینه‌ی سوم په صورت روپرتو پوده و نادرست است.



اگر گزاره‌ی $r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$ درست باشد، ارزش کدام نادرست است؟

$(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ ۲

$(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$ ۴

$\sim r \Leftrightarrow \sim p$ ۱

$(p \Leftrightarrow \sim r) \Rightarrow \sim p$ ۳

گزینه ۴



باید q و r ارزش یکسان داشته و همچنین $q \sim p$ ارزش مخالف داشته، یعنی p و q ارزش یکسان دارند. در نتیجه: $q \sim r$ ارزش یکسان دارند.

با قدری دقیق می‌بینید که گزاره در گزینه‌ی دوم به صورت $(d \Leftrightarrow n)$ پوده و نادرست است. (گزینه‌ی ۱ به صورت بدیهی و گزینه‌های سوم و چهارم طبق انتفاعی مقدم درست هستند.)



ممکن است لازم باشد طبق مباحث مختلف کتاب‌های درسی یا حتی اطلاعات عمومی، درستی یا نادرستی برخی گزاره‌ها را معلوم کنید.

؟ ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

- ① گروه خونی افراد متغیر کیفی ترتیبی است یا ۲۵ مربع کامل است.
- ② رابطه‌ی $\{(x, -3), (1, -3)\}$ تابع است یا هر عدد فرد، مضرب ۳ است.
- ③ عبارت $x^3 - 3x^2$ قابل تجزیه نیست و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
- ④ تعداد خودروهای یک پارکینگ متغیر کمی نسبتی است و نمودار $y = x$ از نواحی اول و سوم می‌گذرد.

گزینه ۳

گزینه‌ی سوم به صورت $(n \wedge d)$ پوده و نادرست است، چون:

$$3x^2 - 2x^3 = 2(16 - x^3) = 2(4 - x)(4 + x)$$

سایر گزینه‌ها دارای ارزش درست هستند.



؟ در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره‌ی مرکب ایجاد شده، نادرست باشد؟

$$[(-\frac{1}{3}) < -\frac{1}{2}] \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$$

- ① تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از چارک اول هستند.
- ② رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی نسبتی است.
- ③ معادله‌ی $0 = 36 - x^3$ دو ریشه‌ی قرینه دارد.
- ④ تمام مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۵۰ عبارتند از ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰.

گزینه ۴

چون $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ درست است، باید $[\dots \vee (-\frac{1}{3}) < -\frac{1}{2}]$ نادرست باشد و در نتیجه به اجبار باید در جای خالی یک گزاره‌ی نادرست چای گیرد. فقط مورد دوم چنین است، چون:

رتبه‌ی افراد در کنکور، متغیر کمی فاصله‌ای است.





نکته ۲

همیشه درست یا نادرست:

برخی گزاره‌های مركب، در تمام حالت‌های گوناگون ارزش گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌شان، فقط درست یا فقط نادرست هستند. نمونه‌هایی بینید:

❖ گزاره‌های $p \sim p$ و $p \vee p \Rightarrow p$ همیشه درست هستند.

چون در اولی حالت ($n \vee n$) و در دومی حالت ($n \Rightarrow n$) رخ نمی‌دهد.

❖ گزاره‌های $p \sim p$ و $p \wedge p \Leftrightarrow p$ همیشه نادرست هستند.

چون در اولی حالت ($d \wedge d$) و در دومی حالت ($d \Leftrightarrow d$ یا $n \Leftrightarrow n$) رخ نمی‌دهد.

(معمولًا با قدری بررسی می‌توان این نوع گزاره‌ها را تشخیص داد.)

اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره همواره درست است؟

$$p \Rightarrow \sim(p \vee q) \quad ④$$

$$p \Rightarrow (p \wedge \sim q) \quad ③$$

$$p \Rightarrow (p \vee q) \quad ②$$

$$p \Rightarrow (\sim p \wedge q) \quad ①$$

کزینه ۱

زیرا:

اگر p نادرست باشد، طبق انتقای مقدم، گزاره‌ی مركب درست است.

اگر p درست باشد، $(p \vee q)$ نیز درست پوده و باز هم گزاره‌ی مركب درست خواهد پود.



اگر p گزاره‌ای درست و q یک گزاره‌ی نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره‌ی $(q \wedge r) \Rightarrow (p \wedge r)$ کدام صحیح است؟

$$\text{همواره نادرست} \quad ②$$

$$\text{همواره درست} \quad ①$$

$$\text{به ارزش } s \text{ بستگی دارد.} \quad ④$$

$$\text{به ارزش } r \text{ بستگی دارد.} \quad ③$$

کزینه ۲

چون q نادرست است، تردیکی عطفی $(q \wedge s) \Rightarrow (q \wedge r)$ نادرست شده و در نتیجه، تردیکی شرطی طبق انتقای مقدم، خود به خود درست خواهد پود.



اگر ارزش گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ درست باشد، کدام گزاره همواره درست است؟

$$(p \Rightarrow q) \vee p \quad ②$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \quad ①$$

$$p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \quad ④$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow p \quad ③$$

کزینه ۳

از فرض می‌دانیم:

(۱) p نادرست است و q دلخواه. یا p و q هر دو درست هستند.

کزینه ۴: اگر حالت (۱) را پگیرید، په صورت « $n \Leftrightarrow n$ » و اگر حالت (۲) را پگیرید، په صورت « $d \Leftrightarrow d$ » پوده و بنا بر این همواره درست است. سایر گزینه‌ها در یکی از دو حالت بالا نادرست خواهند شد.



در مورد جدول ارزش گزاره‌های مرکب:

نکته ۳

برای یک گزاره جدول ۲ سطری، برای دو گزاره جدول $4 = 2^3$ سطری و ... است و در کل:
وقتی تعداد n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب حضور دارند، جدول 2^n سطر (حالت) خواهد داشت.
برای نمونه:
جدول r دارای $8 = 2^3$ حالت و جدول $p \wedge q$ دارای $4 = 2^2$ حالت است.

نتیجه:

به ازای هر گزاره‌ی ساده جدید که در گزاره‌ی مرکب وارد شود، تعداد حالت‌ها در ۲ ضرب می‌شود.

? در یک گزاره‌ی مرکب، اگر دو گزاره‌ی ساده‌ی دیگر با آن ترکیب شود، تعداد حالت‌های جدول ارزش گزاره ...

- ② دو حالت بیشتر می‌شود.
- ④ چهار حالت بیشتر می‌شود.

گزینه ?

چون دو گزاره‌ی جدید وارد شده است، تعداد حالات در $4 = 2 \times 2 = 2^2$ ضرب می‌شود.



? در جدول ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee q)] \wedge (\sim r \vee p)$ وجود دارد؟

۴ ④ ۲ ③ ۱ ② ۶ ①

گزینه ?

با توجه به دو مطلب زیر، چهارپنجم فوری مشخص می‌شود:

۱ کروشه‌ی سمت چپ ترکیب فصلی دو عبارت تقییم پوده و پنایه‌این همواره درست است.

پس تعداد F ها دقیقاً تعداد F های ستون $(\sim r \vee p)$ است.

۲ ترکیب فصلی $(\sim r \vee p)$ در حالت معمول $4 = 2^3$ سطر دارد که فقط یک سطر آن F است؛ ولی چون در جدول $8 = 2^3$ سطری آمده است، آن چهار سطر کفته شده هر کدام دو بار نوشته (تکرار) شده‌اند. بنابراین جواب برابر ۲ خواهد بود.





۱

در موارد زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید:

الف) ایران ده بار به جام جهانی فوتبال رفته است.

$$ت) ۳^{۲۱} > ۳^{۳۱}$$

پ) عدد $1 + ۳^۲$ عددی اول است.

ث) در زیر پوسته‌ی مریخ، زندگی میکروسکوپی جریان دارد.

۲ گزاره‌های درست را مشخص کنید:

الف) معادله $x = -2x - 2$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

پ) عدد ۱ عددی اول نیست، ولی مرکب است.

ث) انحراف معیار داده‌های ۷, ۷, ۷, ۷ با دامنه‌ی تغییرات آنها برابر است.

۳ گزاره‌های درست را مشخص کنید:

$$ب) ۲۵ < ۳ \times ۳ + ۶ \Leftrightarrow \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۱} < \frac{۳}{۲}$$

الف) اگر $\sqrt{۳}$ گویا باشد، عدد ۸ فرد است.

$$ت) \text{اگر } ۱۴ \text{ مضرب } ۱۴ \text{ باشد، } ۲۱۴ \text{ عددی منفی است.} \quad پ) ۱۱ \text{ عددی اول است اگر و فقط اگر } \frac{۷}{۳} > ۰.$$

۴

الف) جدول ارزش یک گزاره متشکل از چهار گزاره‌ی ساده، چند حالت دارد؟

ب) اگر جدول مربوط به n گزاره‌ی ساده ۱۲۸ حالت داشته باشد، n را مشخص کنید.۵ جدول ارزش گزاره‌ی $(q \vee p) \sim (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.

۶

اگر ارزش گزاره‌ی $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)$ را معلوم کنید.

۷

اگر ارزش گزاره‌های $p \wedge \sim r$ و $q \vee \sim r$ درست باشد، ارزش گزاره‌ی $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge r)$ را معلوم کنید.

۸

اگر ارزش $q \Rightarrow p$ نادرست و $r \Rightarrow q$ درست باشد، ارزش گزاره‌های $(p \vee q) \wedge (p \wedge s)$ و $r \Rightarrow (p \wedge s)$ را معلوم کنید.

(s گزاره‌ای دلخواه است.)

۹

عکس و عکس نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.

اگر $۰ < x^۳$ باشد، آنگاه x عددی مثبت است.

۱۰

اگر گزاره‌های $\sim q \wedge \sim r$ و $s \vee \sim q$ همگی درست باشند، ارزش گزاره‌ی $r \Rightarrow (p \wedge s) \vee (\sim p \wedge \sim s)$ را معلوم کنید.

تمرینات
 منتخب کتاب


۱ جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه	✓	
۴	$4 \times 2 = 2^2 \Rightarrow 8^2 > 4^2$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		

۲ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر گزاره‌ی زیر را مشخص کنید:

$$(q \wedge r) \Rightarrow r$$

$$\text{الف) } (p \vee r) \Rightarrow p$$

$$(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$$

$$\text{پ) } (q \wedge p) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$$\text{ث) } (r \Rightarrow p) \wedge p$$



۱ اگر ارزش p نادرست و q درست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های $(\sim p) \sim q$ و $\sim(\sim p \wedge q)$ به ترتیب کدام است؟

۲ درست - نادرست

۱ درست - درست

۴ نادرست - نادرست

۳ نادرست - درست

۲ کدام گزاره همیشه درست است؟

$\sim p \vee p$ ۴

$\sim p \wedge p$ ۳

$p \Rightarrow \sim p$ ۲

$\sim p \Rightarrow p$ ۱

۳ چند مورد در زیر به ترتیب گزاره هستند و ارزش چند گزاره درست است؟

الف) مجموع یک عدد فرد و یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

ب) عدد ۱۶۵۰۰۰ عددی اول است.

پ) استقلال تیم پر طرفداری است.

ت) ایران کشوری پهناور است.

۰ ۲ و ۴ ۴

۱ و ۲ ۳

۳ و ۴ ۲

۱ و ۴ ۱

۴ چند مورد از گزاره‌های زیر ارزش نادرست دارند؟

الف) هر رابطه به شکل $y = kx$ یک تابع است. (k عددی حقیقی است).

ب) میانه، همان چارک دوم داده‌های آماری است.

پ) انحراف معیار داده‌های یکسان، همواره برابر ۱ است.

ت) مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۲۰ عبارتند از: ۱۰، ۱۴، ۱۲، ۵، ۱۵

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۱ ۴

۵ چه تعداد از گزاره‌های مرکب زیر درست هستند؟

الف) ۱۶ عددی اول است و ۳۰ شمارندهی ۵۴ است.

ب) ۱۱ شمارندهی اول ندارد یا حاصل جمع دو عدد گنگ، همیشه گنگ است.

پ) هر عدد صحیح گویا است و حاصل ضرب هر دو عدد گویا، نیز عددی گویا است.

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۰ ۱

۶ اگر گزاره‌ی ترکیبی «۷ عددی صحیح و گنگ است یا » نادرست باشد، کدام مورد در جای خالی نمی‌تواند قرار

گیرد؟

۲ $\sqrt{2} - 1$ عددی گویا و مثبت است.

۱ ۹۱ عددی گنگ یا اول است.

۴ مربع چهار ضلع مساوی و چهار زاویه‌ی قائم دارد.

۳ اصفهان یا شیراز پایتخت اکنون ایران است.



۷ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر همیشه درست خواهد بود؟

$$\sim(p \vee \sim q) \wedge r \quad \text{پ}$$

$$(\sim p \vee r) \wedge q \quad \text{ب}$$

$$(\sim p \wedge q) \vee r \quad \text{الف}$$

۴

۳

۲

۱

$$\sim p \quad | \quad q \quad | \quad p \wedge r \quad | \quad q \vee (p \wedge \sim r)$$

F	T	T	?
T	F	F	?
F	F	F	?

۸ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، ستون آخر جدول مقابله کدام است؟

F
T
T

۴

T
F
F

۳

F
T
F

۲

T
F
T

۱

(توضیح کلید: هرف T به معنای «د» و هرف F به معنای «ن» است!)

۹ جدول ارزش مقابله مربوط به کدام گزاره است؟

p	q	?
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

$$p \vee \sim q \quad ۱$$

$$p \wedge \sim q \quad ۲$$

$$\sim p \wedge q \quad ۳$$

$$\sim p \vee q \quad ۴$$

۱۰ از درستی گزاره‌های $p \sim$ و $q \Rightarrow p$ ، کدام گزاره همیشه درست خواهد بود؟

$$\sim p \wedge q \quad ۴$$

$$p \wedge q \quad ۳$$

$$p \wedge \sim q \quad ۲$$

$$\sim (p \vee q) \quad ۱$$

۱۱ ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

۲ $\sqrt{16}$ گنج است یا ۳ زوج است.

۱ $\sqrt{39}$ گنج است و ۳۹ مربع کامل است.

۴ عدد $\sqrt{\frac{14-29}{5+14}}$ گویا است و عدد $\sqrt{214}$ صحیح است.

۳ اول است و $\sqrt{3}$ گنج است.

۱۲ در جدول زیر، مقادیر صحیح الف، ب و پ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$\sim p \vee q$	q	$\sim r$	$q \wedge (p \vee r)$
T	F	T	الف
F	پ	F	F
T	T	T	پ

$$F - F - T \quad ۱$$

$$F - T - F \quad ۲$$

۳ -بستگی به ارزش گزاره‌ی p دارد.

۴ -بستگی به ارزش گزاره‌ی p دارد.

۱۳ اگر ارزش نقطی گزاره‌ی p نادرست باشد، ارزش نقطی کدام گزاره‌ها درست کدام است؟

$$(p \vee q) \text{ و } (p \vee q) \vee (\sim q \wedge p) \quad ۲$$

$$p \wedge \sim q \text{ و } (p \vee q) \wedge \sim p \quad ۴$$

$$\sim p \wedge \sim q \text{ و } (p \wedge q) \vee p \quad ۱$$

$$\sim p \vee q \text{ و } (\sim p \vee q) \wedge p \quad ۳$$



0912 172 0728



@alireza_karbalaie



۱۴ گزاره‌ی $\sim p$ در کدام حالت نادرست است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

$$p \text{ و } q \text{ درست} \quad \text{۲}$$

$$\sim p \text{ و } \sim q \text{ درست} \quad \text{۴}$$

$$p \text{ و } \sim q \text{ درست} \quad \text{۱}$$

$$\sim p \text{ و } \sim q \text{ درست} \quad \text{۳}$$

۱۵ کدام مورد درست است؟

۱) عبارت «ضرب دو عدد اول، عددی فرد است.» گزاره‌ای درست است.

۲) نقیض گزاره‌ی «عدد a منفی است.» به صورت «عدد a مثبت است.» می‌باشد.

۳) گزاره‌ی $p \Rightarrow \sim p$ به انتفای مقدم درست است.

۴) عبارت «اگر $-4 = -2^3$ ، آنگاه $9 < 5$ است.» گزاره‌ای درست است.

۱۶ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r)$ با

ارزش کدام گزاره متفاوت است؟

$$q \wedge r \quad \text{۴}$$

$$p \wedge (p \vee r) \quad \text{۳}$$

$$(q \wedge p) \Rightarrow r \quad \text{۲}$$

$$\sim (q \vee \sim p) \quad \text{۱}$$

۱۷ چند گزاره در زیر آمده که نقیض آن دارای ارزش درست باشد؟

الف) $\sqrt{7}$ عدد مثبت است یا عددی گویا است.

ب) $\{(-1, 2), (2, 3), (-1, 2), (\sqrt{4}, 3)\} = f$ یک تابع است و $x^3 + 1$ همیشه مثبت است.

پ) اگر نمودار حبابی مربوط به دو متغیر باشد، آنگاه آمار درس ساده‌ای است.

ت) تفریق دو عدد گویا، عددی گویاست و جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

$$3 \quad \text{۴}$$

$$2 \quad \text{۳}$$

$$1 \quad \text{۲}$$

$$0 \quad \text{۱}$$

۱۸ گزاره‌ی $(3^m = 5^n - 5^m) \sim$ با کدام گزاره هم ارزش نیست؟

۱) ممکن است داده‌ها چند مد داشته باشند.

۲) ممکن است چارک سوم با میانه یکسان شود.

۳) رتبه شرکت کنندگان کنکور، کیفی ترتیبی است.

۴) نمودار راداری برای هر تعداد متغیر قابل رسم است.

۱۹ تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ای متشكل از n گزاره‌ی ساده، شانزده برابر تعداد سطرهای گزاره‌ی دیگری است که از m گزاره‌ی ساده تشکیل شده است. کدام رابطه صحیح متفاوت است؟

$$m+n=16 \quad \text{۴}$$

$$m=n-16 \quad \text{۳}$$

$$n-16=m \quad \text{۲}$$

$$m=n+16 \quad \text{۱}$$



۱۰ گزاره‌ی مرکب «۹۱ عددی اول است اگر و فقط اگر ». نادرست است. کدام عبارت نمی‌تواند در جای خالی قرار گیرد؟

- ۱ ضرب عدد فرد در فرد عددی فرد است.
- ۲ نقیض گزاره‌ی «عدد a اول است». به صورت «عدد a مرکب است.» می‌باشد.
- ۳ گزاره‌ی $(p \vee \sim p) \Rightarrow p \wedge q$ به انتقای مقدم درست است.
- ۴ عبارت «اگر < ۹ است. آنگاه $۹ = ۲^۰ + ۳^۰$.» گزاره‌ای درست است.

۱۱ با توجه به دو گزاره‌ی زیر، ارزش نقیضِ نقیضِ گزاره نادرست است؟

p : معادله‌ی $m^3 + 1 = x - 3$ همواره دو ریشه‌ی مثبت دارد.

q : معادله‌های $x^3 + 3x + 2 = 0$ و $x^3 + 2x + 3 = 0$ ریشه‌ی مشترک ندارند.

$$\sim(q \Rightarrow p) \quad ۴$$

$$\sim p \Rightarrow \sim q \quad ۳$$

$$p \wedge \sim q \quad ۲$$

$$p \vee \sim q \quad ۱$$

۱۲ چند گزاره در زیر آمده که نقیض آن دارای ارزش نادرست باشد؟

الف) اگر و تنها اگر $\frac{1}{\sqrt{m}} \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ عددی فرد است.

ب) اگر و تنها اگر $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ عددی مرکب است.

پ) اگر نمودار حبابی مربوط به بیش از سه متغیر باشد، آنگاه نمودار جعبه‌ای مربوط به داده‌های کیفی است و بر عکس.

ت) اگر 91 عدد مرکب باشد، آنگاه $\sqrt{m+2\sqrt{m+1}}$ گویا است و بر عکس.

$$۳ \quad ۴$$

$$۲ \quad ۳$$

$$۱ \quad ۲$$

$$۴ \quad ۱$$

۱۳ گزاره‌ی $\Rightarrow p$ در کدام حالت زیر نادرست است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

$$p \text{ و } q \text{ درست} \quad ۲$$

$$p \text{ و } \sim q \text{ درست} \quad ۱$$

$$p \text{ و } \sim q \text{ نادرست} \quad ۴$$

$$\sim p \text{ و } \sim q \text{ نادرست} \quad ۳$$

$$۴ \quad ۱$$

$$۵ \quad ۳$$

$$۶ \quad ۲$$

$$۷ \quad ۱$$

۱۴ در جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee (q \wedge r)$ ، در ستون پایانی چند تا T وجود دارد؟

$$۱ \quad ۴$$

$$۲ \quad ۳$$

$$۳ \quad ۲$$

$$۰ \quad ۱$$

۱۵ در جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee \sim q \wedge (\sim p \vee q)$ ، در ستون پایانی چند تا T وجود دارد؟

$$۱ \quad ۴$$

$$۲ \quad ۳$$

$$۳ \quad ۲$$

$$۰ \quad ۱$$

۱۶ در جدول ارزش گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee (\sim r \wedge p)$ در ستون پایانی چند تا T وجود دارد؟

$$۱ \quad ۴$$

$$۲ \quad ۳$$

$$۷ \quad ۲$$

$$۶ \quad ۱$$





ارزش گزاره‌های p و r و q به ترتیب چگونه باشد تا $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$ نادرست باشد؟ پیش‌نظر

۲ نادرست - نادرست - نادرست

۱ درست - نادرست - درست

۴ درست - نادرست - نادرست

۳ درست - درست - درست





۲

همارزی گزاره‌ها و استدلال

صفحة	فهرست مطالب
۲۹	گزاره‌های هم‌اچ
۳۰	استدلال ریاضی
۳۹	ویژه کنکور
۵۱	تمرینات تشرییمی و مختلف کتاب درسی
۵۳	تمرین تست

گزاره‌های همارز

شناخت گزاره‌هایی که در ظاهر متفاوت، ولی ارزش منطقی یکسان دارند، در این بخش بررسی می‌شود. تشخیص یکسان بودن گزاره‌ها، باعث سادگی بررسی آنها می‌شود.

گزاره‌های همارز:

دو گزاره‌ی P و Q را همارز (منطقی) گویند، هرگاه جدول ارزش آنها کاملاً یکسان باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$P \equiv Q$$

برای نمونه:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

می‌بینید که ستون مربوط به p و $\sim(\sim p)$ یکسان هستند. پس:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

نمونه‌ی دیگر:

چنان‌که در بخش قبل دیدیم، جدول ارزش گزاره‌های $q \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ یکسان است. در نتیجه:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

مثال: همارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ را با جدول نشان دهید. (این همارزی و دو مورد بالا در ذهن داشته باشید).

پاسخ

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

کافی است ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان داده و

مقایسه کنیم:

می‌بینید:

ستون‌های مربوط به دو گزاره‌ی مذکوب یکسان هستند.



مثال: همارزی زیر را نشان دهید.

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

پاسخ

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان می‌دهیم:

می‌بینید:

ارزش گزاره‌ی مذکوب $(p \vee q) \wedge p$ با ارزش p یکسان است.



در ادامه، چند همارزی مهم بیان و بررسی می‌شوند؛ با معرفی دو نوع گزاره مرتبط با مفهوم همارزی شروع می‌کنیم.

گزاره‌های ویژه:

❖ همیشه درست:

برخی گزاره‌ها در تمام حالت (همیشه) درست هستند، مانند:

$$p \vee \sim p$$

$$p \vee \sim p \equiv T$$

چنین گزاره‌ای را همارز با **T** نشان داده و می‌نویسیم:

❖ همیشه نادرست:

برخی گزاره‌ها در تمام حالت نادرست هستند، مانند:

$$p \wedge \sim p$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

چنین گزاره‌ای را همارز با **F** نشان داده و می‌نویسیم:

(حرف **T** برگرفته از **True** به معنای راست و حرف **F** برگرفته از **False** به معنای نادرست است.)

دلیل هر دو همارزی $p \wedge \sim p \equiv F$ و $p \vee \sim p \equiv T$ را می‌بینید:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

سؤال نهایی:

ارزش گزاره‌ی $(p \vee \sim p)$ همواره ... درست است. (خرداد ۱۴۰۲)

(زیرا به صورت $(ن \vee د) \equiv (د \vee ن)$ مُواهد پود.)

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

درستی همارزی مقابل را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید.

پاسخ

ارزش گزاره‌ی مرکب سمت چپ را در یک جدول نشان می‌دهیم:

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

می‌بینید:

گزاره‌ی مرکب داده شده همواره درست پوده و پنایه‌این با **T** همارز است.





مثال: درستی یا نادرستی همارزی زیر را توسط جدول بررسی کنید.

$$\sim(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv F$$

پاسخ

مشابه مثال قبل، ارزش گزاره را در چدول نشان می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$\sim(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p)$
د	د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	ن

می‌بینید:

ارزش گزاره‌ی مرکب همواره نادرست نبوده و همارزی پرقرار نیست.



یک همارزی مهم برای گزاره‌ی شرطی:

قانون عکس نقیض:

همارزی زیر به نام قانون عکس نقیض برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

يعني:

به جای آن که مستقیماً نشان دهیم p گزاره‌ی q را نتیجه می‌دهد، می‌توانیم روشی غیر مستقیم به کار ببریم:

نشان دهیم غلط بودن q به غلط بودن p منجر می‌شود!

دلیل این همارزی را در جدول زیر می‌بینید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

سؤال نهایی:

کدام گزاره همارز گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

$$p \Leftrightarrow q \quad (۱)$$

$$\sim q \Rightarrow \sim p \quad (۲)$$

$$\sim p \Leftrightarrow \sim q \quad (۳)$$

$$\sim p \Rightarrow \sim q \quad (۴)$$

(گزینه (۳): طبق قانون عکس نقیض)

مثال: در زیر، یک گزاره‌ی شرطی و عکس نقیض آن را می‌بینید؛ ارزش درستی آنها یکسان است. (هر دو درست)

گزاره: اگر باران بارد، آنگاه زمین تر می‌شود.



عکس نقیض: اگر زمین خشک باشد، آنگاه باران نباریده است.



قوانين دمورگان:

طبق دو همارزی زیر، نقیض را می‌توان در ترکیب‌های فصلی و عطفی توزیع کرد:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{و} \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

↑
تغییر

↑
تغییر

دلیل همارزی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ را می‌بینید، مورد دیگر هم به روش مشابه نشان داده می‌شود:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

مثال: نقیض گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ را مشخص کنید.



پنداشتن کیپ شرطی را به فصلی تبدیل کرده و سپس طبق دمورگان:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$



از مثال قبل به یاد داشته باشید:

$$\boxed{\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q}$$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $(x < 2) \wedge (2^x \neq 4)$

ب) اگر $\sqrt{49}$ مربع کامل باشد، آنگاه رضا در کنکور قبول می‌شود.



الف) طبق دمورگان:

$$\sim[(x < 2) \wedge (2^x \neq 4)] \equiv \sim(x < 2) \vee \sim(2^x \neq 4) \equiv (x \geq 2) \vee (2^x = 4)$$

ب) طبق همارزی $(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ چو این چنین است:

$\sqrt{49}$ مربع کامل است و رضا در کنکور قبول نمی‌شود.



در این بخش، کاربردهای ساده‌ای از منطق و استدلال ریاضی در نحوه استدلال کردن صحیح و برخی خطاهای منجر به نتایج ناصحیح را خواهیم دید. اولین گام برای این کار (یعنی: استدلال ریاضی)، این است که گزاره‌های توصیفی را توسط نمادهای ریاضی بنویسیم. با آوردن نمونه‌هایی، با این کار آشنا می‌شویم.

مثال: عبارت «مربع هر عدد بعلاوهٔ ۱، بزرگ‌تر یا مساوی دو برابر آن عدد است.» را با نماد ریاضی می‌نویسیم.

اگر عدد دلخواه را با x نشان دهیم، مربع آن x^2 و دو برابر آن $2x$ است. عبارت بالا:

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

مثال: (از کتاب)

عبارت زیر را با نماد ریاضی بیان کنید:

ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.

پاسخ

اگر قیمت فروش کالا x و قیمت خرید را y پگیریم، سود کالا $y - x$ و ده درصد قیمت فروش $\frac{1}{100}x$ متواءد شده، پس:

$$\frac{1}{100}x = y - x$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

الف) گزاره‌ی «مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، بعلاوهٔ پنج است.» را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

ب) درستی یا نادرستی استدلال زیر را بررسی کنید؛ اگر روش به کار رفته نادرست است، آن را اصلاح کنید.

گزاره: اگر طول و عرض مستطیلی را 3 برابر کنیم، آنگاه مساحت آن 3^3 برابر می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{استدلال} \\ \text{مساحت اولیه} : S = xy \Rightarrow y = \text{عرض اولیه} \text{ و } x = \text{طول اولیه} \\ \text{مساحت جدید} : S' = (3x)(3y) = 3^3xy = 3^3S \end{array} \right.$$

پاسخ

الف) به آسانی می‌نویسیم:

$$x^3 > 7x + 5$$

ب) نادرست است؛ زیرا:

عرض جدید را باید $y = 3$ پگیریم و چنان‌که می‌بینیم، مساحت جدید 9 برابر می‌شود:

$$S' = (3x)(3y) = 9xy = 9S$$


توجه کنید:

هنگام تبدیل عبارات به نماد ریاضی یا بالعکس:

به مفهوم واژه‌ها دقیق دقت کرده و ترتیب محاسبات روی مقادیر را دقیقاً رعایت کنید.

چند نمونه:

- نصف قرینه‌ی یک عدد به صورت $\frac{x^3}{3}$ ، قرینه‌ی نصف یک عدد $\frac{-x}{2}$ ، ثلث مربع یک عدد $\frac{x^3}{3}$ و مربع ثلث یک عدد $(\frac{x}{3})^2$ است.

مربع مجموع دو عدد به صورت $(a+b)^2$ و جذر مجموع مربعات دو عدد $\sqrt{a^2 + b^2}$ است.

سه واحد بیشتر از قرینه‌ی میانگین دو عدد به صورت $\frac{a+b}{3} + 1$ است.

ساده‌ترین روش در استدلال ریاضی به صورت زیر است:

قياس استثنایی:

در این نوع استدلال، فرض می‌کنیم گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ درست هستند. نتیجه این است که گزاره‌ی q باید درست باشد.

(اگر q نادرست باشد، گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ به صورت « $n \Rightarrow d$ » تبدیل شده و باید نادرست باشد.)

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \hline p \\ \therefore q \end{array}$$

مطلوب بالا به شکل نمادین، به صورت مقابل نوشته می‌شود:

(نماد: به معنای «نتیجه» یا «در نتیجه» است.)

نمونه‌ای بینید:

اگر بدانیم دو گزاره‌ی زیر صحیح هستند:

«اگر عددی منفی باشد، آنگاه قرینه‌ی آن مثبت است.» و « x عددی منفی است.»

$$\underbrace{p}_{p \Rightarrow q} \quad \underbrace{q}_{p} \quad \underbrace{p}_{p \Rightarrow q}$$

طبق قیاس استثنایی نتیجه می‌گیریم:

« x عددی مثبت است.»

مثال: (از کتاب)

دو مقدمه‌ی زیر صحیح هستند:

مقدمه ۱: اگر امشب، شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲:

اگر امشب، شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



طبق قیاس استثنایی: «ماه کامل است».



مثال: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس به درستی کامل شود:

مثلث دو زاویه‌ی برابر دارد. \Rightarrow مثلث دو ضلع برابر داشته باشد.

مثلث ABC دو زاویه‌ی برابر دارد.

پاسخ

طبق قاعده‌ی قیاس استثنایی:

مثلث ABC دو ضلع برابر دارد.



مثال: قیاس استثنایی را می‌توان در کل با گزاره‌ی مرکب مقابل صورت بندی کرد:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

درستی این قاعده را توسط جدول ارزشی نشان دهید.

پاسخ

چنان‌که می‌بینید، گزاره‌ی مرکب همواره درست است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

يعني:

در صورتی که p و استنتاگ $(p \Rightarrow q)$ درست باشند، q الزاماً درست فواهد بود.



در ادامه، نمونه‌های دیگری از استدلال‌های درست و در پایان برخی خطاهای در استدلال را خواهیم دید.

مثال: (از کتاب)

سه لیوان داریم که مانند شکل زیر یکی از آنها وارونه است. می‌خواهیم همه‌ی آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس). آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟



پاسخ

اگر تعداد لیوان‌های وارونه را د پکیزید، در این صورت:



اگر $s = 1$ است و وضعیت مطلوب این است که $s = 0$ شود،

در هر تغییر وضعیت لیوان‌ها، طبق شرط سؤال، سه حالت می‌تواند رخ دهد:

- **دو لیوان وارونه، درست شوند:**

در این حالت، از لیوان‌های وارونه ۲ تا کم می‌شود. (معنی: تبدیل s به $2 - s$)

- **دو لیوان درست، وارونه شوند:**

در این حالت، به لیوان‌های وارونه ۲ تا اضافه می‌شود. (معنی: تبدیل s به $s + 2$)

- **یک لیوان وارونه، درست و یک لیوان درست، وارونه شوند:**

در این حالت، تعداد لیوان‌های وارونه تغییر نمی‌کند. (معنی: تا پیش ماندن s)

توجه کنید:

در شروع کار $s = 1$ عددی فرد است و در هر مرحله، به اندازه‌ی عددی زوج (0 یا ± 2) تغییر می‌کند و پنایر این هیچ‌گاه نمی‌تواند به عدد زوج $0 = s$ تبدیل شود.



تکیک بعدی گاهی در استدلال کردن مفید است.

کاربرد عکس نقیض:

قبل‌آمدیم که همارزی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ برقرار است. هنگام کاربرد:

در صورتی که اثبات درستی $(p \Rightarrow q)$ دشوار باشد، به جای آن ثابت می‌کنیم $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ درست است.

توجه کنید:

اثباتات درستی $(p \Rightarrow q)$ ، یعنی: با فرض درست بودن گزاره‌ی p ، نشان دهیم که q حتماً درست است.

مثال: (از کتاب ثابت کنید:

اگر n^3 زوج باشد، آنگاه n زوج است. ($n \in \mathbb{Z}$)

پاسخ:

قرار دهید:

p : n^3 زوج است. و q : n زوج است.

پاید نشان دهیم $q \Rightarrow p$ درست است. چون این کار آسان نیست، درستی عکس نقیض آن را نشان می‌دهیم: $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p$. یعنی کافی است تا پیش کنیم:

اگر n فرد باشد، آنگاه n^3 فرد است.

اثبات: چون n فرد است، آن را به صورت $n = 2k + 1$ نوشتene و:

$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \rightarrow n^3 = \underbrace{8k^3 + 4k^2}_{m} + 2k + 1 \Rightarrow n^3 = 2m + 1$$





در پایان، دو نوع خطای استدلال را ببینید.

مغالطه:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

گاهی هنگام کاربرد قیاس استثنایی، از درستی $p \Rightarrow q$ و درستی q ، ممکن است نتیجه بگیریم p درست است؛ که البته اشتباه است.

مغالطه (استدلال نادرست)

مثال: استدلال زیر نمونه‌ای از یک مغالطه است:

مثلث سه زاویه‌ی برابر دارد. \Rightarrow مثلث متساوی الاضلاع باشد.

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ داریم:

مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

زیرا از درستی $p \Rightarrow q$ و q ، درستی p را نتیجه گرفته است.

توجه کنید:

نتیجه‌ی حاصل از یک مغالطه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی نتیجه‌ی قیاس استثنایی همواره درست است.



مثال: عبارات زیر را در نظر بگیرید:

مقدمه: $9 > 0$

مقدمه: $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$

جای خالی را: **الف**) طبق قیاس استثنایی **ب**) طبق مغالطه کامل کنید.

کدام نتیجه‌گیری معتبر است؟

پاسخ

الف) در حالت قیاس استثنایی، عبارت $9 > 0$ نتیجه $x > 0$ را دارد و پنایه‌این چوای: $0 > 1 > 0$. (استدلال معتبر)

ب) برای مغالطه باید عبارت $0 > 9$ را همان $0 > x$ بگیرید، یعنی $0 > x^3$ و چوای: $0 > 0$. (استدلال نامعتبر)



نوع دوم خطاهای:

خطای محاسبات:

گاهی قیاس استثنایی به درستی به کار می‌رود، ولی ممکن است در جزئیات محاسبات، اشتباه کرده باشیم. نمونه‌هایی ببینید:



مثال: روش زیر ادعا می‌کند که معادله‌ی $x^3 = 2x$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 2$ است. مراحل این استدلال در زیر

آمده است:

$$\frac{x(x-2)}{x} = 0 \quad \text{مرحله ۳:}$$

$$x(x-2) = 0 \quad \text{مرحله ۲:}$$

$$x^3 - 2x = 0 \quad \text{مرحله ۱:}$$

$$x = 2 \quad \text{مرحله ۵:}$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{مرحله ۴:}$$

خطای استدلال در کجاست؟



خطا در مرحله‌ی سوم اتفاق افتاده است. زیرا:

تقسیم صورت و مخرج بر x مجاز نیست، زیرا اگر $x = 0$ باشد، کسر بی معنی است.



توجه کنید: (مهم)

مانند آنچه در مثال قبل دیدیم:

تقسیم دو طرف یک تساوی فقط بر عددی که می‌دانیم غیرصفر است، مجاز می‌باشد.

مثال: استدلال زیر نشان می‌دهد که $\sqrt{9+16} = 7$ است. خطای استدلال در کدام مرحله رخ داده است؟

$$7 = \sqrt{9+16} \quad \text{مرحله ۳:}$$

$$7 = 5 \quad \text{مرحله ۴:}$$

$$7 = 3 + 4 \quad \text{مرحله ۲:}$$

$$7 = \sqrt{25} \quad \text{مرحله ۵:}$$

$$7 = 7 \quad \text{مرحله ۱:}$$

$$7 = \sqrt{9+16} \quad \text{مرحله ۶:}$$



خطا در مرحله‌ی چهارم اتفاق افتاده است. زیرا:

در جمع رادیکال‌ها، نمی‌توان عددهای زیر آن‌ها را با هم جمع کرد. ($\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$)



ویژه آمادگی کنکور



در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای سلطه بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف نظر کنید!

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ با کدام همارزش است؟

$$\sim p \vee q \quad 4$$

$$p \wedge \sim q \quad 3$$

$$p \vee r \quad 2$$

$$\sim (q \wedge r) \quad 1$$

کزینه ۱۴

چایگذاری اطلاعات داده شده و سپس استقاده از قوانین:

$$[(\underbrace{T \vee F}_{T}) \Rightarrow (\underbrace{r \wedge F}_{F})] \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$$

فقط در مورد چهارم، ارثیه گزاره نادرست است:

$$\sim p \vee q \equiv \sim T \vee F \equiv F \vee F \equiv F$$



برخی هم ارزی‌های گزاره‌ها به سادگی تشخیص داده می‌شوند:

نکته ۱

هم ارزی‌های بدیهی:

موارد ساده‌ی زیر، با توجه به تعریف ترکیب‌ها همواره برقرار هستند:

ترکیبات بدیهی یک گزاره با خودش:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \Rightarrow p \equiv T$$

$$p \Leftrightarrow p \equiv T$$

ترکیبات بدیهی یک گزاره با T یا F :

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv P$$

$$p \wedge F \equiv F \quad F \Rightarrow p \equiv T$$

ترکیبات بدیهی گزاره با نقیض خودش:

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

$$\sim p \Leftrightarrow p \equiv F$$

ترکیبات بدیهی گزاره با فصلی و عطفی:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

توجه داشته باشید که:

❖ جابجایی‌های $(p \Leftrightarrow q) \equiv (q \Leftrightarrow p)$ و $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ و $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ طبق جدول‌های مربوطه

برقرار هستند، اما:



گزاره‌ی شرطی $q \Rightarrow p$ و عکس آن $p \Rightarrow q$ یکسان نیستند.

❖ ترکیب‌های فصلی و عطفی مانند ضرب اعداد نسبت به جمع، «پخش‌پذیر» هستند و استفاده از آن‌ها در تست‌ها گاهی مفید واقع می‌شود:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

و

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

علاوه:

بر عکس پخش‌پذیری (فاکتور گیری) هم گاهی مفید است. نمونه:

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{\equiv F} \equiv p$$

❖ گزاره‌ی $(\sim p \wedge q) \vee p$ همارز کدام است؟

$p \vee q$ ④

p ③

$p \wedge q$ ②

q ①

۵ زینه ۴

با استفاده از پخش‌پذیری و سایر موارض گفته شده:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_{\equiv T} \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$



تعیین نقیض گزاره‌های مرکب با قوانین زیر انجام می‌شود:

نکته ۲

قوانین دمورگان:

دو همارزی زیر را قبلًا توسط جدول دیده‌ایم:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{و} \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

یعنی:

هنگام نقیض کردن ترکیب فصلی یا عطفی:

هر یک از گزاره‌ها نقیض شده و همچنین \wedge و \vee به هم تبدیل می‌شوند.

توجه کنید:

هنگام کاربرد قوانین دمورگان، همارزی $p \sim$ کاربرد فراوانی دارد. بعلاوه، ممکن است نقیض بیش از دو بار هم پشت سر هم قرار گیرد، در این صورت، می‌توانید جفت جفت (تعدد زوج) آن‌ها را حذف کنید. نمونه:

$$\sim(\sim(\sim(\sim(\sim(\sim(\sim p)))))) \equiv \sim p$$

هفت بار

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۵ عددی زوج است و π عددی گنگ است.

ب) ماه به دور خورشید می‌گردد یا زمستان هوا گرم است.



پاسخ

طبق قوانین دمورگان:

الف) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ عددی فرد است یا π عددی گویا است.

ب) ماه په دور خورشید نمی‌گردد و رُمسitan هوا گرم نیست.



نقیض گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ همارز کدام است?

$$\neg p \Leftrightarrow \neg q \quad ④$$

$$\neg p \Rightarrow q \quad ③$$

$$\neg p \wedge \neg q \quad ②$$

$$p \Leftrightarrow \neg q \quad ①$$

گزینه ۱

هر چند برای قاعده‌ای بیان نکردیم، به آسانی می‌بینید که ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg q$ (و به صورت مشابه $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$) دقیقاً پرعکس است.



تبديل گزاره‌ی شرطی به یک گزاره‌ی شرطی همارز دیگر:

نکته ۳

قانون عکس نقیض:

این همارزی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

يعني:

می‌توان هر دو گزاره را نقیض کرده و آنها را جابجا کرد.

برای نمونه:

همارز گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه عدد ۴ زوج است.» چنین خواهد بود:

اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۲ اول نیست.

به کمک عکس نقیض گزاره‌ی شرطی، به جای اثبات گزاره‌ی شرطی «اگر $x < 0$ ، آنگاه $|x| > 0$ » می‌توانیم کدام گزاره‌ی زیر را اثبات کنیم؟

$$x < 0 \text{ اگر } |x| > 0 \quad ②$$

$$x > 0 \text{ اگر } |x| \leq 0 \quad ④$$

$$x > 0 \text{ اگر } |x| \leq 0 \quad ①$$

$$x > 0 \text{ اگر } |x| > 0 \quad ③$$

گزینه ۳

گزاره را نمایین نوشته و قانون عکس نقیض را به کار می‌بریم:

$$(x \leq 0) \Rightarrow (|x| > 0) \equiv \sim(|x| > 0) \Rightarrow \sim(x \leq 0) \equiv (|x| \leq 0) \Rightarrow (x > 0)$$





نکته ۴

تبدیل شرطی به فصلی:

همارزی شرطی زیر دارای کاربرد فراوان است:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

يعنى:

در گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ ، می‌توان «گزاره‌ی اول را نقیض کرده»، «نماد \Rightarrow به \vee تبدیل شده» و گزاره‌ی دوم را نوشت.

نتیجه:

با استفاده از همارزی فوق و کاربرد دمورگان، نقیض گزاره‌ی شرطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید.

اگر ۵ عددی زوج باشد، آنگاه $10 \geq 10 - 1$ است.

پاسخ

طبق مطلب قپل، فقط گزاره‌ی دوم نتیجه شده و شرطی به عطفی تبدیل می‌شود:

۵ عددی زوج و $10 < 10 - 1$ است.

توجه کنید:

نقیض $<$ به صورت \leq ، نقیض \neq به صورت \neq و نقیض \leq به صورت $>$ است. (و برعکس)

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \sim$ ، با کدام گزاره‌ی زیر، همارزی است؟ (ریاضی ۹۸)

$$\sim p \wedge q \quad ④$$

$$p \wedge \sim q \quad ③$$

$$p \vee \sim q \quad ②$$

$$\sim p \vee q \quad ①$$

کلینه

چنان‌که گفته‌ایم؛ (همارزی شرطی و سپس دمورگان)

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q) \sim$ همارز کدام است؟

$$\sim p \wedge q \quad ④$$

$$q \vee \sim p \quad ③$$

$$p \wedge q \quad ②$$

$$p \vee \sim q \quad ①$$

کلینه

مشابه قپل:

$$\sim(p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$$



0912 172 0728



@alireza_karbalaie



کدامیک از هم ارزی‌های زیر نادرست است؟ (نکور خارج ۹۸) ?

$$\begin{array}{ll} p \vee (p \wedge q) \equiv p & ② \\ (\sim p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q) & ④ \end{array} \quad \begin{array}{ll} p \wedge (p \vee q) \equiv p & ① \\ (\sim p \vee q) \equiv (q \Rightarrow p) & ③ \end{array}$$

کذینه ۳ ✓

هم ارزی سایر گزینه‌ها را قپلأ دیده‌ایم. در مورد سوم:

$$q \Rightarrow p \equiv \sim q \vee p$$



جدول ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر با جدول ارزش گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$ یکسان نیست؟ (نکور ۱۴۰۰) ?

$$(p \Rightarrow q) \vee r \quad ④ \quad \sim p \vee q \vee r \quad ③ \quad (p \wedge q) \vee r \quad ② \quad p \Rightarrow (q \vee r) \quad ①$$

کذینه ۲ ✓

با استفاده از نکته‌ی قبل، می‌توان دید که گزینه‌های اول و چهارم پا گزینه‌ی سوم همارز هستند:

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv \sim p \vee (q \vee r) \equiv \sim p \vee q \vee r \quad \text{و} \quad (p \Rightarrow q) \vee r \equiv (\sim p \vee q) \vee r \equiv \sim p \vee q \vee r$$

در نتیجه:

فقط گزینه‌ی دوم می‌تواند جواب تست باشد!

روش ۴

(استفاده از تکنیک مقدار گذاری که پایین‌تر گفته شده، بر عهده‌ی داوطلبان نکور.)



گزاره‌ی $[p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow p$ با کدامیک از گزاره‌های زیر همارز است؟ ?

$$\sim p \wedge q \quad ④ \quad p \wedge q \quad ③ \quad p \vee q \quad ② \quad \sim p \vee p \quad ①$$

کذینه ۱ ✓

طبق هم ارزی‌های گفته شده:

$$\underbrace{[(p \wedge (p \vee q))] \Rightarrow p}_{\equiv p} \equiv (p \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee p)$$

توجه کنید:

وقتی به $p \Rightarrow p$ رسیدید، بدون استفاده از قوانین همارزی هم معلوم است که آن فقط با $(\sim p \vee p)$ همارز است. (هر دو همارز T هستند).



نکته ۵

هم ارزی دو شرطی:

گزاره‌ی دو شرطی $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ دقیقاً هنگامی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

بنابراین هر دوی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هم درست خواهد بود و در نتیجه:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

توجه کنید:

- برای تشخیص همارز بودن گزاره‌ها با هم، چنان‌که تاکنون دیده‌اید، لازم است:
- به همارزی‌های بدیهی توجه کرده و آن‌ها را در صورت وجود، به کار ببرید.
 - در صورت امکان، قوانین بالا را به صورت مناسب به کار ببرید.
 - اگر روش‌های بالا غیرممکن یا زمان کافی نبود:

تکنیک بسیار مفید زیر را به کار ببرید:

نکته ۶**مقدارگذاری:**

- در گزاره مرکب داده شده، جای گزاره‌های ساده «د» یا «ن» قرار داده و ارزش کل گزاره را تعیین کنید.
- همان مقادیر را در گزینه‌ها نیز قرار داده و هر گزاره‌ای که ارزش متفاوت با جواب مرحله‌ی قبل داشت، رد می‌شود.
 - در صورت لزوم، مقادیر «د» و «ن» گزاره‌ها را تغییر داده تا فقط یک گزینه باقی بماند.

توجه کنید:

هنگام جایگذاری گزاره‌ها، باید پرانتزها (و در کل ترتیب محاسبات) دقیقاً رعایت شوند.

? ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب چگونه باشد تا گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ نادرست باشد؟

۴ نادرست - درست

۳ درست - نادرست

۲ درست - درست

۱ نادرست - نادرست

گزینه ۲

برای نادرست پودن گزاره‌ی مرکب، پاید حتماً $(\sim p \Rightarrow q)$ نادرست باشد که:

فقط پا درست پودن هر دوی p و q رخ‌می‌دهد.

----- ♦ -----

? کدام مورد در خصوص ارزش گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$ درست است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

۲ همواره نادرست است.

۱ همارز $p \Rightarrow q$ است.

۴ همارز $p \Rightarrow \sim q$ است.

۳ همواره درست است.

گزینه ۱

به آسانی می‌توان حالت‌های گوئی‌گوئی را پرسی کرد، می‌بینید ارزش آن دقیقاً مانند $p \Rightarrow q$ است؟

۱) اگر p نادرست باشد، گزاره‌ی شرطی په انتقامی مقدم درست است.

۲) اگر p درست باشد:

در صورت درستی q ، گزاره‌ی $p \wedge \sim q$ نادرست شده و پاره‌هم گزاره‌ی شرطی په انتقامی مقدم درست است.

اگر q نادرست باشد، این پاره‌هم گزاره‌ی شرطی نادرست است.



توجه کنید:

(استداله از گوایین هم البته دشوار نیست)

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee q \equiv (\sim p \vee q) \vee q \equiv \sim p \vee \underbrace{q \vee q}_{q} \equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

کدام گزاره، همارز منطقی گزاره‌ی گزاره‌ی $(q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow p$ است؟ (نوبت ۲- تکاور ۱۴۰۲)

$\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)) \quad 2$

$p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)) \quad 1$

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \quad 4$

$(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \quad 3$

گزینه ۳

په روش مقدار گذاری، اگر هر سهی p ، q و r را درست پنگیم، گزاره‌ی داده شده (T) \sim ، یعنی نادرست خواهد شد.
پدرسی گزینه‌ها:

گزینه ۱) چون $q \wedge r$ درست است، ارزش کل گزاره $T \wedge (T \vee F)$ پوده که درست است. (رد گزینه)گزینه ۲) مجدداً چون $q \wedge r$ درست است، ارزش کل گزاره $F \vee (T \vee F)$ پوده و درست است. (رد گزینه)

گزینه ۳) هر دو پرانتز نادرست هستند و در نتیجه ارزش کل گزاره نیز نادرست است.

گزینه ۴) واضح است که ارزش کل گزاره په صورت $T \vee F$ پوده و درست است. (رد گزینه)

بنابراین فقط گزینه‌ی سوم می‌تواند صحیح باشد.

کدام گزاره‌ی زیر با T همارز است؟ (یعنی همیشه درست است).

$p \Rightarrow \sim q \quad 4$

$q \Rightarrow (p \wedge q) \quad 3$

$p \Rightarrow (p \vee q) \quad 2$

$q \wedge (p \Rightarrow \sim p) \quad 1$

گزینه ۱

با قدری دقیق می‌بینید که غیر از گزینه‌ی دوم، سایر گزینه‌ها گاهی نادرست هم هستند.

• گزینه ۱: اگر p و q هر دو «د» پاشند، گزاره‌ی $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است.• گزینه ۳: اگر p «ن» و q «د» پاشند، گزاره‌ی $q \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست است.• گزینه ۴: اگر q «ن» پاشد، گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim p) \wedge q$ نادرست است.گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ همارز کدام است؟

$q \quad 4$

$\sim q \quad 3$

$\sim p \quad 2$

$p \quad 1$

گزینه ۳

روش اول:

استداله از گوایین په گرتیپ: «تبديل به فصلی» - «فاكتور گیری» - «ساده سازی بدیهی»:

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv (\underbrace{\sim p \wedge p}_F) \vee q \equiv F \vee q \equiv q$$

(ووش دوچه): مقدار گذاری

اگر هر دوی p و q را «د» قرار دهیم، گزاره‌ی سؤال:

رد گزینه‌های ۲ و ۳ → درست : $(d \vee d) \wedge (d \Rightarrow d)$

پرای انتخاب پیش گزینه‌های اول و چهارم، p را «د» و q را «ن» قرار دهیم:

رد گزینه‌ی ۱ → نادرست : $(n \vee d) \wedge (n \Rightarrow d)$



کدام گزاره همواره درست است؟

$$p \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q \Rightarrow p)) \quad 2$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad 4$$

$$(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \quad 1$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \quad 3$$

گزینه ۲

اگر p را «ن» و q را «د» قرار دهیم:

گزینه‌های اول و سوم هر دو به صورت $(n \Leftrightarrow d)$ تبدیل شده، هر دو نادرست و رد می‌شوند.

اکنون اگر هر دوی p و q را «ن» قرار دهیم، گزینه‌ی چهارم:

رد گزینه‌ی ۴ → نادرست : $n \Rightarrow (n \Rightarrow n)$



اگر p ، q و r هر سه نادرست باشند، کدام گزاره‌ها همارزش است؟

$$\sim(p \vee r) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow r) \quad 2$$

$$(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee r) \quad 1$$

$$(\sim q \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge q) \quad 4$$

$$(p \vee \sim r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r) \quad 3$$

گزینه ۴

پاید هر کدام از گزینه‌ها چایگذاری شود، فقط در مورد آخر هر دو گزاره نادرست هستند:

$$r \vee q \equiv F \vee F \equiv F \quad \text{و} \quad (\sim q \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge q) \equiv \underbrace{(T \vee F)}_T \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge F)}_F \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$



اگر گزاره‌های $q \Rightarrow p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشند، آنگاه کدام گزاره‌ی زیر همواره درست است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

$$q \vee p \Rightarrow p \quad 2$$

$$q \vee p \Rightarrow q \quad 1$$

$$q \vee p \Rightarrow p \wedge q \quad 4$$

$$p \wedge \sim q \quad 3$$

گزینه ۱

اگر فرضیات فهمیده می‌شود:

گزاره‌ی q حتماً درست بوده، در غیر این صورت یکی از $q \Rightarrow p \Rightarrow q$ یا $\sim p \Rightarrow q$ حتماً نادرست خواهد شد.

بنابراین واضح است که:

گزاره‌ی $q \vee p \Rightarrow q$ همواره درست خواهد بود.



در ادامه، نمونه‌های بیشتری از بخش استدلال ریاضی خواهیم دید. در تبدیل عبارات به بیان ریاضی:

به واژه‌ها توجه داشته و ترتیب آن‌ها را دقیقاً رعایت کنید.

نماد ریاضی عبارت‌های کلامی «مجموع جذر هر عدد و مجذورش از خود عدد بزرگ‌تر است.» و «جذر مجموع هر عدد و مجذورش از خود عدد بزرگ‌تر است.» به ترتیب کدام است؟

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x}} > x \quad \text{و} \quad \sqrt{x} + x > \sqrt{x} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt{x} + x^3 > x \quad \text{و} \quad \sqrt{x + \sqrt{x}} > x \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} > x \quad \text{و} \quad \sqrt{x} + x^3 > x \quad \text{۱}$$

$$\sqrt{x + x^3} > x \quad \text{و} \quad \sqrt{x} + x^3 > x \quad \text{۳}$$

کزینه ۳

چون چذر عدد طبیعی؛ \sqrt{x} ، معکَّدْور آن؛ x^3 و خودش؛ x است. پعلاوه؛
مجموع چذر عدد و معکَّدْور؛ $x^3 + x$ و $\sqrt{x + x^3}$



نماد ریاضی عبارت «مکعب ثلث تفاضل دو عدد کوچک‌تر از جذر تفاضل مربعات همان دو عدد نیست.» کدام است؟

$$\left(\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^3-b^3}}\right)^3 \geq \sqrt{a^3-b^3} \quad \text{۲}$$

$$\left(\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^3-b^3}}\right)^3 > \sqrt{(a-b)^3} \quad \text{۴}$$

$$\left(\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^3-b^3}}\right)^3 \geq \sqrt{(a-b)^3} \quad \text{۱}$$

$$\left(\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^3-b^3}}\right)^3 > \sqrt{a^3-b^3} \quad \text{۳}$$

کزینه ۴
توجه کنید:

کوچک‌تر نیست: « \nless » به « \geq » تبدیل می‌شود.

مکعب یعنی: توان سه، ثلث یعنی: تقسیم بر سه و تفاضل یعنی: $a - b$. پخش اول؛ $\left(\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^3-b^3}}\right)^3$

:۹

تفاضل یعنی: $a - b$ و چذر همان رادیکال است. پخش دوم؛ $\sqrt{a^3-b^3}$



کدام مورد یک قیاس استثنایی است؟

مقدمه ۱: اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، $\hat{A} = 60^\circ$ است.

۲

اگر باران باراد، آنگاه به سینما نمی‌رویم.

۱

مقدمه ۲: در مثلث MBC داریم: $\hat{B} = 60^\circ$

ما به سینما نمی‌رویم.

∴ مثلث MBC متساوی‌الاضلاع است.

بنابراید باران باریده است.

مقدمه ۳: اگر بارندگی کم شود، آنگاه کشاورزی از رونق می‌افتد.

۴

اگر فردا عید باشد، آنگاه مدرسه تعطیل است.

۳

مقدمه ۴: امسال بارندگی کم است.

فردا مدرسه تعطیل است.

∴ کشاورزی از رونق می‌افتد.

فردا عید فطر است.

کزینه ۵

فقط مورد چهارم مطابق ساختار قیاس استثنایی است:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \hline p \\ \therefore q \end{array}$$



نمونه‌هایی از بررسی خطاهای استدلال ببینید:

؟ اگر A مغالطه و B قیاس استثنایی باشد، مقدمه‌ی ۱ برای A و نتیجه‌ی B به ترتیب کدام است؟

A

مقدمه‌ی ۱: اگر امروز جمعه است، آنگاه امروز مدرسه تعطیل است.

مقدمه‌ی ۲:

.....

B

مقدمه‌ی ۱: اگر a فرد و b اول باشد، آنگاه $a+b$ زوج است.

مقدمه‌ی ۲:

.....

۱ امروز جمعه است. - $a+b$ اول نیست. ۲ امروز تعطیل است. - $a+b$ فرد است.

۳ امروز جمعه است. - $a+b$ زوج است. ۴ امروز تعطیل است. - $a+b$ زوج است.

گزینه ۳

طبق مقادیر قیاس استثنایی و مغالطه، فقط مورد سوم صحیح است.



؟ در مورد استدلال زیر، کدام گزینه درست است؟

مقدمه‌ی ۱: اگر a و b اعداد اول دو رقمی باشند، آنگاه $ab+1$ عددی زوج است.

مقدمه‌ی ۲: $21 \times 23 + 1 = 484$

∴ ۲۱ عددی اول است.

۱ قیاس استثنایی است.

۲ یک مغالطه است.

۳ عکس نقیض گزاره‌ی شرطی است.

۴ مقدمات ۱ و ۲ طبق قیاس استثنایی هستند، فقط نتیجه نادرست نوشته شده است.

گزینه ۲

واضح است که یک مغالطه انجام شده است.





در اثبات ادعای «اگر ضرایب b و c در معادله $ax^3 + bx + c = 0$ دو برابر شوند، جواب‌ها نیز دو برابر می‌شوند.» خطای محاسباتی در کدام مرحله رخ داده است؟ (ریشه‌های معادله بالا هستند).

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$$

$$x'_1, x'_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^3 - 4a(2c)}}{2a} \quad \text{مرحله ۲:}$$

$$x'_1, x'_2 = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a} \quad \text{مرحله ۳:}$$

$$x'_1, x'_2 = 2(x_1, x_2) \quad \text{مرحله ۴:}$$

$$x'_1, x'_2 = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^3 - 4ac'}}{2a} \quad \text{مرحله ۱: ریشه‌های جدید:}$$

$$x'_1, x'_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^3 - 4(4ac)}}{2a} \quad \text{مرحله ۵:}$$

$$x'_1, x'_2 = \frac{2(-b \pm \sqrt{b^3 - 4ac})}{2a} \quad \text{مرحله ۶:}$$

۶ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کاریه ۲

خطا در مرحله‌ی چهارم رخ داده، زیرا:

$$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^3 - 4(4ac)}}{2a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^3 - ac)}}{2a} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^3 - ac}}{2a}$$



دویین خطای محاسباتی حل معادله $x^3 = 4x$ در کدام مرحله رخ داده است؟

$$\frac{4x(x^2 - 1)}{4x} = 0 \quad \text{مرحله ۳:}$$

$$x = \sqrt{1}, x = -\sqrt{1} \quad \text{مرحله ۴:}$$

۳ ۴

$$4x(x^2 - 1) = 0 \quad \text{مرحله ۲:}$$

$$x^2 = 1 \quad \text{مرحله ۵:}$$

۶ ۳

$$4x^3 - 4x = 0 \quad \text{مرحله ۱:}$$

$$x^3 - x = 0 \quad \text{مرحله ۶:}$$

۲ ۲

۱ ۱

کاریه ۳

اولین خطای مرحله‌ی سوم است: (تقسیم تساوی پر $2x$ ، چون اگر $x = 0$ باشد، حق تقسیم کردن نداریم). خطای دوم در مرحله‌ی ششم است. زیرا:

$$x^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{1} \\ x = -\sqrt[3]{1} \end{cases}$$



با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات آن می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه‌ی بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)



۱) $a = b$

طرفین تساوی ۵ام ۱ را در a ضرب کرده است

۲) $a^r = ab \dots$ را از طرفین تساوی ۵ام ۲ کم کرده است

طرفین تساوی ۵ام ۳ را تمیزی کرده است

۴) $(a-b)(a+b) = (a-b)b \dots$ تقسیم کرده است

طرفین تساوی ۵ام ۴ را ب
 $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$ تقسیم کرده استبه جای a طبق ۵ام ۱، مقدار b را قرار داده است

۵) $\frac{a^r}{b} = \frac{b}{b} \dots$ تقسیم کرده است

۶) $1 = 1$

۲۸ ۴

۷ ۳

۵ ۲

۴ ۱

گزینه ۴

چون $a = b$ است، پس $a - b = ۰$ پوشه و پنپایین حق ساده کردن آن در صورت و مخرج را نداریم.

در کدام گزینه خطای محاسباتی وجود ندارد?

۱) $x^r + ۱۶ = ۰ \rightarrow x = \pm ۴$ ۲

۲) $x < y \rightarrow -۲x < -۲y$ ۴

۳) $x < y \rightarrow -۲ + x > -۲ + y$ ۱

۴) $\sqrt{a^r - ۱۰a + ۲۵} = |a - ۵|$ ۳

گزینه ۳

خطاهای رُخ داده چنین هستند:

در گزینه (۱) با جمع دو طرف با ۲ - چهت تغییر نمی‌کند. •

در گزینه (۲) معادله به صورت $-۱۶ = x^r$ پوشه و چواب ندارد. •

در گزینه (۴) با ضرب دو طرف در ۲ - پاید چهت تغییر کند. •

ولی مورد سوم طبق مخصوصیت $\sqrt{a^r} = |a|$ صحیح نوشته شده است:

$$\sqrt{a^r - ۱۰a + ۲۵} = \sqrt{(a - ۵)^r} = |a - ۵|$$





۱

توسط جدول ارزش گزاره‌ها همارزی زیر را نشان دهید:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q \equiv T$$

۲

توسط جدول ارزش گزاره‌ها همارزی زیر را نشان دهید:

$$\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \equiv p$$

۳

اگر r گزاره‌ای درست و $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \vee r)$ گزاره‌ای نادرست باشد، برای همارزی زیر دلیل بیاورید:

$$r \Rightarrow (q \wedge p) \equiv F$$

۴

بیان ریاضی هر عبارت را بنویسید:

الف) پنج برابر هر عدد برابر ثلث مربع آن عدد است.

ب) حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متولی، کوچک‌تر یا مساوی مجموع مربعات آن دو عدد است.

پ) مجموع مجذور دو عدد، کوچک‌تر از مجذور مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع معکوس‌های دو عدد مثبت، بزرگ‌تر از معکوس مجموع آن دو عدد است.

۵

اشکال محاسباتی هر مورد را مشخص کنید:

الف) $x > y \Rightarrow x(x-y) > y(x-y)$

ب) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x-1} = \frac{2x-3x-1}{x-1} = \frac{-x+1}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

پ) $5 = \sqrt{25} = \sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

ت) $-5 < -2 \Rightarrow (-5)^3 < (-2)^3 \Rightarrow 25 < 4$

ث) $2 = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{4}{1 + \sqrt{2}}$

۶

نشان دهید اگر عدد طبیعی n فرد باشد، n^3 نیز عددی فرد است.

تمرینات

منتخب کتاب



۷

درستی هر یک از هم ارزی‌ها را توسط جدول ارزش‌ها نشان دهید.

الف) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ب) $p \Rightarrow p \equiv T$

پ) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$



۴

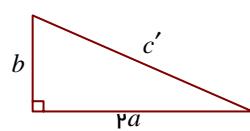
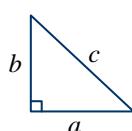
گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

- الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.
 ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه‌ی پنج است.
 پ) هر عدد ناصف‌ی از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۵

در هر مورد زیر، خطای استدلال را مشخص کنید.

- الف) در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم‌های a و b ووتر c همانند شکل زیر، اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر نیز دو برابر می‌شود.



استدلال:

می‌دانیم رابطه‌ی فیثاغورس: $c^2 = a^2 + b^2$ برقرار است. این رابطه را برای مثلث قائم الزاویه‌ی جدید می‌نویسیم.

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4\underbrace{(a^2 + b^2)}_{c^2} = 4c^2 \Rightarrow c'^2 = 4c^2 \Rightarrow c' = 2c$$

ب) تساوی $\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = 2\sqrt{11}$ برقرار است.

استدلال:

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{2 \times 3}} = \sqrt{\frac{12 + \frac{4 \times 16}{3}}{2}} = \sqrt{12 + 32} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$


تمرین تست
TEST


۱ کدام مورد نادرست است؟

۱ هر گزاره‌ی شرطی، با عکس نقیض خود همارز است.

۲ نقیض ترکیب فصلی دو گزاره، همارز ترکیب عطفی نقیض آنها است.

۳ نقیض ترکیب دوشرطی دو گزاره، همارز ترکیب دوشرطی نقیض آنها است.

۴ نقیض ترکیب عطفی دو گزاره، همارز ترکیب فصلی نقیض آنها است.

۲ خطای حل معادله‌ی $x^3 - 4x = 0$ در کدام مرحله رخ داده است؟ ($x \neq 0$)

$$\frac{2x(x^2 - 2)}{2x} = 0 \quad \text{مرحله ۱: } 2x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{مرحله ۲: } x^2 = 2$$

$$2x^3 - 4x = 0 \quad \text{مرحله ۳: } x^3 - 2 = 0$$

$$x^3 = 2 \quad \text{مرحله ۴: } x^3 - 2 = 0$$

۳ **۴** **۲** **۱**

۳ عکس نقیض گزاره‌ی «اگر عددی گنج یا گویا باشد، آنگاه مربع عدد فرد b ، عددی فرد است.» کدام است؟

۱ اگر مربع عدد فرد b ، عددی زوج باشد، آنگاه a عددی گنج یا گویا نیست.

۲ اگر مربع عدد فرد b ، عددی فرد باشد، آنگاه a عددی گنج یا گویا است.

۳ اگر مربع عدد فرد b ، عددی فرد باشد، آنگاه a عددی گنج و گویا است.

۴ اگر مربع عدد فرد b ، عددی زوج باشد، آنگاه a عددی گنج و گویا نیست.

۴ گزاره‌ی «اگر تیم A قهرمان نشود، شخص a ناراحت نخواهد شد.» نادرست است. پس:

۱ تیم A قهرمان شده و a ناراحت است.

۲ تیم A قهرمان نشده و a ناراحت است.

۳ تیم A قهرمان شده و a ناراحت نیست.

۴ تیم A قهرمان نشده و a ناراحت نیست.

۵ همارز گزاره‌ی $(q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$ کدام است؟

۱ **۲** **۳** **۴**

۶ کدامیک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

۱ **۲** **۳** **۴**

۷ اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت چه تعداد از هم ارزی‌های زیر به درستی نوشته شده است؟

الف $(\sim q \vee q) \equiv F$ **پ** $(\sim p \wedge p) \equiv F$

ت $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ **پ** $\sim(\sim p \vee q) \equiv (p \vee \sim q)$

۱ **۲** **۳** **۴**



۸ هم گزاره‌ی $p \wedge (q \vee r)$ کدام است؟

$$p \vee (q \vee r) \quad ④ \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad ③ \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad ② \quad p \wedge (q \wedge r) \quad ①$$

۹ هم گزاره‌ی $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ کدام است؟

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \quad ④ \quad r \Rightarrow (p \wedge q) \quad ③ \quad (p \vee q) \Rightarrow r \quad ② \quad r \Rightarrow (p \vee q) \quad ①$$

۱۰ اگر p و q دو گزاره‌ی درست و r نادرست باشد، کدام مورد صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} \sim r \Rightarrow (q \wedge r) \equiv p \Leftrightarrow q & ② \\ (p \vee \sim q) \wedge r \equiv \sim r & ① \\ (q \wedge \sim r) \Leftrightarrow (q \wedge p) \equiv F & ④ \\ (\sim r \vee \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow q) \equiv T & ③ \end{array}$$

۱۱ نماد ریاضی کدام عبارت به صورت $\sqrt[m]{\frac{x}{m}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{m}}$ است؟

- ۱ دو سوم عددی منهای نصف آن، از نصف مجذور آن عدد ۳ واحد بیشتر است.
- ۲ اختلاف ثلث و ربع عددی، از پنجاه درصد جذر آن عدد، ۳ واحد بیشتر است.
- ۳ دو برابر تفاضل ربع عددی از ثلث آن، ۳ واحد بیشتر از پنجاه درصد از جذر آن عدد است.
- ۴ ثلث عددی منهای ربع آن عدد، از ربع جذر آن عدد ۳ واحد بیشتر است.

۱۲ در کدام گزینه، بیان نمادین نادرست است؟

۱ مجموع ثلث و ربع عددی، سه واحد از آن عدد کمتر است: $x - 3$

۲ مربع مجموع دو عدد بزرگ‌تر از مجموع مربعات آن دو عدد است: $x^2 + y^2 > (x+y)^2$

۳ مکعب هر عددی بزرگ‌تر از مربع آن عدد است: $x^3 > x^2$

۴ مجموع معکوس‌های دو عدد ناصلفر، کوچک‌تر از معکوس مجموع آن دو عدد است: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{x+y}$

۱۳ در مورد استدلال زیر، کدام مورد نادرست است؟

$$a \times b = 323$$

۱ اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه ab عددی فرد است.

..... ∴

۲ روش بکار رفته نادرست است.

۳ نتیجه‌ی استدلال بالا همیشه نادرست است.

۱۴ در کدام گزینه، خطای محاسباتی وجود ندارد؟

$$(x-3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=8 \end{cases} \quad ② \quad a > b \Rightarrow -2a > -2b \quad ①$$

$$a > b \Rightarrow a+k > b+k \quad ④$$

$$\frac{mx+y}{y} = mx \quad ③$$

 $\sim q$ ④ q ③ p ② $\sim p$ ①گزاره‌ی q با کدامیک همارز است? $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow q$ ⑯

بیان ریاضی گزاره‌ی زیر کدام است؟ ⑯

(مجذور مجموع عددهای مثبت a و b از نصف جذر مجموع آنها، کوچک‌تر نیست.) \sim

$$\frac{\sqrt{a+b}}{2} \leq (a+b)^{\frac{1}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \quad ② \quad \frac{\sqrt{a+b}}{2} > \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (a > 0, b > 0) \quad ①$$

$$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \quad (a > 0, b > 0) \quad ④ \quad \frac{\sqrt{a+b}}{2} > (a+b)^{\frac{1}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \quad ③$$

در مورد استدلال‌های زیر، کدام بیان درست است؟ ⑰

A

مقدمه ۱: اگر امروز جمعه است، آنگاه مدرسه تعطیل است.
مقدمه ۲: امروز مدرسه تعطیل است.
 \therefore امروز جمعه است.

B

مقدمه ۱: اگر دانشآموزی کلاس یازدهم باشد، آنگاه رشته‌ی او انسانی است.

مقدمه ۲: مهندز دانشآموز کلاس یازدهم است.

\therefore رشته‌ی تحصیلی مهندز علوم انسانی است.

A قیاس استثنایی و B مغالطه است. ⑯

B هر دو مغالطه هستند. ⑯

چند مورد زیر نقیض گزاره‌ی « p عددی اول است.» را درست بیان کرده است؟ ⑯A: p عددی مرکب است. ⑯ B: p عددی اول نیست. ⑯

۳ ④

۲ ③

۱ ②

۰ ①

ارزش گزاره‌ی $[p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$ کدام است؟ ⑯A: $p \vee T$ ④ B: $q \wedge T$ ③ C: $q \vee F$ ② D: $\sim F$ ①

چند مورد از هم ارزی‌های زیر برقرار است؟ ⑯

A: $p \vee (\sim F) \equiv \sim p$ B: $\sim p \vee (\sim F) \equiv T$ C: $p \wedge \sim (\sim T) \equiv T$ D: $\sim p \wedge \sim (\sim p) \equiv T$

۳ ④

۲ ③

۱ ②

۰ ①

با توجه به گزاره‌های زیر، نقیض گزاره‌ی $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$ کدام گزاره است؟ ⑯

A: میانه و میانگین داده‌های آماری همیشه یکتا هستند.

B: نمودار حبابی را می‌توان برای بیش از دو متغیر به کار برد.

C: در داده‌های آماری: ۹۱, ۸۷, ۱۹, ۹۵, ۸۴، مرکزیت داده‌ها با میانه تعیین می‌شود.

$\sim(\sim q)$ ④

r ③

$p \vee F$ ②

$\sim F$ ①

گزاره‌ی $(p \wedge q) \wedge (q \vee p)$ با چه تعداد گزاره در زیر همارز است؟ ۲۲

$p \vee \sim q$:۳۳

$\sim p \vee q$:۴

$\sim p$:۱

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۰ ۱

اگر p گزاره‌ای ... و q گزاره‌ای دلخواه و r گزاره‌ای ... باشد، گزاره‌ی $(q \wedge \sim r) \wedge (q \Rightarrow p)$ دارای ارزش ... ۳۳

است.

۲ نادرست- دلخواه- درست

۱ دلخواه- نادرست- نادرست

۴ دلخواه- درست- نادرست

۳ درست- درست- درست



آموزش تشرییمی - کنکور ریاضی یازدهم اخسانی

μ

تابع(١)

صفحه	فهرست مطالب
۵۸	یادآوری توابع
۶۱	چند نوع تابع ساده
۶۸	تابع قدرمطلق
۷۲	ویژه گنکوو
۸۶	تمرینات تشرییمی و مختلف کتاب درسی
۸۹	تمرین تست

نمونه‌ای از یک تابع بینید:

مثال: دو متغیر x و y با فرمول $y = -x + 3$ به هم مربوط هستند.

- (الف) اگر x از مجموعه‌ی $\{0, 1, 3, 8\}$ انتخاب شود، مقادیر y را حساب کرده و در مجموعه‌ای به نام B قرار دهید.
 (ب) تغییری که این رابطه روی اعضای A انجام می‌دهد را توصیف کنید.
 (پ) این رابطه، هر مقدار x را به چه تعداد y ربط می‌دهد؟

پاسخ

الف) عددهای عضو A را در رابطه چایگزین x می‌کنیم؛

$$x = 0 : \quad y = -(0) + 3 = 3$$

$$x = 1 : \quad y = -(1) + 3 = 2$$

$$x = 3 : \quad y = -(3) + 3 = 0$$

$$x = 8 : \quad y = -(8) + 3 = -5$$

پس $\{3, 2, 0, -5\} = B$ حواهد پود.

ب) چنان‌که می‌بینید،

رابطه ابتدا هر عضو A را قرینه کرده و سپس حاصل را با عدد ۳ جمع می‌کند.

پ) طبق توصیف بالا،

هر عضو از A در طی دو مرحله به یک عضو از B مرتبط می‌شود.



اکنون:

رابطه‌ای را در نظر بگیرید که به هر شخص، دوستان او را مربوط می‌کند. این رابطه یک تابع معرفی نمی‌کند، چون:

ممکن است یک فرد دوستان زیادی داشته باشد یا حتی هیچ دوستی نداشته باشد.

توجه:

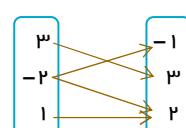
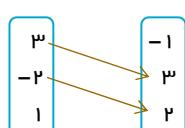
یک «تابع» از A به B :

باید به هر عضو از A ، دقیقاً یک عضو از B را مربوط کند.

هر تابع با قاعده‌ی خاص خود، اعضای A را به اعضای B ربط (نسبت) می‌دهد که به آن «**فناوبطی تابع**» گویند. در مثال بالا، ضابطه به صورت $y = -x + 3$ داده شده بود.

نمایش پیکانی (نمودار ون) روابط را به یاد بیاورید:

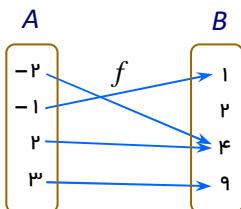
مثال: دو نمودار ون در زیر هیچ کدام تابع نیستند:





(زیرا عدد ۱ را به هیچ مقداری مربوط نکرده است.)

(زیرا عدد ۲ – را به دو مقدار مربوط کرده است.)



مثال: تابع f را در نمودار مقابل بینید:

اگر اعضای دامنه را در مؤلفه‌های اول و اعضای برد را در مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب قرار دهیم، نمایش دیگری از توابع حاصل می‌شود:

$$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (2, 2), (3, 9)\}$$

همه‌ی زوج‌ها را در یک مجموعه به نام f قرار داده‌ایم.

توجه کنید:

شرط تابع بودن در نمایش با زوج‌های مرتب این است که:

مؤلفه‌های اول هیچ دو زوج مرتبتی برابر نباشند.

به بیان معادل:

اگر دو زوج مؤلفه‌ی اول برابر داشتند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم برابر باشند.

مثال: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی زیر یک تابع باشد.

$$\{(a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b+3), (3, 5), (5, 3)\}$$

پاسخ

چون $(5, 3)$ و $(5, a-2)$ مؤلفه‌ی اول پرایبر دارند، پاید: $a-2=3$ و لذا $a=5$. در این صورت، زوج مرتب $(a-2, b+3)$ به صورت $(3, b+3)$ تبدیل می‌شود. چون زوج $(3, 5)$ نیز در تابع وجود دارد، پس پاید داشته باشیم:

$$b+3=5 \Rightarrow b=2$$

اگر مقادیر $a=5$ و $b=2$ را در تابع چایگزین سازیم گایع به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\{(4, 2), (5, 3), (5, 5)\}$$

نمودار مختصاتی:

اگر تمام زوج‌های مرتب تابع را در یک دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار تابع به دست می‌آید.

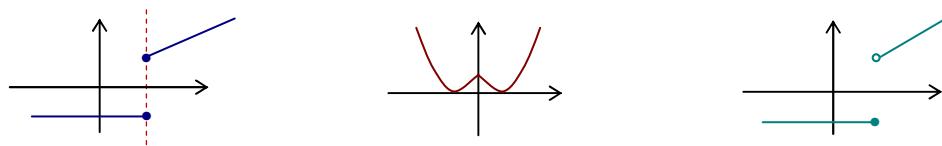
بعلاوه:

یک نمودار هندسی وقتی نمودار یک تابع است که:

هر خط موازی محور y آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

برای نمونه:

شکل‌های زیر، نمودار سمت چپ تابع نیست، ولی دو نمودار دیگر تابع هستند:



ساده‌ترین تابع ممکن، تابعی است که تغییر مقادیر ورودی، در مقدار خروجی تابع تاثیری ندارد.

تابع ثابت:

دامنه می‌تواند هر مجموعه‌ای دلخواه A باشد. این تابع همه‌ی اعضای دامنه را به یک عدد ثابت ربط می‌دهد:

$$\begin{cases} C : A \longrightarrow B \\ \text{مقدار ثابت} \\ C(x) = \text{_____} \end{cases}$$

پس؛

$f(x) = -1$ و $g(x) = 3$ توابع ثابت محسوب می‌شوند.

در نتیجه:

مقادیر x هر عددی می‌توانند باشند، ولی y فقط یک مقدار دارد؛ یعنی: برد مجموعه‌ای یک عضوی است.
برای نمونه؛

تابع y که با جدول مقادیر زیر داده شده، تابعی ثابت است:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۳	۳	۳	۳	۳

این تابع به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{cases} C : A \longrightarrow \{3\} \\ \text{دامنه } A \text{ و برد } \{3\} \text{ است.} \\ C(x) = 3 \end{cases}, A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

تابع ثابت در حالت‌های مختلف:

زوجهای مرتب:

در نمایش یک تابع ثابت به صورت زوجهای مرتب، تمام مؤلفه‌های دوم با هم برابر هستند.

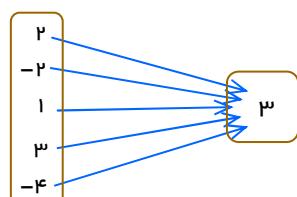
به عنوان مثال، تابع ثابت بالا در نمایش زوج مرتبی چنین خواهد بود:

$$g = \{(2, 3), (-2, 3), (0, 3), (1, 3), (-1, 3)\}$$

نمودار ون:

اگر f تابعی ثابت باشد، آنگاه تمام فلش‌ها به یک عدد در شکل سمت راست برده خواهد شد.

مثالاً تابع g چنین است:



❖ نمودار مختصاتی:

اگر دامنه عددهای مشخص و محدودی باشد، فقط نقاط مربوطه را در دستگاه مشخص می‌کنیم. ولی اگر دامنه اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد، نمودار تابع ثابت یک خطی افقی، یعنی خطی موازی محور طولها خواهد بود.

نمودار $f(x) = 2$ را در دو حالت $D_f = \mathbb{R}$ بینید:



❖ مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر تابع $f = \{(2, a-1), (0, 2), (-1, 3), (1, b)\}$ یک تابع ثابت باشد، حاصل ab را به دست آورید.

پاسخ

پایید مؤلفه‌های دوم یکسان (پرایم ۳) پاشند. پس:

$$a-1=2 \Rightarrow a=3 \quad \text{و} \quad 1=b \Rightarrow b=1$$

در نتیجه:

$$ab = 3 \times 1 = 3$$

❖ مثال: مقادیر a و b را چنان بباید که f یک تابع ثابت باشد:

$$f = \{(2, -1), (-1, a-b), (\sqrt{3}, -a+2b)\}$$

پاسخ

پایید هر سه مقدار در مؤلفه‌های دوم یکسان (پرایم ۱) پاشند. پس:

$$a-b=-1 \quad \text{و} \quad -a+2b=-1$$

دو طرف معادله را با هم جمع می‌کنیم: $-2 = b-a$. حال در معادله اول عدد -2 را جای b قرار می‌دهیم:

$$a-(-2)=-1 \rightarrow a+2=-1 \Rightarrow a=-3$$

❖ مثال: تابع ثابت $f(x) = k$ را در نظر بگیرید. کدام مورد درست و کدام نادرست است؟ چرا؟

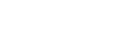
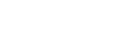
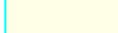
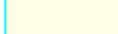
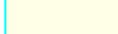
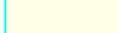
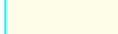
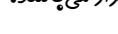
الف) نقاط $(-1, 2)$ و $(1, -2)$ می‌توانند هر دو روی نمودار f واقع باشند.

ب) تساوی‌های $f(x) = f(-x)$ و $f(ax) = af(x)$ همواره برقرار هستند.

پ) تساوی‌های $f(a+b) = f(a) + f(b)$ و $f(a+b) = f(ab)$ همواره برقرار هستند. در چه صورتی هر دو تساوی برقرار هستند؟

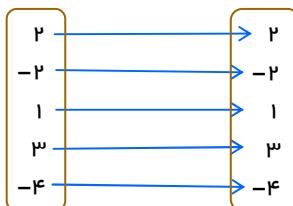
پاسخ

الف) نادرست است؛ چون پایید عرض نکات یکسان پاشند.



نمودار ون:

اگر f تابعی همانی باشد، آنگاه تمام فلش‌ها به عددی برابر خودشان در شکل سمت راست برده خواهند شد:

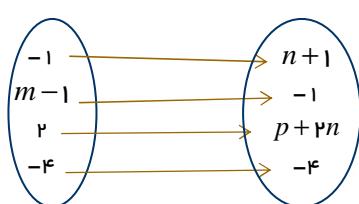
**نمودار مختصاتی:**

اگر دامنه اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد، نمودار تابع همانی خط ($y = x$)، یعنی نیمساز ربع اول و سوم خواهد بود. ولی اگر دامنه عددهای مشخص و محدودی باشد، فقط نقاط مربوطه را مشخص می‌کنیم که البته بازهم روی نیمساز قرار دارند.

نمودار تابع همانی را در دو حالت $D_f = \{-1, 0, 1, 3\}$ و $D_f = \mathbb{R}$ ببینید:

**توجه کنید:**

چنان‌که در تمام موارد بالا هم می‌بینید، دامنه و برد تابع همانی یکسان هستند.



مثال: اگر نمودار ون مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد،

مقادیر m , n و p را بباید.

پاسخ

طبق تعریف تابع همانی، باید مؤلفه‌های اول و دوم پرایپ پاشند:

$$n+1 = -1 \rightarrow n = -2, \quad m-1 = -1 \Rightarrow m = 0$$

همچنین باید داشته باشیم $p+2n = 2$ و $n = -2$ ، لذ:

$$p-4 = 2 \Rightarrow p = 6$$



مثال: تابع همانی f را در نظر بگیرید. کدام مورد درست و کدام نادرست است؟ چرا؟

الف) نقاط $(-1, -1)$ و $(1, -1)$ می‌توانند هر دو روی نمودار f واقع باشند.

ب) تساوی‌های $f(x) + f(-x) = 0$ و $f(ax) = af(x)$ همواره برقرار هستند.

پ) تساوی‌های $f(a+b) = f(a) + f(b)$ و $f(ab) = f(a)f(b)$ همواره برقرار هستند.

پاسخ

الف) نادرست است؛

چون پاید طول و عرض هر نقطه یکسان پاشد و پنابراین فقط $(-1, -1)$ روی نمودار است.

ب) هر دو مورد صحیح است، زیرا:

$$f(ax) = ax, \quad af(x) = a \times x = ax \quad \text{و} \quad f(x) + f(-x) = x + (-x) = x - x = 0$$

ب) هر دو مورد صحیح است، زیرا:

$$f(ab) = ab, \quad f(a)f(b) = a \times b = ab \quad \text{و} \quad f(a+b) = a+b, \quad f(a)+f(b) = a+b$$



گاهی تابع بیش از یک ضابطه دارد:

تابع چند ضابطه‌ای:

در این نوع تابع، دامنه به چند بخش تقسیم شده و هر قسمت یک ضابطه دارد. مانند:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & -2 < x < 1 \\ 1-x & x \geq 1 \end{cases}$$

در این تابع دو ضابطه‌ای:

اگر عددی در محدوده $1 < x < -2$ داده شود، مقدار تابع از x^3 و اگر $x \geq 1$ باشد، مقدار تابع از ضابطه $1-x$ به دست می‌آید. (علاوه برای نمونه، $g(-3)$ تعریف نشده، چون -3 در دامنه نیست.)

توجه کنید:

برای رسم نمودار این تابع، در هر قسمت از دامنه، ضابطه‌ی مربوطه به کار برده می‌شود.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲) *

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{در تابع } f(\sqrt[3]{2}) \quad \text{الف) } f(\sqrt[3]{2})$$

پاسخ

عدد $\sqrt[3]{2}$ در محدوده $x \geq 0$ قرار دارد، پنابراین طبق ضابطه اول:

$$f(\sqrt[3]{2}) = -(\sqrt[3]{2})^3 = -2$$

به روش مشابه، چون $-1 = f(1)$ است، در نتیجه:

$$f(f(1)) = f(-1) = -1 + 1 = 0$$



مثال: تابع قطعه‌ای (چند ضابطه‌ای) زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2 & x < -1 \end{cases}$$



الف) مقادیر $f(2)$ و $f(-\frac{1}{2})$ را حساب کنید.

پاسخ

الف) عدد ۳ در محدوده‌ی $x > 1$ از دامنه قرار دارد و پنجمین در صابطه‌ی اول قرار می‌گیرد، عدد $\frac{1}{3}$ در صابطه‌ی دوی:

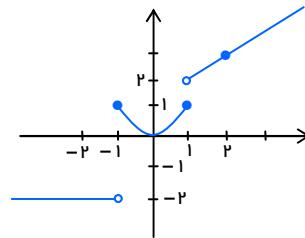
$$f(2) = 2 + 1 = 3 \quad \text{و} \quad f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

ب) برای $x < -1$ نمودار نیم خط افقی $y = -x$ است. برای $-1 \leq x < 1$ با نقطه‌گذاری، قطعه سهی و نیم خط رسم می‌شود:

$$x > 1 \xrightarrow{y=x+1} \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2) \\ x = 2 \rightarrow y = 2 + 1 = 3 \Rightarrow (2, 3) \end{cases}$$

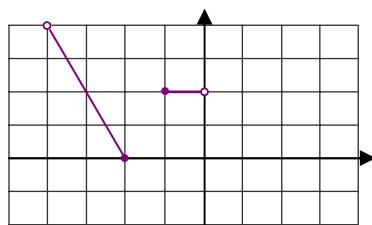
(البته: چون $x = 1$ در دامنه‌ی $x > 1$ نیست، نقطه‌ی $(1, 2)$ تخلی رسم می‌شود.)

$$-1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{y=x^2} \begin{cases} x = -1 \rightarrow y = 1 \Rightarrow (-1, 1) \\ x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1) \end{cases}$$



مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲) *

صابطه و نمودار تابع با اطلاعات و نمودار داده شده را کامل کنید.



$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 0 \\ 2 & \\ -2x - 4 & -4 < x \leq -2 \end{cases}$$

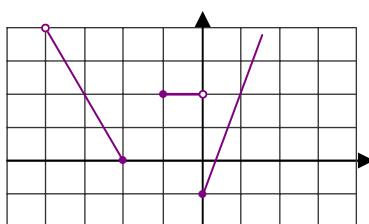
پاسخ

پنجمین بُن نمودار، صابطه‌ی وسط مربوط به $x < -1$ است.

برای $x \geq 0$ تُوسط $x = 0$ و $x = 1$ ، دو نقطه $(0, 1)$ و $(1, 0)$ تعیین شده و نیم خطی در سمت راست محور عرض رسم می‌شود.

برای محدوده‌ی $-4 < x \leq -2$ دو نقطه $(-4, 4)$ و $(-2, 0)$ تُوسط مربوطه نوشته می‌شود:

$$y - 0 = \frac{4 - 0}{-4 + 2}(x + 2) \Rightarrow y = -2x - 4$$



(کنون چوایی کامل شده است؛

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 0 \\ 2 & -1 \leq x < 0 \\ -2x - 4 & -4 < x \leq -2 \end{cases}$$

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید:



0912 172 0728

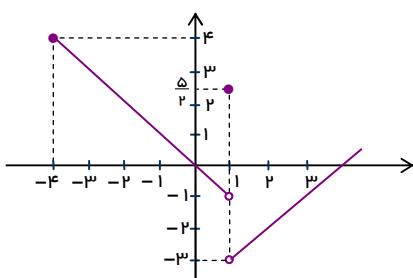


@alireza_karbaliae



$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

پاسخ



برای $x > 1$ پاید نیم خط $y = x - 4$ و برای $-4 \leq x < 1$ پاید طبق $y = -x$ یک پاره خط رسم شود. این کار با مختصات دو نقطه از دامنه هدیک په آسانی انجام می‌شود:

با توجه به نمودار:

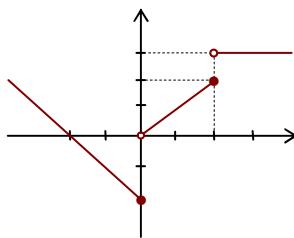
$$D_g = [-4, +\infty) \quad \text{و} \quad R_g = (-\infty, +\infty)$$

توجه کنید:

شاخهی سمت راست نمودار به سمت بالا تا بینهایت ادامه دارد.



مثال: ضابطهی مربوط به نمودار مقابل را بنویسید.



پاسخ

قطعه‌هی سمت راست، تا پیغ گذشت است، معادلهی دو قطعه‌ی دیگر را می‌توانید توسط نوشتن معادلهی خط گذرا از دو نقطه پنوندید. نتیجه‌ی به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x) = \begin{cases} 3 & x > 2 \\ x & 0 < x \leq 2 \\ -x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$$



0912 172 0728



@alireza_karbalaie

تابع قدر مطلق

تابع مهم دیگری در این بخش بررسی می‌شود:

قدر مطلق:

قدر مطلق یک عدد دلخواه x را با نماد $|x|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

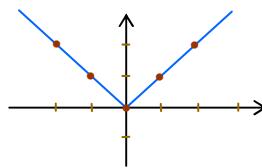
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

به عبارت دیگر، قدر مطلق، یک عدد منفی را قربنه (و مثبت) می‌کند، ولی: روی سایر اعداد تأثیری ندارد.

بعلاوه:

تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق نامیده و با جدول برخی نقاط، نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۲	۱	۰	۱	۲



توجه کنید:

نمودار این تابع، نیمسازهای نواحی اول و دوم است.

تبدیل تابع با ضابطه قدر مطلق به یک تابع دو ضابطه‌ای، به رسم نمودارهای بیشتری کمک می‌کند.

مثال: نمودار تابع $|2x - 4| = y$ را رسم کنید.

پاسخ

ضابطه را دقیقاً با دو شرط منفی پومند یا نپومن عبارت داخل قدر مطلق، با دو ضابطه می‌نویسیم:

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & 2x - 4 \geq 0 \\ -(2x - 4) & 2x - 4 < 0 \end{cases}$$

نمعادلات سمت راست را حل می‌کنیم تا دامنه هر ضابطه دقیقاً مشخص شود:

$$y = \begin{cases} 2x - 4 & x \geq 2 \\ -2x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

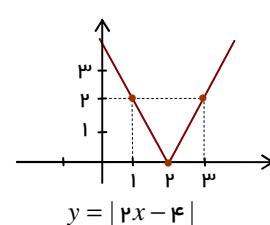
اکنون پرای دامنه $x \geq 2$ قطعه‌ای از خط $y = 2x - 4$ و پرای دامنه $x < 2$ قطعه‌ای از خط $y = -2x + 4$ را توسط مختصات دو نقطه در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$y = -2x + 4, \quad x < 2$$

x	۱	۲
y	۲	۰

$$y = 2x - 4, \quad x \geq 2$$

x	۲	۳
y	۰	۲





مثال: نمودار تابع $y = |x| - 2$ را رسم کنید.

پاسخ

به جدول مقادیر هر دوی توابع $y = |x|$ و $y = |x| - 2$ توجه کنید:

$$y = |x|$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

$$y = |x| - 2$$

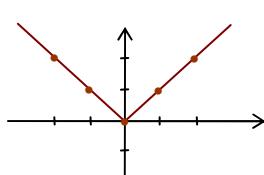
x	-2	-1	0	1	2
y	0	-1	-2	-1	0

در مقایسه راست بچپ مشاهده می‌کنید که:

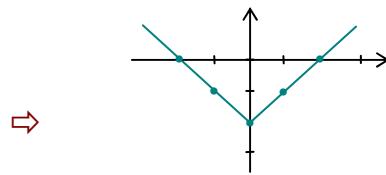
طول نقطه تغییر نکرده و فقط عرض نقطه در تابع $y = |x| - 2$ ، دو واحد کمتر شده است.
دلیل این است که:

تابع $y = |x|$ به $y = |x| - 2$ تبدیل شده؛ یعنی مقدار y دقیقاً 2 واحد کوچک‌تر شده است.

پنابراین نمودار دو تابع فقط از لحاظ عمودی 2 واحد اختلاف دارند:



$$y = |x|$$



$$y = |x| - 2$$



نتیجه:

نمودار $y = |x|$ را در نظر بگیرید.

❖ اگر از $|x|$ عددی کم شود، مانند $y = |x| - 2$ واحد به سمت پایین حرکت می‌دهیم.

❖ اگر $|x|$ با عددی جمع شود، مانند $y = |x| + 3$ واحد به سمت بالا حرکت می‌دهیم.

علاوه:

این روش را می‌توانید در مورد منحنی‌هایی چون $y = x^3 - 1$ و $y = x^3 + 2$ نیز با استفاده از سهمی $x^3 = y$ نیز به کار ببرید.

دو قاعده‌ی بعدی در تبدیل نمودار را هم (بدون دلیل!) پذیرفته و به کار ببرید:

جابجایی افقی نمودار:

اگر در ضابطه، از x مقداری کم شود؛ مانند: $y = |x - 2|$ را ۲ واحد به راست انتقال دهید.

توجه کنید:

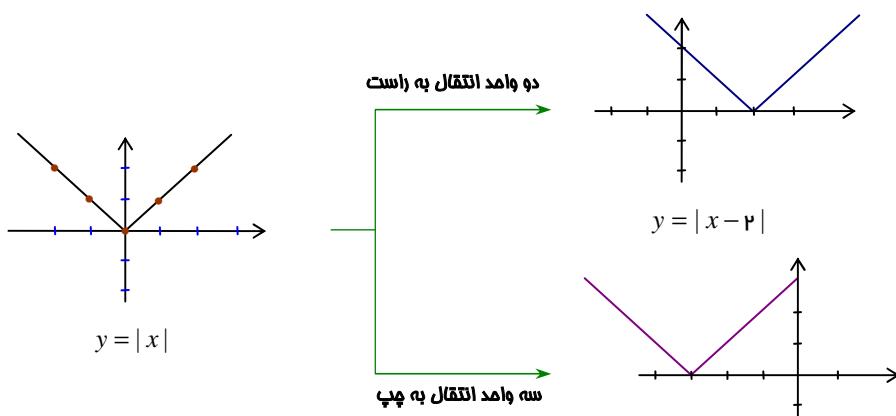
در تغییر $y = |x - ۲|$ به $y = |x|$ می‌بینید که x به ۲ تبدیل یافته است.

به صورت مشابه:

اگر بخواهیم نمودار $y = |x + ۲|$ را توسط نمودار $y = |x|$ رسم کنیم، می‌بینید که x به ۲ تبدیل شده و قاعده‌ی رسم این است که:

نمودار $y = |x|$ را ۲ واحد به سمت چپ جابجا می‌کنیم.

رسم نمودارهای $y = |x - ۲|$ و $y = |x + ۳|$ را به روش بالا می‌بینید:



$$y = |x + 3|$$

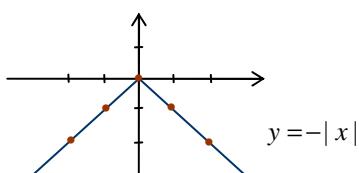
مثال: الف) نمودار تابع $y = -|x|$ را رسم و نمودار را توصیف کنید.

ب) با استفاده از قسمت قبل، نمودار تابع $y = -|x+1|-2$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

الف) با تشکیل چدول مقادیر، نمودار رسم می‌شود:

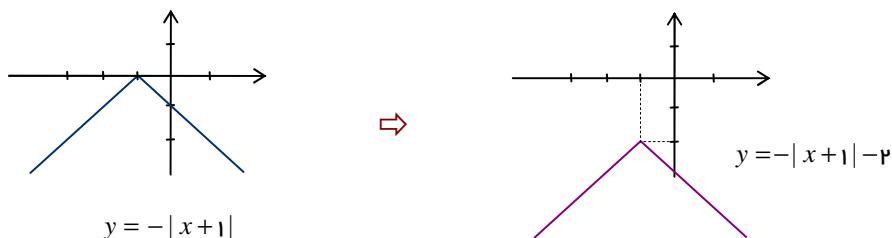
	$y = - x $				
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۲	-۱	۰	-۱	-۲





چنان‌که می‌بینید: نمودار $y = |x|$ نسبت به محور طول قرینه شده گی نمودار $y = -|x|$ که همان عرض نقطه نمودار است، قرینه شده است.

ب) با شروع از نمودار $y = |x+1|$ ، ابتدا $y = -|x+1|$ را رسم می‌شود (یک واحد په چپ) و سپس -2 (دو واحد په پایین):



چنان‌که می‌بینید: دامنه‌ی این تابع تمام اعداد \mathbb{R} و پرداز $-2 \leq y$ است.

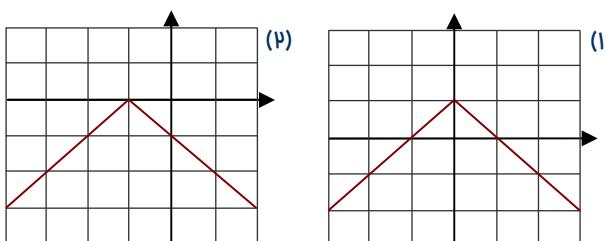


مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار تابع (الف) و کدام نمودار تابع (ب) را نشان می‌دهد؟

$$\text{الف)} \quad y = -|x| + 1$$

$$\text{ب)} \quad y = -|x+1|$$



نمودار (۱) مدپوط په تابع (الف) است، زیرا:

نمودار $y = -|x|$ یک واحد به بالا منتقل شده است.

در نمودار (۲)، می‌بینید که نمودار $y = -|x+1|$ یک واحد په چپ منتقل شده؛ یعنی:



ویژه آمادگی کنکور



در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای سلطه بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،

می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف نظر کنید!

با بررسی بیشتر تابع ثابت $y = k$ (که k یک عدد است)، آغاز می‌کنیم.

اگر $\{(\mathfrak{m}, a), (\mathfrak{n}, b), (-1, \mathfrak{c}), (1, c)\}$ یک تابع ثابت باشد، واریانس عددهای a , b و c کدام است؟

۶ ④

۶ $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{6}$ ②

۰ ①

کزینه ۱

چون تابع ثابت است، هر سه عدد a , b و c یکسان (پرایبر ۶) هستند و:

می‌دانیم اگر داده‌ها پرایبر پاشند، واریانس آن‌ها پرایبر صفر است.



توجه کنید:

در تابع ثابت مانند $f(x) = k$

اگر تابع روی هر عدد یا عبارتی اثر کند، حاصل همیشه برابر k است.

مانند:

$$f(-\mathfrak{x}) = k, f\left(\frac{x-\Delta}{\mu}\right) = k, f(\mathfrak{x}^{\nu} + 1) = k, f(k) = k$$

در تابع ثابت f ، اگر $f(x) + f(x^{\nu} + 1) = 2f(x^{\nu} + 1)$ باشد، در این صورت حاصل $f(x) + f(x^{\nu}) = 2f(x^{\nu})$ کدام است؟

-۲ ④

۲ ③

-۱ ②

۰ ①

کزینه ۱

پیغیرید: $f(x) = k$. پنایرین:

$$f(2x^{\nu} + 1) = 2f(x^{\nu}) + 1 \rightarrow k = 2k + 1 \Rightarrow k = -1$$

پس:

$$f(x) + f(x^{\nu}) = k + k = 2k = -2$$



اگر f تابعی ثابت باشد و $f(\mathfrak{x}) \times f(-1) = \frac{xf(\mathfrak{x}) + \mathfrak{x}}{\mu}$ حاصل $f(-1) = f(\mathfrak{x})$ کدام می‌تواند باشد؟



0912 172 0728



@alireza_karbaliae

۴**۳****۲****۱****گزینه ۳**

مشابه پاسخ شسته قبلا:

$$k \times k = \frac{3k+2}{2} \rightarrow 2k^2 = 3k + 2 \rightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=9+16=25}$$

$$\rightarrow k_1, k_2 = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow k_1, k_2 = 2, -\frac{1}{2} \Rightarrow f(-1) = 2, -\frac{1}{2}$$



در تابع ثابت f ، اگر $f(-1) = (f(3))^3 + 5f(\sqrt{2}) = 36$ باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۴**۳****۲****۱****گزینه ۱**

مشابه قبلا پاید داشته باشیم:

$$k^3 + 5k = 36 \quad \text{و} \quad 4k = k^2$$

معادله‌ی سمت راست پا فکتورگیری، چواپ‌های 0 و $k = 4$ دارد و معادله‌ی سمت چپ پا تعییه، چواپ‌های -9 و $k = -4$ خواهد داشت. فقط $k = 4$ در هر دو مشترک است و قابل قبول، در نتیجه:

$$f(-1) = k = 4$$



تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(m^3 - 7n + 1, -f(m))$ و $(n^3 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم باشند، مقدار $f(-1)$ کدام است؟ (نوبت ۲-کنکور ۱۴۰۲)

۴**۳****۲****۱****گزینه ۱**

اگر تابع تابع $f(x) = k$ بگیریم، پاید $f(x) = k$ است. پس $f(x) = k$ پوده و زوجها به $k + k = kk \Rightarrow k^2 = 2k$ و در نتیجه $k = 2$ است. پس $f(x) = 2$ است.

صورت $(m^3 - 4m + 6, 6)$ و $(n^3 - 7n + 1, -2)$ پاید روی نیمساز (یعنی: خط $y = x$) باشند. جایگذاری اولین زوج در معادله‌ی خط:

$$m^3 - 7n + 1 = -2 \rightarrow m^3 - 7n + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=49} n = \frac{7+5}{4} = 3$$

پس نقطه‌ی دوم په صورت $(m^3 - 4m + 6, 6)$ نیز پاید روی خط قرار داشته باشد:

$$m^3 - 4m + 6 = 6 \rightarrow m^3 - 4m = 0 \xrightarrow{\div m} m = 4 \Rightarrow \left[\frac{mn}{5} \right] = \left[\frac{1 \cdot 3}{5} \right] = \left[\frac{3}{5} \right] = 2$$



نکته ۱

برهني فوامن تابع ثابت:

- دامنه هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد.

ولی برد همیشه فقط یک عضو دارد.

- نمودار آن یا یک خط افقی است و یا نقاطی که باید روی یک خط افقی باشند.

اگر ضابطه به صورت یک عبارت بر حسب x داده شود، باید ضریب تمام جملات x^3, x^2, \dots صفر بوده و فقط عدد ثابت باقی می‌ماند. برای نمونه:

اگر $f(x) = (a-1)x^3 + bx + c$ به عنوان یک تابع ثابت داده شده باشد، باید $a-1=0, b=0$ بوده و ضابطه فقط به صورت $f(x)=c$ خواهد بود.

DAMNEH TAYE THABT ?

④

③

②

①

گزینه ۱ ?

چون تابع ثابت است، باید:

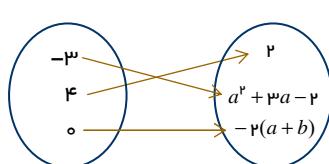
$$a+b=5 \quad \text{و} \quad a-b=5$$

از حل دستگاه (جمع طرفین معادلات) مقادیر $a=0$ و $b=5$ حاصل شده و پایگزاری مخواهیم داشت:

$$f = \{(1, 5), (-1, 5)\} \Rightarrow D_f = \{-1, 1\}$$

----- ♦ -----

DR TAYE THABT ZIR, HAСEL $a-b$ KADAM MI TOVAND BASHD? ?



- 1
2
3
4

گزینه ۱ ?

BAYD MEQADIR PARD YIKSAN (PERAPR 2) PAASHND:

$$a^3 + 2a - 2 = 2 \rightarrow a^3 + 2a - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-2a-2b=2} \begin{cases} a = 1: -2 - 2b = 2 \rightarrow b = -2 \\ a = -2: -2 - 2b = 2 \rightarrow b = 2 \end{cases}$$

DO HALAT BAYD DR NEZAR GRFT:

$a = 1$ و $b = -2$: در این صورت $3 = 1 + 2 = a - b$ مُواحد شد. (قابل قبول، ولی در گزینه‌ها نیست).



$a = -4$ و $b = 3$: در این صورت $a - b = -4 - 3 = -7$ موافق شد. (قابل قبول و چوپنست).



کدام یک تابع ثابت است؟ (دامنه f و g برابر \mathbb{R} و دامنه h و k برابر \mathbb{N} است).

$$k(x) = \frac{2-x}{2x+4} \quad ④$$

$$h(x) = \frac{1-2x}{4x-2} \quad ③$$

$$g(x) = 2x + 5 \quad ②$$

$$f(x) = 2 - x^3 \quad ①$$

گزینه ۳

فقط در تابع h مقدار تابع همیشه عددی ثابت است:

$$h(x) = \frac{1-2x}{4x-2} = \frac{-(2x-1)}{2(2x-1)} \xrightarrow{2x-1 \neq 0} h(x) = \frac{-1}{2}$$



به بررسی بیشتر تابع همانی $y = x$ (یا $f(x) = x$) می پردازیم.

اگر f تابع ثابت، g تابع همانی و $\frac{f(-1)g(5)-g(2)}{f(1)-g(1)} = 2g(3)$ کدام است؟

$$-2 \quad ④$$

$$3 \quad ③$$

$$4 \quad ②$$

$$5 \quad ①$$

گزینه ۴

قرار دید: $f(x) = k$ همان x است:

$$\frac{k \times 5 - 2}{k - 1} = 3 \times 3 \rightarrow 5k - 2 = 9k - 3 \rightarrow k = 4 \Rightarrow f(5) = 4$$



نکته ۲

برهان فواید تابع همانی:

- دامنه هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد، و:

برد همیشه با دامنه یکسان است.

- اگر دامنه را کل اعداد حقیقی \mathbb{R} بگیریم، نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) است و در حالات دیگر، نمودار نقاطی است که باید روی خط $y = x$ واقع باشند.

- اگر ضابطه به صورت یک عبارت بر حسب x داده شود، باید تمام جملات صفر باشند و فقط ضریب x عدد یک باشد. برای نمونه:

- اگر $f(x) = (a-1)x^3 + bx + c$ به عنوان یک تابع همانی داده شده باشد، باید $a-1=0$ بوده و $b=0$ باشند تا ضابطه به صورت $f(x) = x$ تبدیل شود.

توجه کنید:

تابع همانی دامنه و برد یکسان دارد، ولی عکس این مطلب نادرست است. مانند تابع زیر با دامنه و برد برابر، ولی غیر همانی:



$$g = \{(-1, 3), (-3, 1), (1, -3), (3, -1)\}$$

اگر $f(x) = (ax+1)x^3 + (bx+3)x^1 + (cx+1)x$ تابع همانی باشد، مقدار $f(a)+f(b)+f(c)$ کدام است؟

-۳/۵ ④

۳/۵ ③

-۲/۵ ②

۲/۵ ①

گزینه ۴

طبقه نکته‌ی پالا پاید:

ضدایی x^3 و x^1 صفر شوند:ضدایی x پراید ۱ پاشد:

$$c+1=0 \Rightarrow c=-1$$

اکنون:

$$f(a)+f(b)+f(c)=a+b+c=-\frac{1}{2}-2-1=-\frac{5}{2}$$



اگر $f(x) = \frac{x-b-1}{ax+1}$ تابع همانی باشد، مقدار $a^3 - 3b$ کدام است؟

-۱۲ ④

-۶ ③

۶ ②

۱۲ ①

گزینه ۱ برای این که ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-b-1}{ax+1}$ پاید:

$$f(x) = \frac{\overbrace{x-b-1}^0}{\overbrace{ax+1}^0} = \frac{x+0}{0+1} = \frac{x}{1} \Rightarrow f(x) = x$$

پس: $a = 0$ و همچنین: $(-b-1) = 0$ در نتیجه:

$$a^3 - 3b = 0^3 - 3(-1) = 12$$



برای برخی مقادیر x ، زوج مرتب $(f(x)+f(-x), 3x^3 - 17x + 1)$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه‌ی \mathbb{R} باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟ (نوبت ۱-کنکور ۱۴۰۲)

۱۷ $\frac{17}{3}$ ④۱۳ $\frac{13}{3}$ ③۱۰ $\frac{10}{3}$ ②۷ $\frac{7}{3}$ ①گزینه ۳

با توجه به همانی پومن تابع، $f(x)+f(-x) = x-x = 0$ پومن و در نتیجه زوج مرتب $(0, 3x^3 - 17x + 1)$ است. نیمساز ربع دوم په صورت $x = -y$ است و چون زوج مرتب روی آن است:

$$3x^3 - 17x + 10 = -0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{\Delta}}{2(3)} = \begin{cases} \frac{10}{6} = 5 \\ \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

اختلاف مقادیر $5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$ متواءد شد.



نکته ۳

مختصات هر نقطه روی نمودار تابع همانی باید در معادله $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) صدق کند.

یعنی:

باید طول و عرض نقطه برابر باشند.

اگر نقطه $(m-k, 5+2k)$ روی نیمساز نواحی اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار k کدام است؟

- $\frac{2}{3}$ ④

$\frac{2}{3}$ ③

- $\frac{3}{2}$ ②

$\frac{3}{2}$ ①

کلینه ۴

$$m - k = 5 + 2k \rightarrow -k - 2k = 5 - m \rightarrow -3k = 5 - m \Rightarrow k = -\frac{m-5}{3}$$



اگر نمودار تابع $f = \{(b, -ma+2), (5a^3 - a - 2, -1), (\frac{4}{9}, (a+1)^3)\}$ روی نیمساز نواحی اول و سوم واقع باشد، b کدام است؟

است؟

-۲ ④

۷ ③

-۱ ②

$\frac{3}{2}$ ①

کلینه ۱

طبق مختصات دو نقطه دوم و سوم پایه:

- $5a^3 - a - 2 = -1 \rightarrow 5a^3 - a - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=1+24=25} a_1, a_2 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2(5)} \Rightarrow a_1, a_2 = \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$

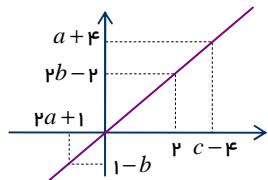
- $(a+1)^3 = \frac{4}{9} \rightarrow a+1 = \pm \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} a+1 = \frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ a+1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \end{cases}$

فقط $a = -\frac{1}{3}$ شرط قرار داشتن هر دو نقطه روی نیمساز را پذیرده کرده و مورد قبول است. پایگذاری در نقطه اول:

$$b = -ma + 2 = -m(-\frac{1}{3}) + 2 = 1 + 2 = 3$$



نمودار مقابله یک تابع همانی را نشان می‌دهد. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



- ۱
- ۲
- ۳
- ۴

گزینه ۲

از نقطه‌ی وسط نمودار شروع کرده و سپس نکته‌ی قبل را پرای دو نقطه‌ی دیگر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2b-2 &= 2 \rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \\ 2a+1 &= 1-2 \rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \quad \text{و} \quad -1+4 = c-4 \Rightarrow c = 5 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$a+b+c = -1 + 2 + 5 = 6$$



بررسی بیشتری از توابع چند ضابطه‌ای در ادامه:

$$f(-x) + f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{2})f(x) \text{ حاصل عبارت } f(x) \text{ کدام است؟}$$

$$f(-x) + f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{2}) \times f(x) = -x - 1 + 2(\sqrt{5})^3 - (-x)(2x)^3 \quad \text{در تابع ۲} \\ x \leq 0 \\ 0 < x \leq 2 \\ x > 2$$

- ۱۰۶ ۴

۵۴ ۳

$-18\sqrt{2}$ ۲

$18\sqrt{2}$ ۱

گزینه ۳

توجه کنید که: عدد $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ در محدوده‌ی $x \leq 0$ و عدد $\sqrt{2} \approx 1.414$ در محدوده‌ی $x > 0$ قرار دارد. پس:

$$\begin{aligned} f(-x) + f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{2}) \times f(x) &= -x - 1 + 2(\sqrt{5})^3 - (-x)(2x)^3 \\ &= -9 - 1 + 2(5) + 2(2 \times 9) = -10 + 10 + 54 = 54 \end{aligned}$$

◇

$$f(-\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = f(1) = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} -x - \frac{b}{2} & x < -1 \\ b - a & -1 \leq x < 1 \\ 2x - a & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{اگر} \quad ?$$

-۲ ۴

۲ ۳

-۱ ۲

۰ ۱

گزینه ۱

پندا مقدار a و b را مشخص می‌کنیم:

$$f(-1) = 1 \rightarrow -(-1) - \frac{b}{2} = 1 \rightarrow 1 - \frac{b}{2} = 1 \xrightarrow{\times 2} b = 0$$

$$f(1) = 1 \rightarrow 1 - a = 1 \rightarrow 1 - a = 1 \rightarrow a = 0$$



$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 3 \\ 2x - 7 & x \geq 3 \end{cases}$$

پس ضابطه به صورت $\begin{cases} -x - 3 & x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 3 \\ 2x - 7 & x \geq 3 \end{cases}$

$$f(-\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = -1 - (-1) = 0$$

$\approx -1/\sqrt{3} \quad \approx 1/\sqrt{2}$



نکته ۲

برف فوامن توابع پلندضابطه‌ای:

دامنه متشکل از تمام اعدادی است که در چند بخش در سمت راست ضابطه داده شده: نمونه:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^3 & x > 2 \\ 2x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

دامنه‌ی تابع متشکل از تمام عدددهای $x \leq 0$ و $x > 2$ است.

- برد تابع را می‌توانید در حالت کلی با رسم نمودار مشخص کنید. (معمولًاً با قدری دقیق در ضابطه‌ها و دامنه‌های مربوطه هم، برد فهمیده می‌شود).

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

در تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$ کدام مورد نادرست است؟

۲) مقدار $f(0/9)$ تعریف نشده است.

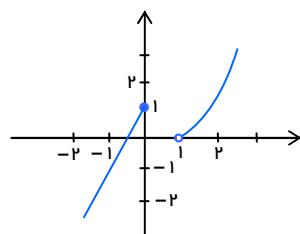
$$f(1) + f(-1) = -1 \quad ①$$

۴) برد تابع برابر \mathbb{R} است.

۳) نمودار تابع محور طول‌ها را در سه نقطه قطع می‌کند.

کاریه ۳

درست پومن موارد اول و دوم به سادگی چک می‌شود. برای انتخاب بین دو گزینه‌ی پاچی‌مانده، پاید نمودار تقریبی تابع را مانند نمونه‌های پخشش‌های قابل رسم کنیم:



اکنون می‌بینید:

برد تابع برابر \mathbb{R} هست و لی، نمودار محور طول را فقط در یک نقطه قطع کرده است.



$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}$$

برد تابع $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}$ است.

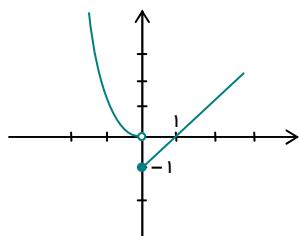
$$-1 \leq y \leq 0 \quad ④$$

$$y \geq 0 \quad ③$$

$$y \geq -1 \quad ②$$

$$\mathbb{R} \quad ①$$

گزینه ۲



رسم تقریبی نمودار مانند نسخه قبل:

می بینید:

تمام نقاط از $-1 < x < 1$ به بالا روی محور عرض، توسط نمودار پوشش داده شده اند.



نکته ۵

برفورد نمودارها:

دو روش برای تعیین نقاط برخورد نمودارهای دو تابع f و g وجود دارد:

❖ روش اول:

هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم کرده تا جواب تعیین شود. (بویژه، با استفاده از روش های سریع رسم نمودار که در ادامه آورده ایم).

❖ روش دوم:

معادله $f(x) = g(x)$ را تشکیل داده و آن را حل می کنیم. (جواب های حاصل با توجه به دامنه های دو تابع پذیرفته یا رد می شوند).

$$f(x) = g(x) \rightarrow -x^3 = \frac{1}{x} \quad x \geq 1 \quad x < -1$$

نمودار تابع $\boxed{?}$

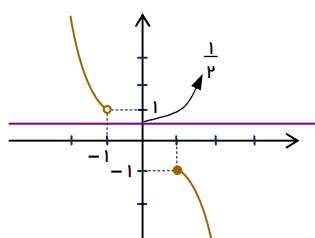
۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۰ ۱

گزینه ۱



نمودار f دو قطعه سهمی و نمودار g خطی افقی است:

هیچ نقطه‌ای برخوردی نیست.

فرش دو:

معادله $f(x) = g(x)$ را با توجه به دامنه، در دو حالت $x \geq 1$ و $x < -1$ حل می کنیم:

$$x \geq 1 : f(x) = g(x) \rightarrow -x^3 = \frac{1}{x} \rightarrow x^3 = -\frac{1}{x} \quad \text{غیر ممکن}$$

$$x < -1 : f(x) = g(x) \rightarrow x^3 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{1}} \equiv \pm \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = \pm \sqrt[3]{1}$$

جواب های حالت دوم غیر قابل قبول اند، چون در محدوده $x < -1$ قرار ندارند.





نمودار $y = x^3 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $|x|$ نامنفی باشد؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۵ ۴

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

کلینه ۴

سهمی را په صورت $y = x^3 + 6x + 5 - 4 = (x+3)^3 - 4$ نوشت، یعنی: سهمی پا رأس $(-3, -4)$ و هر دو نمودار را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

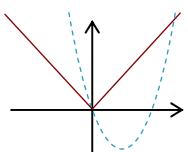
توجه:

محل برخورد سهمی با محور طول از حل معادله $y = 0$ به روش تجزیه:

$$x^3 + 6x + 5 = (x+1)(x+5) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -5$$

اکنون واضح است:

نمودار سهمی پاید لائق ۵ واحد په راست منتقل شود:



دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3 - 2x - 3$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$ در نقطه‌ای با کدام طول مشترک‌اند؟ (کنکور ۱۳۹۹)

۳ ۲ ۱ + $\sqrt{2}$ ۴۴ ۳ - $\sqrt{2}$ ۱ - $\sqrt{2}$ ۳ ۲ ۱ + $\sqrt{2}$ ۱ - $\sqrt{2}$ ۳ ۲ ۱ - $\sqrt{2}$ ۱ + $\sqrt{2}$

کلینه ۱

طبق روش دوم په الاء:

معادله $f(x) = g(x)$ را په چوچه په وجود قدرمطلق، در دو حالت $x > 0$ و $x < 0$ حل می‌کنیم:

$$x > 0 : \rightarrow |x| = x \rightarrow x^3 - 2x - 3 = \frac{x}{x} \rightarrow x^3 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{c}{a} = 3$$

 فقط ۳ در محدوده $x > 0$ قرار داشته و قابل قبول است.

$$x < 0 : \rightarrow |x| = -x \rightarrow x^3 - 2x - 3 = \frac{-x}{x} \rightarrow x^3 - 2x - 1 = 0$$

په روش دلیل داریم: $\Delta = 8$ و چوچه‌ها په صورت $\Delta = 8$ و $\Delta = 1/4$ بوده است. فقط $\Delta = 1/4$ در محدوده $x < 0$ قرار داشته و قابل قبول است.



با محاسبه مقادیر تابع قدرمطلق در برخی موارد ادامه می‌دهیم.

رادیکال‌های تقریبی:

الف) چند مقدار تقریبی رادیکالی که ممکن است مورد نیاز باشند:

$$\sqrt{2} \approx 1/4, \sqrt{3} \approx 1/7, \sqrt{4} = 2, \sqrt{5} \approx 2/2, \sqrt{6} \approx 2/4, \sqrt{7} \approx 2/6, \sqrt{8} \approx 2/8, \sqrt{9} = 3$$



ب) مقادیر تقریبی عددهایی چون $\sqrt{15}$ و $\sqrt{17}$ است، $\sqrt{16} = 4$ را مقداری کمتر مانند $9/3$ و $\sqrt{17}$ را مقداری بیشتر مانند $14/4$ بگیرید.

اگر $f(x) = |2x - 3|$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2} + 1) + f(\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟

۳ ④

$3 + \sqrt{2}$ ③

$4 - \sqrt{2}$ ②

۴ ۱

کلینه ۱

$$f(\sqrt{2} + 1) = |2(\sqrt{2} + 1) - 3| = |\underbrace{2\sqrt{2}}_{>0} - 1| = 2\sqrt{2} - 1 \quad (2\sqrt{2} - 1 \approx 2 \times 1 / 4 - 1 = 1 / 8)$$

$$f(\sqrt{2} - 1) = |2(\sqrt{2} - 1) - 3| = |\underbrace{2\sqrt{2}}_{<0} - 5| = -(2\sqrt{2} - 5) = -2\sqrt{2} + 5 \quad (2\sqrt{2} - 5 \approx 2 \times 1 / 4 - 5 = -2 / 2)$$

در نتیجه:

$$f(\sqrt{2} + 1) + f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 5 = 4$$



روش گسترده نویسی تابع قدرمطلق را قبل دیده‌ایم:

$$\text{تابع } y = 2|x - 3| + 1 \text{ به صورت } \begin{cases} ax + b & x \geq 3 \\ cx + d & x < 3 \end{cases} \text{ نوشته‌ایم. حاصل } a + b - c - d \text{ کدام است؟}$$

۶ ۴

-۶ ۳

-۸ ۲

۸ ۱

کلینه ۲

ریشه‌ی داخل قدرمطلق عدد ۳ است و برای $x < 3$ داخل قدرمطلق منفی و برای $x \geq 3$ داخل قدرمطلق نامنفی است. پنابراین:

$$y = 2|x - 3| + 1 = \begin{cases} 2(x - 3) + 1 & x \geq 3 \\ -2(x - 3) + 1 & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 5 & x \geq 3 \\ -2x + 7 & x < 3 \end{cases}$$

یعنی: $a = 2$, $b = -5$, $c = -2$, $d = 7$

$$a + b - c - d = 2 - 5 + 2 - 7 = -8$$



در انتها، به بررسی برخی روش‌های سریع رسم نمودار می‌پردازیم.

نکته ۶

بابهای افقی نمودار:

تابع $y = f(x)$ با نمودار شناخته شده‌ی آن را در نظر بگیرید.

انتقال به راست:

اگر ضابطه $y = f(x-a)$ داده شود، نمودار به اندازه‌ی a به صورت افقی به سمت راست جابجا می‌شود.

انتقال به چپ:

اگر ضابطه $y = f(x+a)$ داده شود، نمودار به اندازه‌ی a به صورت افقی به سمت چپ جابجا می‌شود.

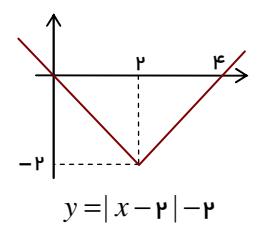
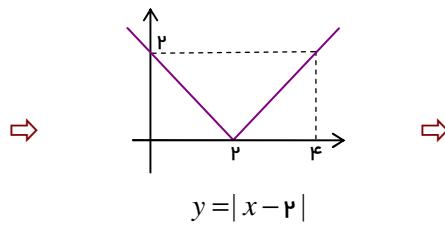
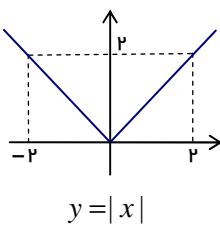


نکته ۷

بابهای عمودی نمودار:تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید.**انتقال به بالا:**اگر ضابطه $y = f(x) + b$ داده شود، نمودار به اندازه b به صورت عمودی به سمت بالا جابجا می‌شود.**انتقال به پایین:**اگر ضابطه $y = f(x) - b$ داده شود، نمودار به اندازه b به صورت عمودی به سمت پایین جابجا می‌شود.**مثال:** نمودار تابع $f(x) = |x - 2| - 2$ را با انتقال مناسب نمودار $y = |x|$ رسم کرده و برد را مشخص کنید.

پاسخ

طبق قواعد مریوطه پا دو مرحله انتقال:

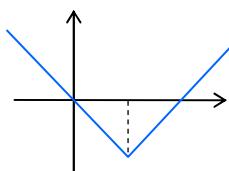


انتقال نقطه ۲ واحد به راست

انتقال نقطه ۲ واحد به پایین

می‌بینید که برد مقادیر $y \geq -2$ است.

شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۸)



$y = -|x - 2| + 2 \quad ①$

$y = x + 2|x| \quad ②$

$y = |x - 2| - 2 \quad ③$

$y = 2x - |x| \quad ④$

گزینه

می‌بینید که شکل داده شده همان نمودار $y = |x|$ است که

مقداری پر راست انتقال یافته و سپس مقداری پر پایین منتقل شده است.

قطع $y = |x - 2| - 2$ می‌تواند چوای پاشد. (دقیقاً نمودار مثال قبل)



نکته ۸

تغییر عمودی نمودار:

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر k یک عدد باشد، در نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنید.

بويژه:

در رسم نمودار $y = -f(x)$ ، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور طول قرینه کنیدا

۴

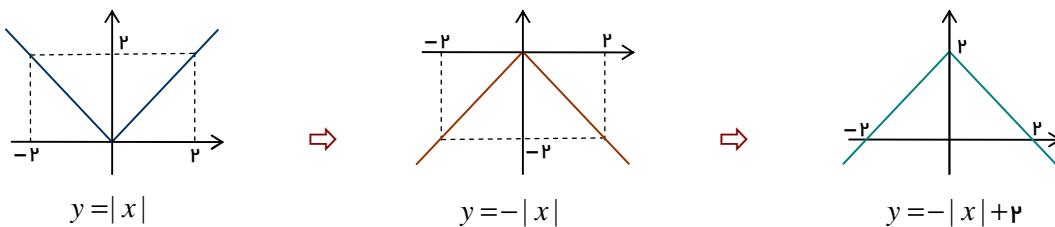
۳

۲

۱

گزینه ۳

با دو انتقال و په سادگی نمودار رسم می‌شود:



می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر مثلثی پا ارتقای و قاعده‌ی مشخص است:

$$S = \frac{1 \times 4}{2} = 4$$



برای رسم نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}|x+1|$ به کمک نمودار $y = |x|$ ، کدام مورد برای کامل کردن جمله‌ی زیر، مناسب است؟

«ابتدا نمودار تابع قدرمطلق را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت جابه‌جا کرده و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به محور رسم می‌کنیم.»
(نویت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

۴ پایین - y ها۳ بالا - y ها۲ راست - x ها۱ چپ - x ها

گزینه ۱

ابتدا خاطره را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y = -\frac{1}{2}|x+1| = -\frac{1}{2}\left|x+\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2} \times 2|x+\frac{1}{2}| \Rightarrow y = -|x+\frac{1}{2}|$$

اکنون می‌توان کفت:

په ټوچه به وجود $\frac{1}{2}$ پايد نمودار $\frac{1}{2}$ په چې متنقل شده و په دليل ضریب منفی، نمودار نسبت په محور طول قرینه شود.

نکته ۹

رسم سریع قدرمطلق:

برای رسم نمودار تابعی مانند $y = |2x + 4| - 1$ دو کار ساده انجام دهید:

ریشه‌ی داخل قدرمطلق را تعیین کرده و عرض نمودار را در آن مشخص کنید.

$$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow y = |-4 + 4| - 1 = -1 \Rightarrow (-2, -1)$$

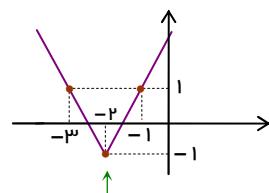
یک عدد قبل و یک عدد بعد از ریشه در ضابطه جای x قرار داده و مختصات دو نقطه‌ی دیگر مشخص کنید.

آنگاه:

توسط سه نقطه، نمودار تابع رسم می‌شود. (نقطه‌ی اول: $(-2, -1)$ همان نقطه‌ی شکستگی نمودار است.)

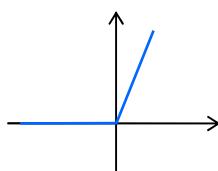
رسم نمودار $y = |2x + 4| - 1$ به روش سریع را می‌بینید:

x	-3	-2	-1
y	1	-1	1



گاهی می‌توان برای مرتبه ساختن نمودار و ضابطه، از نقطه‌گذاری (به طور مناسب) کمک گرفت.

شکل روبرو نمودار کدام تابع است؟ (کنکور ۱۳۹۸)



$$y = x - |x| \quad ①$$

$$y = x + |x| \quad ②$$

$$y = |x - 1| - 1 \quad ③$$

$$y = 1 - |x - 1| \quad ④$$

کاریمه ۲

با نگاه په نمودار:

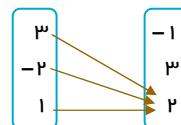
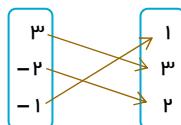
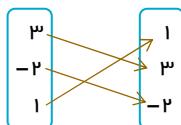
اگر په x عدد ۱ - پدھیم، پاید y صفر شود. (گزینه‌های اول، سوم و چهارم چنین نیستند و رد می‌شوند.)

توجه کنید:

روش عادی شامل رسم تقریبی هر گزینه است که په زمان پیشتری نیاز دارد.



۱ الف) نوع هر تابع را مشخص کنید.



ب) اگر $f = \{(2,b), (a,4), (2,a+b)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a+b$ را حساب کنید.

۲ جدول روبرو مربوط به یک تابع همانی است، مقدار $\frac{a+d}{b+c}$ را بیابید.

x	$3a$	$a^2 - b$	$\sqrt{b} + \sqrt{b}$	$\sqrt{2c}$
$f(x)$	b	3	c	d

۳ نمودار تابع ثابت $f(x) = 4x + n - 3mx$ از نقطه‌ی $(5, -3)$ عبور کرده است. حاصل $m^3 + n^3$ را مشخص کنید.

۴ اگر f یک تابع همانی باشد و $f(\sqrt{2}) = k + 3$, در این صورت $f(\sqrt{2})$ را بیابید.

۵ f تابع همانی، g تابع ثابت با برد $\{3\}$ و $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$ است. مقدار عبارت

$$A = \frac{f(-6) + g(-10000)}{h(\sqrt{3}) - h(-4)}$$

۶ اگر f یک تابع همانی و $g(x) = f(2x - 1) - 3x + 2$ باشد، مقدار $g(-1)$ را حساب کنید.

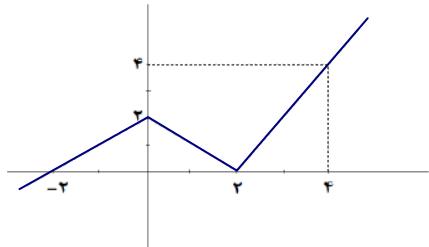
۷ نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$$\text{ب) } y = 2|x| \quad \text{الف) } y = |x - 4|$$

$$y = \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

۸ نمودار تابع روبرو را رسم کنید:

۹ تابع روبرو را با چند ضابطه نوشه و دامنه و برد آن را مشخص کنید:



تمرینات
منتخب کتاب


- ۱ کدامیک از موارد زیر درست است؟ چرا؟
- الف) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.
- ب) اگر دامنه‌ی یک تابع همانی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، آنگاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.
- پ) اگر f یک تابع ثابت باشد، آنگاه $f(kx) = kf(x)$ است.

۲ اطلاعات مربوط به هر تابع را کامل کرده و نمودار آن را رسم کنید:

$$R_f = \{ \quad, \quad, \quad \} \text{ و } D_f = \{ ۲, -۱, -۲ \} \text{ با } \begin{cases} f: A \longrightarrow B \\ f(x) = x^3 - 1 \end{cases}$$

الف) تابع

$$R_f = \left\{ 1, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\delta} \right\} \text{ و } D_f = \{ \quad, \quad, \quad \} \text{ با } \begin{cases} f: A \longrightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

ب) تابع

$$R_f = \left\{ -\frac{۳}{\mu}, ۰, \delta \right\} \text{ و } D_f = \left\{ -\frac{۱}{\mu}, ۰, ۲ \right\} \text{ با } f: A \longrightarrow B$$

پ) تابع خطی

۳ در تابع ثابت $f(x) = c$

الف) مقادیر $f(a)$, $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب) اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۴ اگر $\{(a, ۱), (b, ۲), (c, ۵)\} = f$ یک تابع همانی باشد، میانگین عدهای a , b و c را به دست آورید.

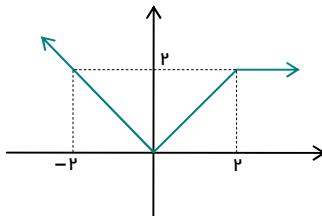
۵ در هر مورد زیر، مقدار $n \in \mathbb{N}$ را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی داده شده روی نیمساز نواحی اول و سوم واقع باشد.

$$\text{ب) } (-1, n^3 - 4n + 2) \quad \text{الف) } (2, n^3 - 3n + 4)$$

۶ اگر f یک تابع ثابت با دامنه‌ی دو عضوی و $m, n \in \mathbb{N}$ باشد، مقدار $m+t$ را بیابید.

$$f = \{(-1, n^3 - 4n), (m - 4, 3), (m + n, t)\}$$

۷ ضابطه‌ی تابع مقابله را مشخص کنید:



۸ اگر هزینه‌ی توقفگاه خودرو در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

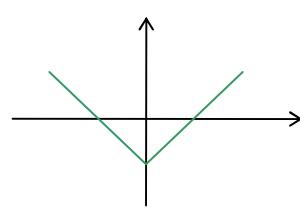
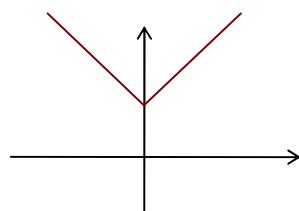
$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه‌ی توقف هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد روی محور عرض را معادل ۵۰۰ تومان بگیرید).

۹ با توجه به نمودارهای زیر، مشخص کنید کدام ضابطه به کدام نمودار مربوط است.

ب) تابع $y = |x| - 3$

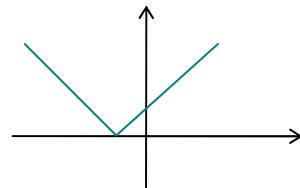
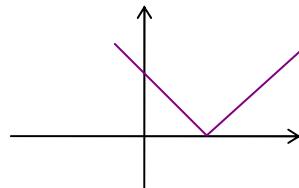
الف) $y = |x| + 2$



۱۰ مانند تمرین قبل عمل کنید.

ب) تابع $y = |x - 4|$

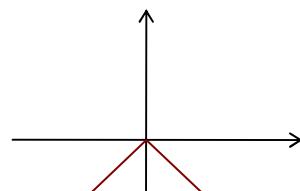
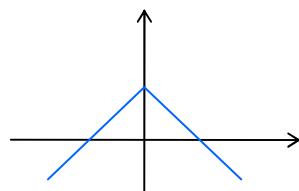
الف) $y = |x + 1|$



۱۱ مانند تمرین قبل عمل کنید.

ب) تابع $y = -|x| + 1$

الف) $y = -|x|$



۱۲ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ب) تابع $y = |3x + 1|$

الف) تابع $y = |3x - 2|$



0912 172 0728



@alireza_karbalaie



تمرین تست

TEST

- ۱ اگر $f = \{(x, y) | y = ax + b\}$ تابع ثابت باشد، a کدام است؟
- ۱۰ ۴ -۵ ۳ -۲ ۲ ۲ ۱

- ۲ در تابع همانی f ، حاصل $f(-3) + f(2)$ کدام است؟
- ۱ ۴ -۵ ۳ ۵ ۲ ۱ ۱

- ۳ با فرض آنکه $f(x) = 2$ و $g(x) = -2$ باشد، جواب معادله $x \times f(10) - 2x \times g(10) = 1$ کدام است؟ (دامنه هر دو تابع \mathbb{R} است).

- $-\frac{1}{10}$ ۴ $\frac{1}{6}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{10}$ ۱

- ۴ کدام مورد همواره درست است؟

- ۱ اگر دامنه یک تابع با برد آن برابر باشد، آن تابع همانی است.
- ۲ نمودار تابع همانی با دامنه \mathbb{R} ، لزوماً از مبدأ نمی‌گذرد.
- ۳ دامنه و برد تابع ثابت، همواره تک عضوی هستند.
- ۴ تابع $f = \{(x, y) | y = mx + b\}$ هم تابع ثابت است و هم تابع همانی.

- ۵ اگر $f = \{(a, 2), (3, b), (c, 7)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a , b و c کدام است؟

- ۱۲ ۴ ۸ ۳ $\frac{11}{3}$ ۲ ۴ ۱

- ۶ اگر تابع $f = \{(a, b-1), (c, m+1), (n, p-3)\}$ یکی از نقاط نمودار تابع است، واریانس اعداد b , m و p کدام است؟

- $\frac{19}{3}$ ۴ $\frac{17}{3}$ ۳ $\frac{8}{3}$ ۲ $\frac{5}{3}$ ۱

- ۷ اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و x و y دو عدد دلخواه باشند، کدام ممکن است درست نباشد؟

$$f(-kx) = -kf(x) \quad ۱$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad ۲$$

$$g(x+y) + g(x-y) = g(x) + g(y) \quad ۳$$

$$g(x+y)g(x-y) = g(x^2 - y^2) \quad ۴$$

کدام است؟ $f(a) - f(m)$ باشد، حاصل $a = f(-1)$ و $f(x) = \begin{cases} mx^3 + x & x < 0 \\ 2x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 2 & x > 2 \end{cases}$ اگر λ

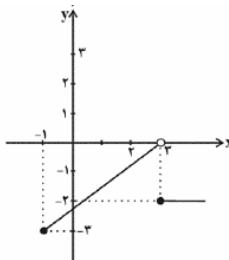
-۲۳ ۴

-۲۲ ۳

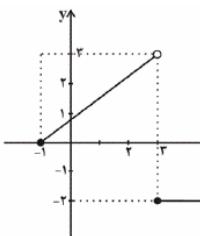
-۷ ۲

-۶ ۱

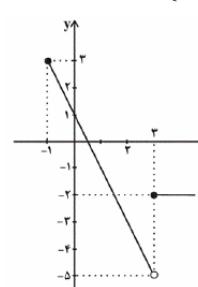
نومدار تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & -1 \leq x < 3 \\ -2 & x \geq 3 \end{cases}$ است؟ λ



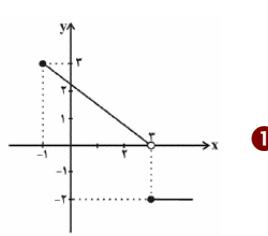
۴



۳



۲

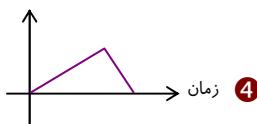


۱

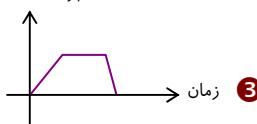
۱۰ کدام نومدار مربوط به متن زیر است؟

«استخر آبی توسط یک شیر ۷ ساعت طول می‌کشد تا پر شود. وقتی پر شد، پس از ۳ ساعت شیر تخلیه را باز می‌کنیم تا در طی ۴ ساعت آب استخر خالی شود.»

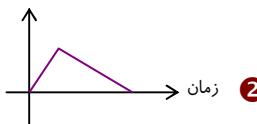
پر شدن استخر



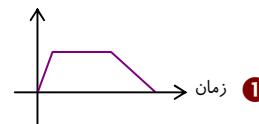
پر شدن استخر



پر شدن استخر



پر شدن استخر



۱

۱۱ تابع f به ازای $x < -3$ - تابعی همانی و به ازای $x \geq 1$ و $-3 \leq x < 1$ تابعی ثابت است. اگر $f(-2) = -2f(2)$ و $f(-4) = -f(4)$

$$\frac{f(-2)f(2)}{f(-4)} \text{ کدام است؟ } \lambda$$

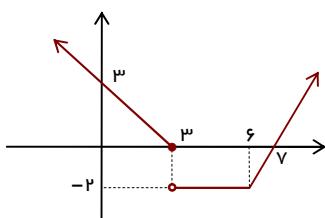
۲ ۴

۴ ۳

۸ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱

۱۲ در تابع مقابل حاصل $f(1) - f(-1)$ کدام است؟



- ۱
- ۲
- ۳
- ۴

۱۳ اگر تابع $\{(1, a^3 + 3), (2, 4), (3, a+b), (-a, -b)\}$ ثابت با سه عضو باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

-۶ ۴

-۵ ۳

-۳ ۲

-۲ ۱





$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x \leq 4 \\ -1 & 4 < x < 8 \\ x - 9 & x \geq 8 \end{cases}$$

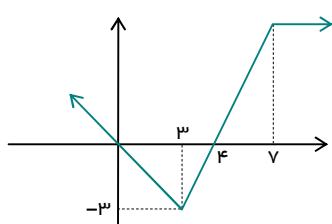
مساحت محصور بین نمودار تابع f و محورهای مختصات کدام است؟

$\frac{19}{2}$ ۴

۵ ۳

۱۰ ۲

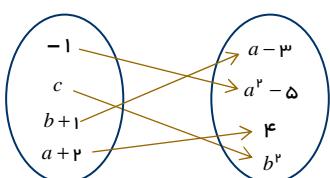
$\frac{17}{2}$ ۱



با توجه به نمودار تابع f ، حاصل عبارت $f(-1) + f(1)$ کدام است؟

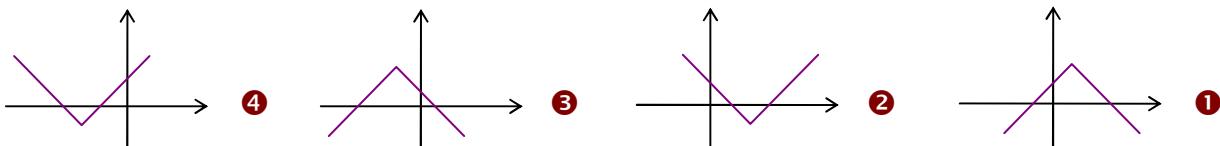
- ۱۴ ۱
- ۱۲ ۲
- ۱۰ ۳
- ۸ ۴

اگر نمودار مقابل یک تابع همانی باشد، مقدار $a^3 + b^3 + c^3$ کدام است؟



- ۱۲ ۱
- ۱۶ ۲
- ۲۴ ۳
- ۳۰ ۴

نمودار تابع $y = -|x - 2| + 5$ شبیه کدام است؟



اگر ضابطه‌ی x مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

$\frac{19}{2}$ ۴

-۲ ۳

-۱۰ ۲

۴ ۱

اگر $f(x) = \sqrt{|2x - 5|}$ باشد، مقدار $f(-2) + 2f(\frac{1}{2})$ کدام است؟ (کنکور ۹۷)

۷ ۴

۶ ۳

۵ ۲

۴ ۱

اگر $f(x) = x\sqrt{3+|x|}$ باشد، مقدار $f(2) + 4f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟ (کنکور خارج ۹۷)

۳ ۴

$\frac{3}{5}$ ۳

$\frac{2}{5}$ ۲

۲ ۱

اگر $f(x) = |\alpha x - 5|$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2} + 2) + f(1 + \sqrt{2})$ کدام است؟ (کنکور ۹۵)

۳ ۴

$4\sqrt{2} - 4$ ۳

$2\sqrt{2} + 2$ ۲

۲ ۱



اگر $|2x - 3| = f(x) = f(\sqrt{2} + 1) + f(\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟ (کنکور ۹۶) ۲۲

۳ ۴

$\sqrt{2}$ ۳

۵ ۲

۴ ۱

کدام مراحل برای تبدیل نمودار $y = |x + 2| + 1$ به نمودار $y = |x - 2|$ باید انجام شود؟ ۲۳

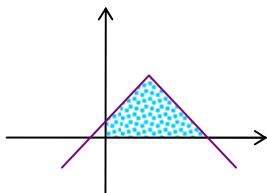
۲ دو واحد به راست و دو واحد به پایین

۱ دو واحد به چپ و دو واحد به پایین

۴ دو واحد به راست و دو واحد به بالا

۳ دو واحد به چپ و دو واحد به بالا

نمودار تابع $y = -|x - 2| + 3$ رسم شده است. مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار کدام است؟ ۲۴



۱

$\lambda/5$ ۲

$\sqrt{5}$ ۳

λ ۴

معروف یک تابع باشد، a کدام است؟ $f(x) = \begin{cases} -2x + a & x \leq -2 \\ -x^2 - 2x - a & x \geq -2 \end{cases}$ ۲۵

۲ ۴

۱ ۳

-1 ۲

-2 ۱

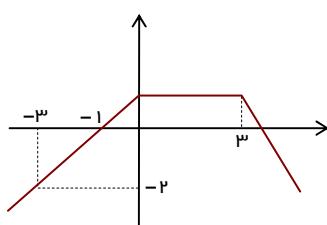
در تابع f حاصل $f(\sqrt{2} - 1) - f(\sqrt{2} + 1)$ کدام است؟ $f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 1 \\ x^2 + 2x & x < 1 \end{cases}$ ۲۶

۲ ۴

$-2f(2/5)$ ۳

$2f(4)$ ۲

-2 ۱



-2 ۱

۲

۳

-4 ۴

اگر تابع $\{(a+c, 1), (a-b, -1), (3, a+2b)\}$ کدام است؟ ۲۷

۲ ۴

۱ ۳

-1 ۲

۰ ۱

اگر a دو برابر b و $a+b=6$ باشد، کدام تابع ثابت است؟ ۲۸

$\{(a, 2+b), (0, a), (2, 2b)\}$ ۲

$\{(\frac{a}{2}, -b), (b, -\frac{a}{2}), (-3, a-b)\}$ ۱

$\{(1, a-1), (b, 1+b), (-1, \frac{a}{2})\}$ ۴

$\{(-1, 2b), (b, ab), (3, a+2)\}$ ۳

۳۰ اگر f تابعی ثابت، $f(-1) + f(1) = 2f(0)$ باشد، مقدار $f(-1)f(1) - f(0)f(-1)$ کدام است؟

۴

۳

-۲

-۵

۳۱ اگر تابع $f = \{(-1, a+b), (a^2+1, d), (3a+2b, 0), (ab, c-1)\}$ تابعی همانی باشد، مجموع اعضای برد تابع $g = \{(b, d+1), (a, c+d), (b-a, c-2)\}$ کدام است؟

۴

۳

-۲

۱

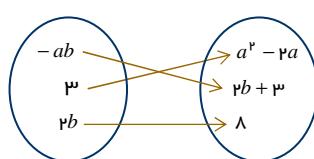
۳۲ نمودار تابع $f(x) = |x-2|$ با نمودار تابع همانی (با دامنه \mathbb{R}) در چند نقطه متقاطع هستند؟

۴

۳

۲

۱



۳۳ دامنهٔ تابع ثابت مقابلهٔ دو عضوی است. مقدار $5a + 4b$ کدام است؟

۲

۴

۱

۳

۳۴ تابع ثابت $f(x) = mx + h + 2x$ نمودار تابع $g(x) = hx^2 - 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲ - قطع کرده؛ مقدار

$f(h) - g(m)$ چیست؟

۴

۳

-۲

۱



۱۲

تابع (۲)

صفحة	فهرست مطالب
۹۵	تابع پلکانی
۱۰۳	جدول توابع
۱۱۰	ویژه کنکور
۱۱۱	تمرینات تشریمی و مختلف کتاب درسی
۱۲۵	تمرین تست



نوع پلکانی

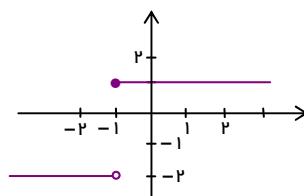
۱

در این بخش با نوع مهمی از توابع که رفتاری مشابه تابع ثابت دارند، آشنا می‌شویم.

شروع با یک نمونه‌ی ساده:

در تابع زیر، دامنه به دو بخش تقسیم شده و ضابطه روی هر یک از این دو بخش ثابت است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq -1 \\ -2 & x < -1 \end{cases}$$



معرفی توابعی مانند نمونه‌ی قبل:

تابع پلکانی:

هرگاه دامنه‌ی یک تابع به قسمت‌هایی جدا از هم تقسیم شده و در هر قسمت، ضابطه‌ی تابع عددی ثابت باشد، به آن یک تابع پله‌ای یا پلکانی گویند.

نمونه‌های دیگری از توابع پلکانی ببینید:

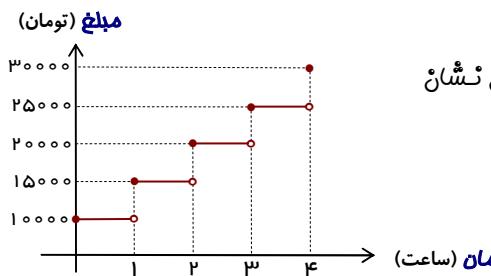
مثال: هزینه‌ی دریافتی یک پارکینگ اتومبیل‌ها با قاعده‌ی زیر به مشتریان اعلام شده است:
 «تا قبل از یک ساعت اول ۱۰۰۰۰ تومان و بعد از آن، هر ساعت اضافه ۵۰۰۰ تومان»
 اولاً: جدولی برای هزینه‌ی پارکینگ تا چهار ساعت تشکیل دهید.
 ثانیاً: نمودار مختصاتی هزینه‌ها را بر حسب مدت زمان استفاده از پارکینگ طبق جدول رسم کنید.

پاسخ

با توجه به شرایط گفته شده:

- اُرْ زمان ورود به پارکینگ ۳ قبیل اُر پایان یک ساعت، هر چقدر اتومبیل بماند، پاید مبلغ ۱۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰ تومان پرداخت شود.
 - اگر به ۱ ساعت رسیده یا رد شود، تا قبیل اُر ۲ ساعت پاید مبلغ $10000 + 5000 = 15000$ ۱۵۰۰۰ تومان پرداخت گردد.
- با ادامه‌ی این روند، جدول زیر حاصل مواهد شد:

زمان	۱ ساعت	از ۲ تا قبیل ۳	از ۱ تا قبیل ۲	از ۰ تا قبل ۱	
مبلغ	۱۰۰۰۰	۱۵۰۰۰	۲۰۰۰۰	۲۵۰۰۰	۳۰۰۰۰



حالا می‌توانیم: $f(x)$ را روی محور طول و $m(x)$ را روی محور عرض نشان داده و نمودار تابع رارسم کنیم:

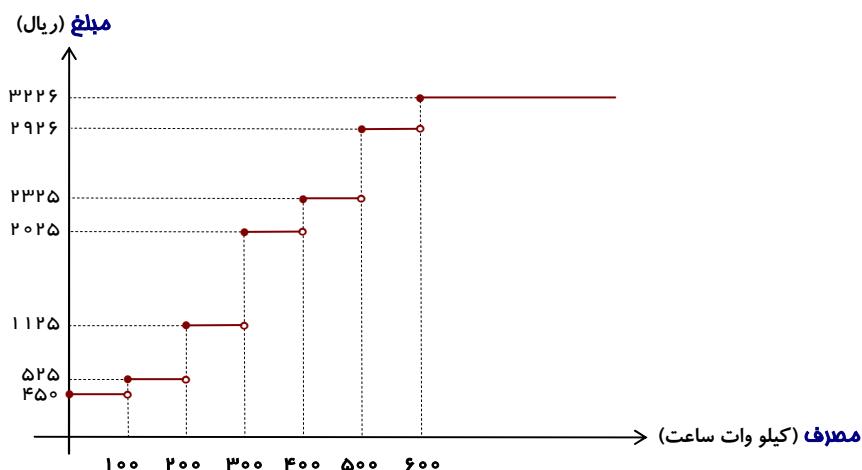


مثال: (از کتاب)

تعرفه مصرف برق خانگی: هزینه برق هر خانه بر مبنای مصرف تعداد «کیلو وات ساعت» و طبق جدول زیر محاسبه می‌شود:
(یک کیلو وات ساعت، مصرف ده لامپ روشن صد واتی در طول یک ساعت است.)

پله‌های مصرف	هزینه (ریال)
از ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰
مازید ۱۰۰ تا ۲۰۰	۱۱۲۵
مازید ۲۰۰ تا ۳۰۰	۲۰۲۵
مازید ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۹۲۶
مازید ۴۰۰ تا ۵۰۰	۳۲۲۶
مازید ۵۰۰ تا ۶۰۰	۳۷۲۶
مازید ۶۰۰ تا ۷۰۰	۴۵۰

اطلاعات مندرج در جدول، ضابطه‌ی یک تابع بلکنی است و نمودار آن به آسانی رسم می‌شود:



مثال: با توجه به مثال قبل:

الف) اگر مصرف خانه‌ای در یک ماه $\frac{246}{12}$ کیلووات ساعت باشد، هزینه برق آن خانه را حساب کنید.

ب) مبلغ هزینه را به عنوان مساحتی روی نمودار نشان دهید.



الف) طبق ضابطه‌ی کنته شده:

• هزینه‌ی 100 کیلو وات اول: $450 \times 450 = 45000$ ریال.

• هزینه‌ی 100 کیلو وات دوم: $525 \times 525 = 52500$ ریال.

هزینه‌ی مازد $23/46$ کیلو وات آخه: $52009 = 5200 \times 1125 = 5200 \times 46/23$ ریال.

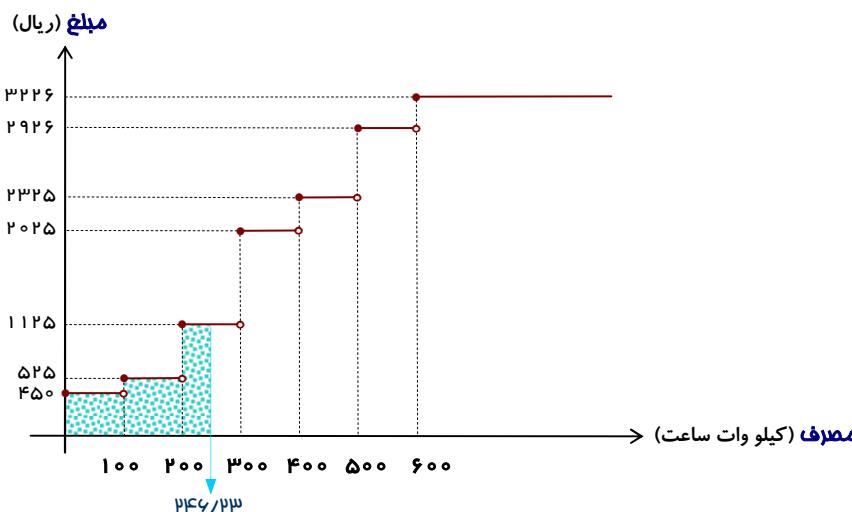
کل هزینه پرایبر است با:

$$145000 + 52500 + 52009 = 149509 \text{ (ریال)}$$

ب) با توجه به فرمول مساحت مستطیل (**عرض** \times **طول**) و با قدری دقیق پیشید که:

عدد 45000 پرایبر مساحت پایین نمودار در قطعه‌ی اول است.

عددهای 52500 و 52009 نیز پا مساحت زیر نمودار تا طول $23/46$ قابل پیان هستند.



نتیجه:

هزینه‌ی برق مصرفی، دقیقاً برابر مساحت بین نمودار و محور طول، در فاصله‌ی 0 تا $23/46$ است.



یک تابع پلکانی خاص را ببینید:

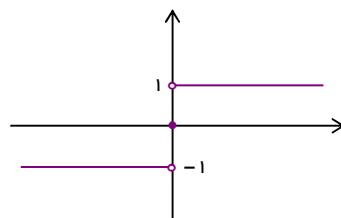
تابع علامت:

مقدار این تابع به ازای هر عدد حقیقی x را با $sign(x)$ (یا گاهی $sgn(x)$) نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

یعنی، این تابع به هر مقدار مثبت عدد 1 ، به هر مقدار منفی عدد -1 و به عدد صفر، همان صفر را نسبت می‌دهد.

نمودار تابع علامت با توجه به ضابطه چنین است:





مثال: مقدار هر عبارت را حساب کنید.

$$\text{الف) } sign(-\infty / 5) + sign(|1 - 4|)$$

$$\text{ب) } sign(1 - \sqrt{2}) - 2sign(\frac{\frac{3}{2} - 2 \times 4}{2 - 3})$$

پاسخ

الف) طبق ضابطه:

$$sign(-\infty / 5) + sign(\underbrace{|1 - 4|}_{=3}) = -1 + 1 = 0$$

ب) می‌دانیم $1/4 \equiv \sqrt{2}$ و در نتیجه $1 - \sqrt{2}$ منفی است. در مورد کسر کافی (ست عالمت صورت و معخرج را پذیریم:

$$sign(1 - \sqrt{2}) - 2sign(\underbrace{\frac{\frac{3}{2} - 2 \times 4}{2 - 3}}_{=-1}) = -1 - 2(+1) = -1 - 2 = -3$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$x^3 sign(x^3 + 1) + 16 sign(-5) = 0$$

پاسخ

تجویز کنید که x^3 همیشه مقداری مثبت است و در نتیجه: $1 = sign(x^3 + 1)$. پس معادله ساده نوشته و حل می‌شود:

$$x^3 \times 1 + 16 \times (-1) = 0 \rightarrow x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = 4, x = -4$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$sign(12 - 3k) = -1$$

پاسخ

پاید $12 - 3k$ عددی منفی باشد، یعنی $0 < 12 - 3k$. جواب این معادله، جواب معادله پالا است:

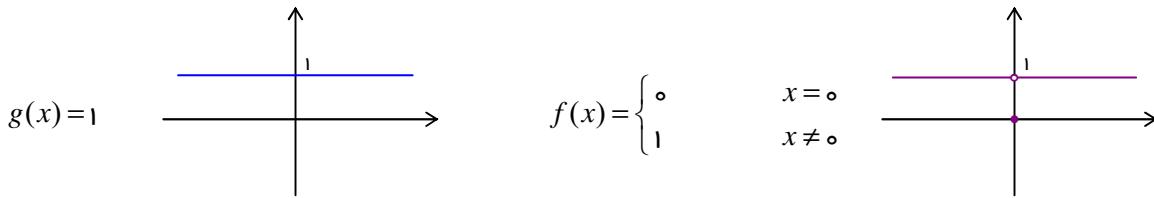
$$12 - 3k < 0 \rightarrow -3k < -12 \xrightarrow{div(-3)} \frac{-3k}{-3} > \frac{-12}{-3} \Rightarrow k > 4$$

پس معادله پیشمار جواب دارد.

مثال: نمودار توابع $(g(x) = sign(x^3 + 1))$ و $(f(x) = sign(x^3))$ رارسم کنید.

پاسخ

اگر $x = 0$ باشد، $x^3 = 0$ و در غیر این صورت x^3 مثبت است. بعلاوه، $x^3 + 1$ همیشه مثبت است، بنابراین ضابطه‌ها به صورت ساده‌تر زیر بوده و نمودارها طبق آن‌ها رسم می‌شوند:



حالت خاصی از توابع پله‌ای اهمیت ویژه دارد:

هزء صدیع:

برای یک عدد حقیقی x , جزء صحیح آن با نماد $[x]$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر x عددی صحیح باشد، جزء صحیح آن برابر خودش است. مثلًاً

$$[3] = 3 \quad \text{و} \quad [-7] = -7$$

اگر x عددی صحیح نباشد، باید بین دو عدد صحیح قرار گیرد: $x < n+1 < x < n$. آنگاه: جزء صحیح x برابر عدد صحیح قبل از آن است. مثلًاً

$$\text{چون } 2 < 1/7 < 1 \text{ است، پس } 1 = [1/7].$$

$$\text{چون } 1 - 1/5 < -2 < 1 - 1/5 \text{ است، در نتیجه } -2 = [1/5] \text{ خواهد بود.}$$

بعلاوه:

تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ که دامنه آن \mathbb{R} است را «تابع هزء صدیع» نامگذاری می‌کنیم.

مثال: اگر $f(x) = [x]$ باشد، مقدار $f(\frac{1}{4})$ را حساب کنید.



واضح است که:

$$f(\frac{1}{4}) = [\frac{1}{4}] + [-\frac{1}{4}] = [\frac{1}{4}] + [-\frac{1}{4}] = 0 - 1 = -1$$

توجه کنید:

عدد $\frac{3}{25} = 0.12$ بین 0 و 1 قرار داشته و $-\frac{1}{25} = -0.04$ بین -1 و 0 قرار دارد.



مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$[-\sqrt{3}] + sign(\sqrt{3}) + |\sqrt{3} - 1|$$



چون $\sqrt{3} \approx 1.73$ است، عدد $-\sqrt{3}$ بین -2 و -1 واقع است. همچنین $1 - \sqrt{3}$ عددی مثبت بوده و در نتیجه:

$$[-\sqrt{m}] + sign(\sqrt{m}) + |\underbrace{\sqrt{m} - 1}_{>_0}| = -2 + 1 + (\sqrt{m} - 1) = -1 + \sqrt{m} - 1 = -2 + \sqrt{m}$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر $-2 = [x]$ باشد، آنگاه محدوده‌ی x کدام است؟

$$-2 < x < -1 \quad (1) \quad -2 < x \leq -1 \quad (2) \quad -2 \leq x < -1 \quad (3) \quad -2 \leq x \leq -1 \quad (4)$$

پاسخ

طبق تعریف بالا، چون صدیق هر عدد پین ۲ و ۱ و همچنین عدد ۲ در مساوی $-2 = [x]$ صادق است. بنابراین: جواب گزینه‌ی دوم است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$2[x] + m = 0 \quad (1) \quad [x] + m = 1 \quad (2) \quad [x] = 2 \quad (3)$$

پاسخ

الف) اگر x هر عددی از ۲ تا قبل از ۳ پاشد، چون صدیق آن برابر ۲ است:

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

ب) معادله به صورت ساده‌تر نوشته می‌شود:

$$[x] = 1 - m \Rightarrow [x] = -2$$

اگر x هر عددی از ۲ تا قبل از ۱ پاشد، چون صدیق آن برابر ۲ است، جواب: $-2 \leq x < 1$

پ) معادله را ساده می‌نویسیم:

$$2[x] + m = 0 \rightarrow 2[x] = -m \Rightarrow [x] = -\frac{m}{2}$$

چون مقدار چون صدیق همیشه یک عدد صدیق است، جواب برای x چوپ ندارد.

اکنون، رسم نمودار تابع جزء‌صدیق را ببینید:

مثال: نمودار تابع $[x] = y$ را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

با توجه به مفهوم این تابع، در محدوده‌های مناسب x ، مقدار y را مشخص کرده و نمودار به آسانی رسم می‌شود.

- اگر x عددی پین ۰ و ۱ پاشد، چون صدیق آن برابر صفر است، به صورت دقیق تر:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

- اگر x عددی از ۱ تا قبل از ۲ پاشد، چون صدیق آن برابر ۱ است:

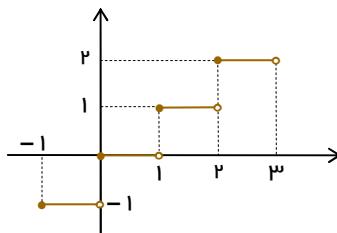
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$$

به صورت مشابه:

در هر محدوده‌ی چندید، مقدار تابع ۱ واحد افزایش می‌یابد. (**فقط به یک پله بالاتر**)



$$\begin{aligned} 3 \leq x < 4 &\Rightarrow y = 3 \\ 4 \leq x < 5 &\Rightarrow y = 4 \\ \vdots & \end{aligned}$$



نمودار (۱) می‌بینید:

ما فقط نمودار را در چند محدوده رسم کردیم؛ ولی چون دامنهٔ تابع برابر \mathbb{R} است، پله‌های نمودار در سمت چپ به طرف پایین و در سمت راست به طرف بالا تا بینهایت ادامه دارد. پس:

(تمام اعداد صحیح) $=$ بُعد تابع

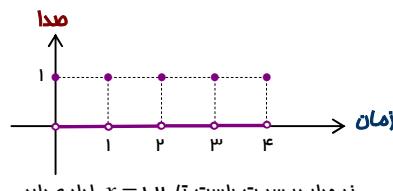


در پایان این بخش، چند رفتار پلکانی دیگر یا مشابه آن را با نمودار مدل‌سازی می‌کنیم.

ساعت سفنج



شاید دیده باشید: در برخی ساعتهای قدیمی، در زمان‌های کامل ۰:۰ و ۲:۰ و ... و ۱۲:۰، یک کبوتر مصنوعی از ساعت بیرون آمده و آن ساعت مشخص را اعلام می‌کرد. رفتار کبوتر را می‌توان با عدد ۰ در زمان‌های عادی و ۱ در زمان‌های کامل به صورت یک تابع پلکانی نشان داد:



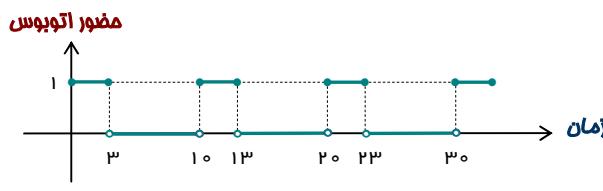
نمودار در سمت راست $x = 1$ ادامه دارد.

ایستگاه اتوبوس



یک ایستگاه اتوبوس در نظر بگیرید که دقیقاً هر ۱۰ دقیقه یک اتوبوس به آن وارد شده، ۳ دقیقه توقف کرده و بعد از پیاده یا سوار شدن مسافران، ایستگاه را ترک می‌کند.

این رفتار را هم می‌توان با یک تابع پله‌ای نمایش داد:

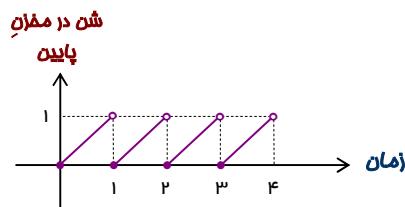


نمودار در سمت راست ادامه دارد.



ساعت شنی (پرشدن مخزن) ♦

در این وسیله‌ی قدیمی سنجش زمان، مخزن پایین ابتدا خالی است و در یک واحد زمان، پر می‌شود. هر چند، چون پرشدن مخزن تدریجی است، نمودار مربوط به آن پلکانی نیست، ولی نموداری مشابه پلکانی دارد:



دو تابع f و g را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f = \{(1,2), (2,1), (3,0)\} \quad \text{and} \quad g = \{(1,5), (2,-3), (4,1), (5,-2)\}$$

می خواهیم تابعی معرفی کنیم که اثر آن روی هر مقدار ورودی، برابر **مجموع اثر دو تابع** بالا باشد. این تابع را با $f + g$ نشان می-دهیم و مجموع دو تابع f و g نام دارد. چون می خواهیم تابع جدید اثر جمعی داشته باشد، باید:
اثر تابع $f + g$ روی عدد ۱ برابر $f(1) + g(1)$ باشد.

پناہ اپنے

پس زوج مرتب $(f+g)(1)$ یک عضو تابع $f+g$ است.

با این قاعده، سایر مقادیر تابع را بررسی می‌کنیم:

زوج مرتب (ψ, α) یک عضو تابع $f + g$ است.

$$(f + g)(\mathfrak{w}) = f(\mathfrak{w}) + g(\mathfrak{w}) = \circ + ???$$

می‌بینید که $(f+g)(x)$ وجود ندارد و بنابراین $f(x) + g(x)$ قابل محاسبه نیست.

(یعنی: عدد ۳ در دامنهٔ تابع $f + g$ قرار ندارد.)

نتیجہ:

تابع $f + g$ فقط برای عددهایی قابل محاسبه است که در آن، هر دو تابع f و g مقدار داشته باشند. بنابراین:

بنابراین:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

باید آن عدد در اشتراک دامنه‌های دو تابع واقع باشد:

چون در نمونه‌ی بالا $D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4, 7\} = \{1, 2\}$ است، فقط مقادیر (۱) $(f+g)$ و (۲) (fg) قابل محاسبه است که دیدیم و بنابراین:

$$f + g = \{(1, \xi), (r, \xi)\}$$

روش‌ها و حقایق بالا، به صورت مشابه هنگام تفریق و ضرب دو تابع هم درستند:

سہ عمل (وی توابع:

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه سه تابع $f - g$ ، $f + g$ و fg به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

بعلاوه:

دامنهی هر سه تابع به صورت یکسان $D_f \cap D_g$ است.

مثال: برای دو تابع $f = \{(2,1), (1,4), (3,5)\}$ و $g = \{(1,0), (0,3), (2, \frac{1}{2})\}$ ، توابع $f - g$ و fg را مشخص کنید.

پاسخ ✓

توجه کنید میان که در پالا گفته شد، توابع $g - f$ و fg فقط می‌توانند روی دامنه‌ی مشترک عمل کنند؛



$$D_f = \{1, 2, 3\}, D_g = \{0, 1, 2\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2\}$$

پس دو تابع را در نقاط ۱ و ۲ اثمر می‌دهیم:

$$x=1: (f-g)(1) = f(1) - g(1) = 1 - 0 = 1, \quad (fg)(1) = f(1)g(1) = 1 \times 0 = 0$$

$$x=2: (f-g)(2) = f(2) - g(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad (fg)(2) = f(2)g(2) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

پنایین:

$$f-g = \left\{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}) \right\}, \quad fg = \left\{ (1, 0), (2, \frac{1}{2}) \right\}$$



مثال: اگر $f(x) = 2x$ و $g(x) = \sqrt{x} + 1$ ، حاصل $\frac{f(f+g)(x)}{(f \times g)(x/25)}$ را بباید.



محاسبه هر یک از مقادیر مورد نیاز:

$$f(1) = 2(1) - 3 = 5, \quad g(1) = 2(1) + 1 = 3$$

$$f(0/25) = 2(0) - 3 = -3, \quad g(0/25) = 2(0/25) + 1 = 1$$

چای گذاری مقادیر در عبارت:

$$\frac{f(f+g)(x)}{(f \times g)(x/25)} = \frac{2f(x) + 2g(x)}{f(x/25) \times g(x/25)} = \frac{2(5) + 2(-3)}{-3 \times 1} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$$



تقسیم توابع:

تقسیم دو تابع f و g نیز مشابه سه عمل قبل تعریف می‌شود:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

توجه کنید:

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ نیز فقط شامل عضوهای $D_f \cap D_g$ است، ولی اگر $g(x) = 0$ باشد، باز هم مقدار $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابل محاسبه

نخواهد بود. یعنی، چنین عددهایی هم نمی‌توانند در دامنه قرار گیرند. پس:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

مثال: در مورد دو تابع $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0)\}$ و $g = \{(1, 0), (0, 3), (2, \frac{1}{2})\}$ در مورد دو تابع $\frac{f}{g}$ مشخص کنید.

الف) تابع $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

ب) ابتدا تابع $2g$ را حساب کرده و سپس تابع $f - 2g$ را مشخص کنید.

الف) دامنهٔ مشترک را مشخص می‌کنیم:

$$D_f = \{1, 2, 3\}, D_g = \{0, 1, 2\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2\}$$

چون تابع f در نقاط ۱ و ۳ مقدارش صفر نمی‌شود، هر دو در تابع $\frac{g}{f}$ قرار می‌گیرند:

$$\frac{g}{f}(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{g}{f}(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{g}{f} = \{(1, 0), (2, 1)\}$$

ولی تابع g در نقطهٔ ۱ مقدار صفر دارد و پنایدین تابع $\frac{f}{g}$ نمی‌تواند در ۱ حساب شود و فقط عدد ۳ در دامنهٔ آن هست:

$$\frac{f}{g}(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{f}{g} = \{(3, 1)\}$$

ب) در محاسبهٔ $2g$ ، دامنهٔ g تا پیش مانده و فقط مقادیر تابع (مؤلفهٔ دوم) در عدد ۳ ضرب می‌شود:

$$2g = \left\{ (1, 2 \times 0), (0, 2 \times 3), (2, 2 \times \frac{1}{1}) \right\} = \{(1, 0), (0, 6), (2, 1)\}$$

محاسبهٔ $2g - f$:

$$(2g - f)(1) = 2g(1) - f(1) = 0 - 1 = -1, \quad (2g - f)(2) = 2g(2) - f(2) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2g - f = \{(1, -1), (2, 0)\}$$

تعیین تابع $\frac{f}{2g}$ ، مشابه قسمت (الف)، فقط عدد ۲ در دامنه است:

$$x=2: \frac{f}{2g}(2) = \frac{f(2)}{(2g)(2)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{f}{2g} = \{(1, 1)\}$$



مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲) *

اگر $g = \{(1, 8), (2, 5), (-1, 4)\}$ و $f = \{(1, 0), (-1, 2), (3, 7)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$$\frac{g}{f} \quad \text{ب)$$

الف) $f - g$

دامنهٔ مشترک $\{-1, 1\}$ است؛ مشابه قبل:

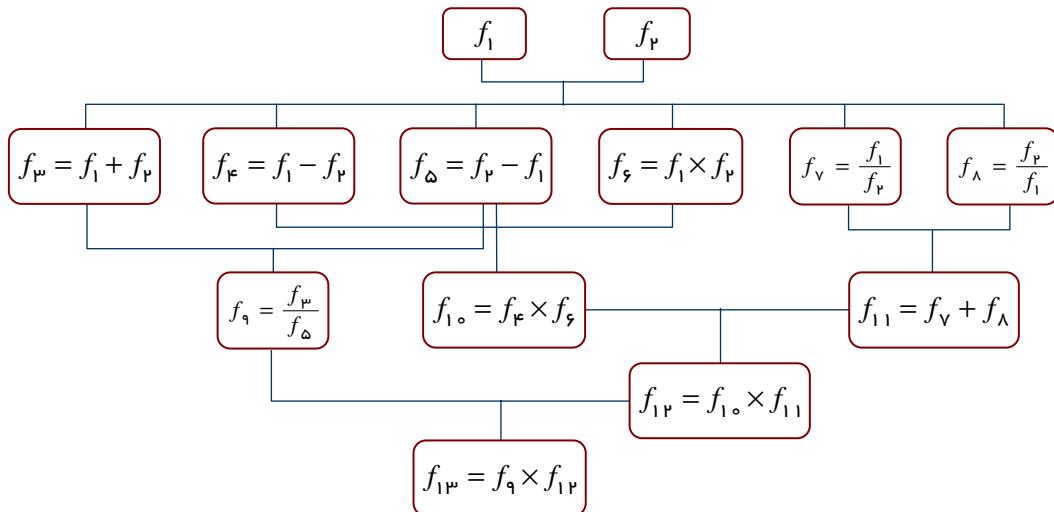
$$f - g = \{(1, -8), (-1, -2)\}$$

چون $f(1) = 0$ است، عدد ۱ در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارد. پنایدین:

$$\frac{g}{f}(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \frac{g}{f} = \{(-1, 2)\}$$



مثال: با توجه به ضابطه‌ی $f_1(x) = x - 1$ و $f_2(x) = x + 1$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.



پاسخ

پاید په ترتیب عمل کنید ټا پا شماره‌های کمتر، مقدار تابع پا شماره‌های پیشتر، حساب شود:

$$f_1(2) = 2 + 1 = 3 \quad \text{و} \quad f_2(2) = 2 - 1 = 1$$

اکنون می‌توان ادامه داد:

$$f_3(2) = f_1(2) + f_2(2) = 3 + 1 = 4 \quad f_4(2) = f_1(2) - f_2(2) = 3 - 1 = 2$$

$$f_5(2) = f_2(2) - f_1(2) = 1 - 3 = -2 \quad f_6(2) = f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 1 = 3$$

$$f_7(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{1} = 3 \quad f_8(2) = \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{1}{3} \quad f_9(2) = \frac{f_3(2)}{f_5(2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

بقیه موارد نیز په روشن مسأله حساب می‌شوند.

مثال: با توجه به ضابطه‌های $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = x^3 - 4x$ ، ضابطه و دامنه‌ی توابع fg و $\frac{g}{f}$ را به دست آورده و بعلاوه

مقدار $(g - f)(1)$ را بیابید.

پاسخ

ضابطه‌ی توابع په آسانی نوشته می‌شود:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^3 - 4x) \times \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 4x}{x}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x(x^3 - 4x)}$$



دامنهای تابع f شامل تمام اعداد \mathbb{R} و دامنهای تابع g همهی اعداد به جزء ریشهی مخرج، یعنی $\{0\}^c$ است. پس دامنهای fg تابع اشتراک این دو مجموعه است:

$$D_{fg} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

برای دامنهای $\frac{g}{f}$ ، باید چوایپهای $f(x) = 0$ از اشتراک بالا حذف شود:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

فقط باید عدد ۴ از اشتراک حذف شود، چون عدد ۰ در اشتراک دو دامنه قرار ندارد.

$$D_{\frac{g}{f}} = (\mathbb{R} - \{0\}) - \{4\} = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

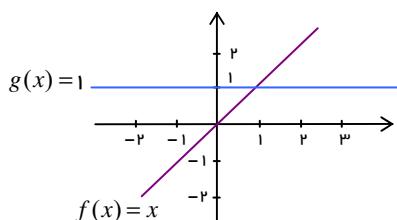
بالاخره، چون $3 = \frac{1}{1} = 1^3 - 4(1) = 1 - 4 = -3$ است، بنابراین:

$$(g-f)(1) = g(1) - f(1) = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$$



در پایان، مواردی مرتبط با نمودار جبر توابع را بینید.

مثال: (از کتاب)



به کمک نمودارهای رسم شدهای f و g ، ابتدا نمودار تابع $f+g$ را فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطهی تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

الف) مقدار تابع در نقاط $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

مقدار تابع در این سه نقطه:

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 1 = 0$$

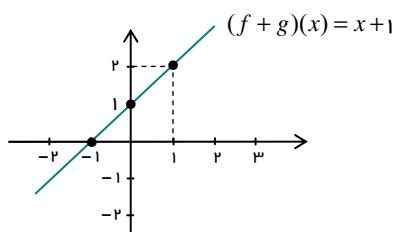
$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2$$

ضابطهی تابع نیز چنین است: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1$

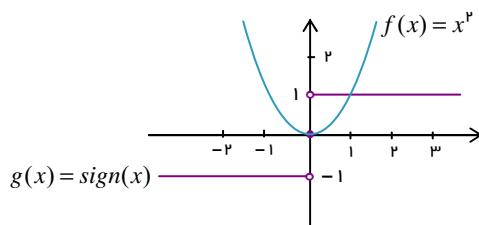
این تابع خطی است و برای رسم آن، مختصات دو نقطه کافی خواهد بود. از محاسبات بالا، سه نقطهی $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ و

$(1, 2)$ حاصل می‌شود که در نمودار زیر می‌بینید:





ب) مانند قسمت قبل، برای توابع مقابله و نقاط $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 2$ عمل کنید.



پاسخ

مقدار تابع جمع در (ین نقطه‌ها):

$$(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-1)^r + (-1) = 1 - 1 = 0$$

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = (0)^r + 0 = 0$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = (1)^r + 1 = 2$$

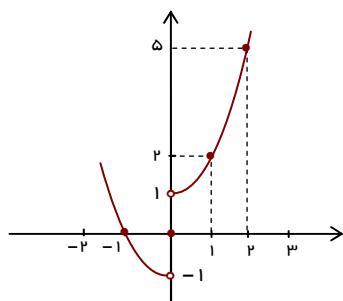
$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = (2)^r + 1 = 5$$

چون تابع g سه ماده‌ای است، ماده‌ی جمع نیز به همین صورت است:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^r - 1 & x < 0 \\ x^r + 0 & x = 0 \\ x^r + 1 & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^r - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^r + 1 & x > 0 \end{cases}$$

(ز) محاسبات بالا، چهار نقطه $(-1, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 2)$ و

(۵) حاصل می‌شود که در نمودار روپردازی پذیرید:



مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

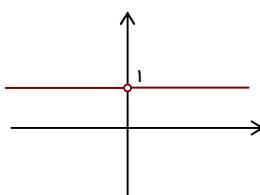
اگر $\frac{f}{g}(x) = |x|$ و $f(x) = |x|$ باشد، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.

پاسخ

ماده‌ی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{|x|} = 1 \quad (\text{البته باید } x \neq 0 \text{ باشد}).$$

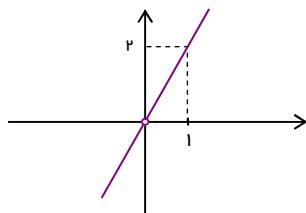
بنابراین نمودار تابع خط $y = 1$ است که فقط در $x = 0$ نمودار ندارد:





مثال: مشابه کتاب

اگر $x^3 = f(x)$ و $g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه‌ی تابع f را مشخص کنید.



پاسخ

خط داده شده در نمودار از نقطه $(0,0)$ و $(1,2)$ گذشته، پس شیب آن $m = \frac{2-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$ پوده و معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$

یعنی ضابطه‌ی $\frac{f(x)}{g(x)} = 2x$ پوده و در نتیجه:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x \rightarrow \frac{f(x)}{x^3} = 2x \Rightarrow f(x) = x^3 \times 2x = 2x^4$$





ویژه آمادگی کنکور



در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف نظر کنید!

نمونه تست‌های بیشتر و برخی نکات در مورد توابع پلکانی را می‌آوریم:

طبق جدول محاسبه‌ی هزینه‌ی برق مصرفی بر حسب «کیلو وات ساعت»، هزینه‌ی برق مصرفی به ازای مصرف ۳۴۰ کیلو وات ساعت، چند ریال است؟

میزان مصرف بر حسب کیلووات ساعت	هزینه بر حسب ریال
۱۰۰	۴۵۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵
مازاد بر ۳۰۰	۲۰۰۰

- ۱ ۱۰۰۰۰
- ۲ ۲۵۰۰۰۰
- ۳ ۳۶۰۰۰۰
- ۴ ۲۹۰۰۰۰

پاسخ

هزینه‌ی مصرف در سه محدوده‌ی اول:

(صد کیلو وات اول، هر کیلو وات ۴۵۰ ریال، صد کیلو وات دوم، هر کیلو وات ۵۲۵ ریال، صد کیلو وات سوم، هر کیلو وات ۱۱۲۵ ریال،) پاید کامل پرداخت شود:

$$100 \times 450 + 100 \times 525 + 100 \times 1125 = 100 \times (450 + 525 + 1125) = 100 \times 2100 = 210000$$

مازاد ۳۰۰ تا ۳۴۰ کیلو وات هم پاید هر کیلو وات ۲۰۰۰ ریال محاسبه شود:

$$40 \times 2000 = 80000 \Rightarrow \text{کل هزینه} = 210000 + 80000 = 290000$$



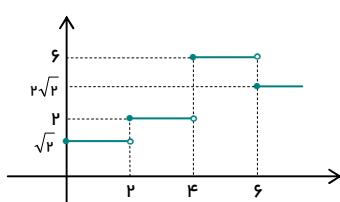
$$\frac{f(6)f(\sqrt{6})}{f(\frac{\sqrt{11}}{2})}$$

۱۲۷۲

۳

۱۲

۴



کاریمه

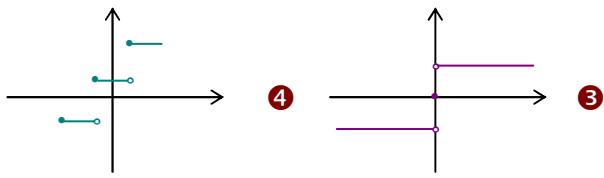
توضیح کنید: $\frac{\sqrt{11}}{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}$ در محدوده‌ی ۲ x بین ۳ و ۴ است، اکنون با دقت در نمودار، مقادیر نوشته می‌شوند:



$$\frac{f(6)f(\sqrt[2]{6})}{f(\frac{\sqrt{11}}{2})} = \frac{2\sqrt{2} \times 6}{\sqrt{2}} = 2 \times 6 = 12$$



کدام تابع زیر پلکانی محسوب نمی‌شود؟



$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ -2x & x = 0 \\ 3 & x = 5 \\ 4x & x > 5 \end{cases}$$

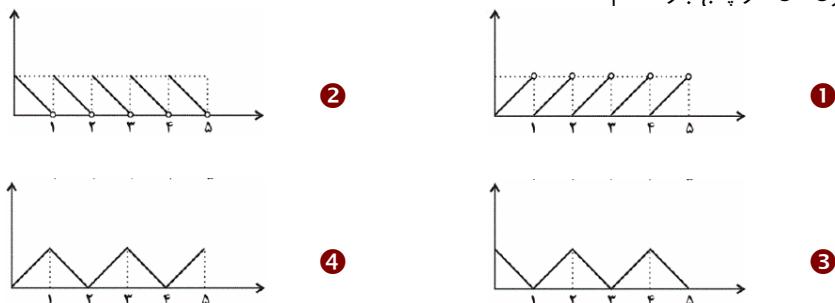
$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ -2x & x = 0 \\ 3 & x = 5 \\ 4 & x > 5 \end{cases}$$

گزینه ۵

در تابع دوم، فقط برای $x > 5$ مقدار تابع دارای صاپطه‌ی $y = 4x$ پوشه و تاپت نیست.

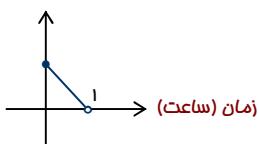


اگر مخزن یک ساعت شنی با سرعت ثابت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین بریزد، نمودار خالی شدن مخزن آن در پنج بار کدام است؟



گزینه ۶

مجموع شن مخزن بالا



در ابتدا مخزن پر است و در طی یک ساعت، مجموع شن داخل مخزن صفر می‌شود.

پس پاید در ابتداء، مقدار تابع زیاد پاشد و په مرور صفر شده و این روند تکرار شود؛

(تکرار پنج باره‌ی این عمل، در گزینه‌ی دوم آمده است).



اگر $f(\sqrt{5}) \times g(0)$ باشد، حاصل $\frac{3f(3) - 4g(-3)}{f(-1) + 2g(1)}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad 4$$

$$-\frac{7}{12} \quad 3$$

$$\frac{7}{12} \quad 2$$

$$\frac{1}{4} \quad 1$$

گزینه ۷

قرار دهید: $g(x) = k$. طبق خاصیت تابع علامت:

$$\frac{m(1)-4k}{-1+4k} = -4 \rightarrow m - 4k = 4 - 4k \rightarrow \underbrace{-4k + 4k}_{=4k} = \underbrace{4 - m}_{=1} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

پس $g(x) = \frac{1}{4}$ بوده و در نتیجه:

$$f(\sqrt{5}) \times g(0) = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



اگر نمودار تابع $g(x) = \begin{cases} -x^4 & x \geq 0 \\ x^4 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = sign(x)$ می‌شود:

(برخورد) دارند؟

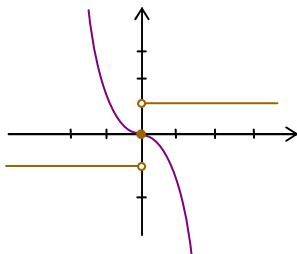
۰ ۴

۳ ۱

۲ ۱

۱ ۱

کزینه ۱



نمودار تابع f را می‌شناسیم؛ نمودار g هم با استفاده از مقدار تابع در $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ به آسانی رسم (تقریبی) می‌شود:

می‌بینید که:

فقط در مبدأ دو نمودار پر茅ور دارند.

روش دو:

ضابطه‌ها را در سه حالت $x=0$ و $x<0$ و $x>0$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$x=0 : f(0)=g(0) \rightarrow 0=-(0)^4=0 \quad \text{قابل قبول}$$

$$x<0 : f(x)=g(x) \rightarrow -1=x^4 \quad \text{غیر ممکن}$$

$$x>0 : f(x)=g(x) \rightarrow 1=-x^4 \quad \text{غیر ممکن}$$

پس فقط یک جواب وجود دارد.



تساوي $sign(2x+3) - 2sign(5-x) = -3$ برای چند عدد صحیح یک رقمی x برقرار است؟

۴ بی‌شمار

۳ ۱

۲ ۱

۱ ۰ ۱

کزینه ۲

با توجه به خروجی تابع علامت، تنها پا مقادیر به صورت $\underbrace{sign(2x+3)}_{=-1} - \underbrace{2sign(5-x)}_{=1} = -3$ متساوی ممکن می‌شود:

$$sign(2x+3) = -1 \rightarrow 2x+3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

$$sign(5-x) = 1 \rightarrow 5-x > 0 \Rightarrow x < 5$$

استراک دو جواب به صورت $x < -\frac{3}{2}$ بوده و جواب‌های مورد نظر چنین هستند:
 $x = -4, -3, \dots, -9$





۱ ۴

۰ ۳

-۱ ۲

-۲ ۱

گزینه ۱

طبق مفهوم چن، صحیح:

$$f\left(-\frac{1}{\mu}\right) = \mu \underbrace{\left[-\frac{1}{\mu}\right]}_{[-\circ/\Delta] = -1} + \underbrace{[-(-\frac{1}{\mu})]}_{[\circ/\Delta] = \circ} = \mu(-1) + \circ = -\mu$$

$$f\left(\frac{\mu}{\mu}\right) = \mu \underbrace{\left[\frac{\mu}{\mu}\right]}_{[1/\Delta] = 1} + \underbrace{[-\frac{\mu}{\mu}]}_{[-1/\Delta] = -1} = \mu(1) - \mu = 0$$

پس جواب پرایبر $-2 + 0 = -2$ است.

----- ♦ -----

اگر $f(x) = [x - 1]$ باشد، مقدار $f\left(-\frac{\mu}{\mu}\right) + f\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\mu}\right)$ است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

۱ ۴

-۱ ۳

-۲ ۲

۰ ۱

گزینه ۲ با توجه به مقدار تقدیبی $\sqrt{5} \equiv ۲/\sqrt{۵}$ ، مواردیم داشت:

$$f\left(-\frac{\mu}{\mu}\right) = [\mu\left(-\frac{\mu}{\mu}\right) - 1] = [-\frac{\mu}{\mu} - 1] = [-1/\Delta - 1] = [-2/\Delta] = -2$$

$$f\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\mu}\right) = [\mu\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\mu}\right) - 1] = [\underbrace{\sqrt{\Delta} - 1}_{\equiv 2/\sqrt{5} - 1} = 1/\sqrt{5}] = 1$$

پس جواب پرایبر $-2 + 1 = -1$ است.

----- ♦ -----

اگر $f(x) = [1 - \mu x]$ باشد، مقدار $f(-\circ/\sqrt{\gamma}) - f(-\circ/\circ\gamma)$ است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱ ۴

۰ ۳

۶ ۲

۲ ۱

گزینه ۱

مقادیر را در تابع چایگزین می کنیم:

$$f(-\circ/\sqrt{\gamma}) = [1 - \mu(-\circ/\sqrt{\gamma})] = [1 + \circ/\sqrt{\gamma}] = [\mu/\sqrt{\gamma}] = \mu$$

$$f(-\circ/\circ\gamma) = [1 - \mu(-\circ/\circ\gamma)] = [1 + \circ/\circ\gamma] = [1/\circ\gamma] = 1$$

پس جواب پرایبر $\mu - 1 = -1$ است.

----- ♦ -----



$$[\sqrt{8}] = 2 \quad ④$$

$$[-\sqrt{6}] = -2 \quad ③$$

$$[1-\pi] = -3 \quad ②$$

$$[\pi] = 3 \quad ①$$

گزینه

با توجه به مقادیر تقریبی:

$$\pi \approx 3.14 \quad \text{و} \quad -\sqrt{6} \approx -2.47 \quad \text{و} \quad \sqrt{8} \approx 2.83$$

فقط مورد سوم نادرست است:

$$[-\sqrt{6}] = [-2/4] = -3$$



حاصل عبارت $\frac{3[1-\pi]-[2\pi]}{[2/9]+[-0/0]}$ کدام است؟

$$-6 \quad ④$$

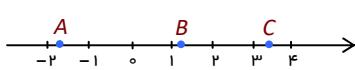
$$-8 \quad ③$$

$$-15 \quad ②$$

$$-12 \quad ①$$

گزینه

$$\frac{3[\overbrace{1-\pi}^{\equiv -2/14}-\overbrace{2\pi}^{\equiv 6/28}]}{[2/9]+[-0/0]} = \frac{3(-3)-6}{2+(-1)} = \frac{-15}{1} = -15$$



$$\frac{\left[\frac{1-2A}{5}\right]+2[B]}{\left[\frac{C}{2}\right]-3}$$

$$\frac{1}{2} \quad ④$$

$$-\frac{1}{2} \quad ③$$

$$-1 \quad ②$$

$$1 \quad ①$$

گزینه

باید حدود عددهای $\frac{C}{2}$ و $\frac{1-2A}{5}$ را مشخص کنیم. طبق محور:

$$-2 < A < -1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 < -2A < 2 \xrightarrow{+1} 3 < 1-2A < 5 \xrightarrow{\div 5} \frac{3}{5} < \frac{1-2A}{5} < 1$$

$$3 < C < 5 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2} < \frac{C}{2} < 2$$

پنپاراین:

$$\frac{\left[\frac{1-2A}{5}\right]+2[B]}{\left[\frac{C}{2}\right]-3} = \frac{0+2(1)}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

توجه کنید:

اگر استدلال بالا طولانی یا دشوار است، می‌توانید در عبارت کسری جای A ، B و C مقادیر تقریبی طبق محور جایگزین کنید.



0912 172 0728



@alireza_karbalaie



اگر a ریشه‌ی مثبت معادله $= 0 = -x^3 + 2x^2 - 3$ باشد، $[-a]$ کدام است؟

-۴ ④

-۳ ③

-۲ ②

-۱ ①

گزینه ۱

حل معادله به روشن دلیل:

$$a = \frac{-2 + \sqrt{28}}{4} = \frac{2(-1 + \sqrt{7})}{4} = \frac{\sqrt{7} - 1}{2}$$

$\Delta = 4 + 24 = 28$ است و چوپ مثبت معادله $= 0$ است. با توجه به مقدار تقریبی

 $\sqrt{7} \approx 2.6$ ، مخواهیم داشت:

$$a = \frac{\sqrt{7} - 1}{2} \approx \frac{1/6}{2} = 0.5 \rightarrow -a \approx -0.5 \xrightarrow{-1 < -a < 0} [-a] = -1$$



تابع $f(x) = [x]$ را برای $x \leq 3 < -2$ رسم کردایم. برد تابع شامل چند عضو است؟

۴ ④

۵ ③

۶ ②

۷ ①

گزینه ۲

بدون رسم نمودار می‌توان این گونه استدلال کرد:

در محدوده $-1 \leq x < -2$ داریم: $y = -1$ در محدوده $-2 \leq x < 0$ داریم: $y = -2$ در محدوده $0 \leq x < 1$ داریم: $y = 0$ در محدوده $1 \leq x < 2$ داریم: $y = 1$ در محدوده $2 \leq x < 3$ داریم: $y = 2$ و پرای $x = 3$ داریم: $y = 3$ پس برد په صورت $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ است.

ضابطه‌ی تابع $y = [-2x + |x|] + x$ در دامنه $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

 $2x + \frac{1}{3}$ ④ $x - 2$ ③ $x + 1$ ② $-2x$ ①گزینه ۳ چون x عددی منفی است، $|x| = -x$ پوشه و داخل پراکن پراپر می‌شود پا:

$$-2x - x = -3x$$

محدوده $x - 3x = -2x$ را (استفاده از فرض معلوم می‌کنیم):

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{x(-3)} 2 > -3x > 1 \quad (\text{با ضرب در عدد منفی، جهت تغییر می‌کند.})$$

پنابرین $1 = -3x$ (است و در نتیجه):

$$y = [-3x] + x = 1 + x$$



نکته ۱

وقتی عدد صحیح k به صورت جمع یا تفریق داخل جزء صحیح باشد، می‌تواند از برآکت خارج شود:

$$[x \pm k] = [x] \pm k$$

مثال: مجموعه جواب معادله زیر را معلوم کنید:

$$2[x - 4] + [x] = 4$$

پاسخ

طبق خاصیت قُبل، معادله ساده و سپس حل می‌شود:

$$2([x] - 4) + [x] = 4 \rightarrow 3[x] = 12 \rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$



اگر $\frac{6}{5} < x \leq \frac{7}{5}$ باشد، حاصل $[2 - 5x] = ?$ کدام است؟

-۴ ④

-۳ ③

-۱ ②

-۵ ①

گزینه

روش عادی په عهده‌ی داوطلبان، روشن عدد گذاری:

عدد x در محدوده‌ی $\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{7}{5}$ قرار دارد. جواب تبیّن برابر است با:

$$[-5x + 2] = [-5x] + 2 = [-5(\frac{7}{5})] + 2 = [-7] + 2 = -7 + 2 = -5$$



نکته ۲

برای عبارت معروف $[x] + [-x]$ ، یعنی وقتی داخل برآکت‌ها قرینه هستند، فقط دو مقدار حاصل می‌شود:

اگر داخل برآکت‌ها صحیح باشد، حاصل همیشه برابر صفر است. ■

مانند:

$$[3] + [-3] = 0 \quad \text{و} \quad [-7] + [7] = 0$$

اگر داخل برآکت‌ها غیرصحیح باشد، حاصل همیشه برابر ۱ است. ■

مانند:

$$[\frac{2}{1}] + [-\frac{2}{1}] = -1 \quad \text{و} \quad [-\frac{5}{9}] + [\frac{5}{9}] = -1$$

اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

$f(2) = 0$ ④

$f(-2/7) = 1$ ③

$f(2/7) = -1$ ②

$f(-2) = 0$ ①

گزینه ۳

چون $\frac{7}{2}$ - عددی غیر صحیح است:

$$f\left(-\frac{7}{2}\right) = \left[-\frac{7}{2}\right] + \left[\frac{7}{2}\right] = -1$$



تابع $f(x) = [x] + [-x]$ در چند نقطه‌ی صحیح در دامنه $\frac{g}{f}(x)$ با دامنه‌ی $x \in \mathbb{Z}$ - و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}(x)$ در کل تعیین نشده

برابر ۳ است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

۰ ۴

۲ ۳

۴ ۲

۶ ۱

گزینه ۴

چون در نقاط صحیح داریم: $f(x) = [x] + [-x] = 0$ صفر پوده و در کل تعیین نشده است. پس هیچگاه برابر ۳ نمی‌باشد.



نکته ۳

در مورد عددهای کوچک (بین ۱ - تا ۱) به موارد کاربردی زیر توجه کنید:

این عددها با توان رسانی یا جذر گرفتن، بازهم بین ۱ - تا ۱ می‌مانند، ولی:

باید به علامت مثبت یا منفی آنها توجه داشته باشید

اگر $0 < a < 1$ باشد، توان و جذر آن هم بین ۰ و ۱ هستند. ■اگر $0 < a < 1$ باشد، توان زوج a بین ۰ و ۱ و توان فرد a بین ۱ - و ۰ است. (جذر بی معنی است). ■

(نمونه‌ی بعد را ببینید!)

۱ ۱

گزینه ۵

عددهای x^3 و x^9 بین ۰ و ۱ هستند و عدد x^6 بین ۰ و ۱ قرار دارد. پناین:

$$[x] + [x^3] + [x^6] + [x^9] = -1 - 1 + 0 - 1 = -3$$



نمونه‌هایی از اعمال جبری توابع ببینید:

اگر $f = \{(1, 2), (-3, 4), (3, 5), (7, -1)\}$ و $g = \{(3, -1), (2, 1), (7, 2), (1, 0)\}$ باشند، دامنه‌ی توابع $f \times g$ و $f - g$ به ترتیب کدام است؟



$\{-3\} \text{ و } \{3, 7\}$	②	$\{-3\} \text{ و } \{1, 3, 7\}$	①
$\{2, 6, -5, -2\} \text{ و } \{0, -5, -2\}$	④	$\{1, 3, 7\} \text{ و } \{1, 3, 7\}$	③

گزینه ۳

می‌دانیم که دامنه‌ی هر دو تابع، اشتراک دامنه‌های دو تابع است:

$$D_f \cap D_g = \{1, -3, 3, 7\} \cap \{3, 2, 7, 1\} = \{1, 3, 7\}$$



اگر $g = \{(1, 3), (2, 6), (5, 2), (4, 9)\}$ و $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$ کدام است؟
کنکور (۱۳۹۸)

$\{1, 2, 3, 4\}$	④	$\{-4, 1, 2, 3\}$	③	$\{-4, 2, 3\}$	②	$\{-4, 1, 3\}$	①
------------------	---	-------------------	---	----------------	---	----------------	---

گزینه ۱

کافی است مقادیر تابع در دامنه مشترک $\{1, 2, 4\}$ حساب شوند:

$$(g - f)(1) = 3 - 7 = -4 \quad (g - f)(2) = 6 - 5 = 1 \quad (g - f)(4) = 9 - 6 = 3$$

بس پردازید $\{-4, 1, 3\}$ است.



اگر $\frac{(f-g)(1)}{\frac{f}{g}(10)}$ کدام است؟
 $g = \{(-3, 6), (1, -6), (10, 20)\}$ و $f = \{(0, 4), (1, 8), (10, 12)\}$

$\frac{71}{3}$	④	$\frac{61}{3}$	③	$\frac{70}{3}$	②	$\frac{65}{3}$	①
----------------	---	----------------	---	----------------	---	----------------	---

گزینه ۴

محاسبه مقادیر صورت و مخرج طبق تعریف:

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 8 - (-6) = 14 \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(10) = \frac{f(10)}{g(10)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

در نتیجه:

$$\frac{(f-g)(1)}{\left(\frac{f}{g}\right)(10)} = \frac{14}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{14 \times 5}{1 \times 3} = \frac{70}{3}$$



اگر $\frac{g}{g-f}$ کدام است؟
 $g = \{(2, 3), (4, 1), (-1, -2)\}$ و $f = \{(3, 3), (4, -1), (-1, 3)\}$

$\left\{ \left(4, \frac{1}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{5}\right) \right\}$	②	$\left\{ \left(4, \frac{1}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{5}\right), (2, 0) \right\}$	①
$\left\{ \left(4, 0\right), \left(-1, \frac{2}{5}\right), (2, 0) \right\}$	④	$\left\{ \left(-1, \frac{2}{5}\right) \right\}$	③

گزینه ۲



اُشتراک دامنه‌ها $\{1, -1, 2, 4\}$ است؛ ولی چون در مخرج $(g-f)(x) = 3 - 3 = 0$ فقط عددهای ۳ و ۱ در دامنه هستند، محاسبه مقادیر:

$$\frac{g}{g-f}(-1) = \frac{g(-1)}{g(-1)-f(-1)} = \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}, \quad \frac{g}{g-f}(4) = \frac{g(4)}{g(4)-f(4)} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

◇

اگر $g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ و $f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\}$ باشد، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ کدام است؟
(کنکور ۱۳۹۹)

$\left\{\frac{V}{\mu}, 3, -2\right\}$ ④

$\left\{\frac{\Delta}{\mu}, 4, -2\right\}$ ③

$\left\{\frac{V}{\mu}, 3, -3\right\}$ ②

$\left\{\frac{\Delta}{\mu}, 2, -3\right\}$ ①

گزینه ۲

اپندا پید ټوابع جمع و تفریق حساب شوئد. په آسانۍ:

$$f+g = \{(3, 6), (5, 9), (1, 7)\} \quad \text{و} \quad f-g = \{(3, 2), (5, -3), (1, 3)\}$$

چون دامنه مشترک $\{5, 1, 3\}$ است، ماتند قبل:

$$\left(\frac{f+g}{f-g}\right)(1) = \frac{7}{\mu} \quad \left(\frac{f+g}{f-g}\right)(3) = \frac{6}{\mu} = 3 \quad \left(\frac{f+g}{f-g}\right)(5) = \frac{9}{\mu} = -3$$

پس پرد پرایر $\left\{\frac{V}{\mu}, 3, -3\right\}$ است.

◇

اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^r - 1)x + (a^r + 1)c$ تابع ثابت و $f - g$ باشد، چند مقدار برای ac وجود دارد؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۴ ④

۳ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۲

با توجه به صابطه‌ی ټوابع ٹپت و همانی:

$$|a| - |b| = 1 \quad \bullet$$

$$\text{چون } g \text{ ٹپت است:} \quad \bullet$$

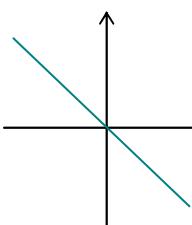
$$b^r - 1 = 0 \rightarrow b = \pm 1 \rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{|a| - |b| = 1} |a| - 1 = 1 \rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

پس ټا اینجا x چا $y = f(x)g(x) = ((\pm 2)^r + 1)c = \Delta c$ و $f(x) = -x$

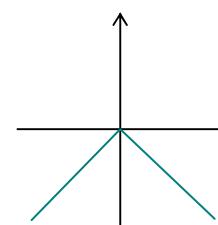
$$x - \Delta c = x + \Delta \rightarrow -\Delta c = \Delta \rightarrow c = -1 \Rightarrow ac = 2(-1) = -2 \quad \text{یا} \quad ac = -2(-1) = 2$$

◇

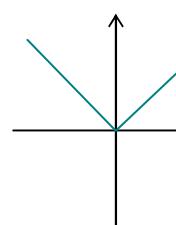
اگر $y = f(x)g(x)$ باشد، نمودار تابع $y = f(x)g(x) = -sign(x)$ و $f(x) = -x$ کدام است؟



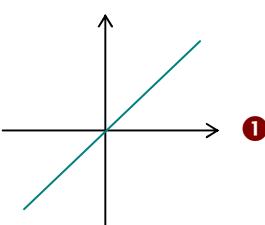
④



③



②



۱ ①

گزینه ۲

ضایه‌ی تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$y = (-x)(-sign(x)) = x \times sign(x) = \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

واضح است که نمودار دوم صحیح است.



تابع $f(x) = |2x - 2|$ و $g(x) = [x]$ با دامنه‌ی $-1 \leq x \leq 1$ است. اگر مجموعه‌ی A برد تابع $f \cdot g$ باشد، کدام عدد عضو A است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

۳ ۴

۲ ۳

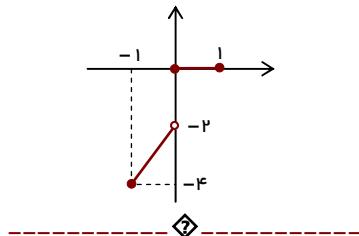
-۲ ۲

-۳ ۱

گزینه ۱

دامنه‌ی تابع ضرب همان $1 \leq x \leq 1$ و با ساده کردن ضایه، نمودار رسم شده و پرداخته شد:

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0 : & \xrightarrow{[x]=-1} (f \cdot g)(x) = -2|x-1| = 2(x-1) = 2x-2 \\ 0 \leq x < 1 : & \xrightarrow{[x]=0} (f \cdot g)(x) = 2|x-1|(0) = 0 \\ x=1 : & \rightarrow (f \cdot g)(1) = 0 \end{aligned}$$



اکنون نمودار تابع قابل رسم است:

در پیون گزینه‌ها؛

فقط عدد ۳ - در پرد قرار دارد.



۱ نمودار تابع پلکانی زیر را رسم کرده و دامنه و بردش را مشخص کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ 0 & 2 \leq x < 4 \\ -1 & 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

۲ حاصل عبارت زیر را مشخص کنید:

$$[-\sqrt{2}] + sign(\sqrt{2}) + |\sqrt{2} + 1|$$

۳ معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$x^3 sign(x^3 + 1) + 9 sign(-5) = 0$$

۴ الف) ضابطه‌ی تابع $y = sign(x)$ را نوشه، آن را رسم کرده و دامنه و بردش را مشخص کنید.

ب) اگر $1 = -k$ باشد، حدود k را تعیین کنید.

۵ حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$A = \frac{5[-0/9] - [-3]}{5[-4/5] + [1/98]}$$

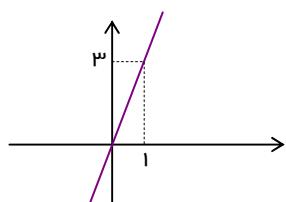
۶ برای تابع $f(x) = [x] - [-x]$ ، مقادیر $f(2)$ و $f(-2)$ را حساب کنید.

۷ اگر $x = 2$ باشد، حدود متغیر x را مشخص کنید.

۸ اگر $\frac{g}{f} = 2$ باشد، حدود متغیر x را مشخص کنید.

کنید.

۹ اگر $f(x) = x^3$ و تابع $\frac{f}{g}(x)$ دارای نمودار روبرو باشد، ضابطه‌ی تابع g را بنویسید.

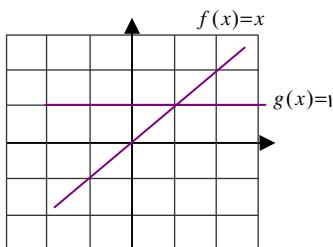


۱۰ اگر $f(x) = c$ تابع ثابت و g تابع همانی باشد، مقدار c را از تساوی مقابله‌ی $\frac{g(2) + 3f(5)}{[1/5] + g(-2)} = -1$ بیابید.

برای تابع $f(x) = \text{sgn}([x]) + f(\sqrt{3})$ ، مقدار $f(\sqrt{3})$ را حساب کنید.

حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\frac{5[-\frac{1}{9}] - [-\frac{3}{5}]}{2[\text{sgn}(-\frac{2}{5})] + [\frac{1}{98}]}$$



به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g : (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

الف) نمودار تابع $f + g$ را در نقاط $x = -5, -1, 1, 5$ مشخص کنید.

ب) نمودار تابع $f + g$ را رسم کنید.

۱۴) اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = \{(1, 0), (-1, 3), (3, 7)\}$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید. (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

ب) $(2f)(-3g)(1)$

الف) D_{f-g}

تمرینات
منتخب کتاب

۱) با استفاده از محور، مقادیر زیر را به دست آورید.



$$[\frac{4}{2}] =$$

$$[-\frac{4}{2}] =$$

$$[\frac{3}{99}] =$$

$$[-\frac{1}{2}] =$$

$$[-2] =$$

$$[\pi] =$$

۲) جدول زیر را کامل کنید:

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$	ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -\frac{2}{3}$ $x = 5$		$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$ $x = \frac{1}{3}$ $x = \frac{1}{7}$ $x = 2$	
$f(x) = [-x]$	$x = \frac{1}{7}$ $x = \frac{2}{3}$		$f(x) = [\sqrt[3]{x}]$	$x = 1$ $x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{3}$	

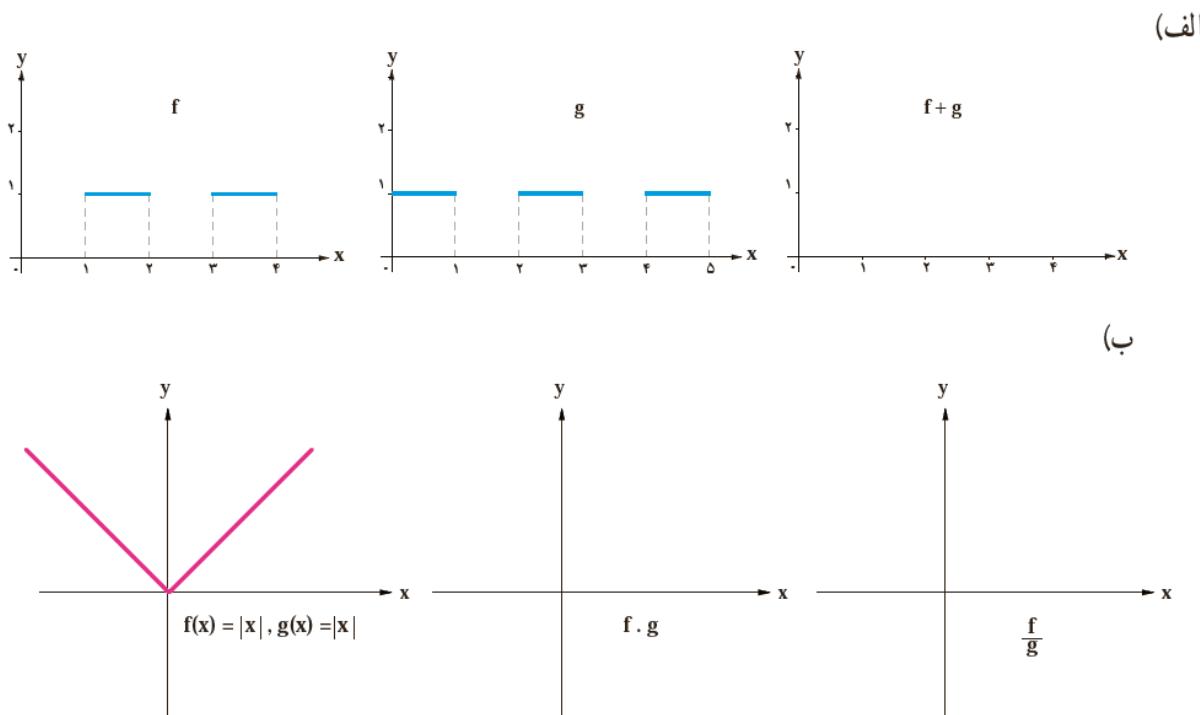
جدول مالیاتی زیر در یک شرکت برای سال جدید مالی تصویب شده است:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	۱/۳۰۰/۰۰۰ تا
۱۰	۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۱/۳۰۰/۰۰۰
۱۵	۴/۵۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰
۲۵	۴/۵۰۰/۰۰۰

- الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.
 ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه‌ی سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید:

- کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان.
- کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان.
- کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان.

۱۴ در هر مورد زیر، با توجه به نمودار توابع داده شده f و g ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید:





۵ یک شرکت سرمایه‌گذاری دارای دو کارخانه‌ی A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه‌ی A به ترتیب $16x^3 + 16x^2 + 6x - 4$ و در کارخانه‌ی B به ترتیب $12x^3 + 2x^2 + 9x - 1$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):

الف) تابع سود شرکت را مشخص کنید.

ب) این شرکت با چه میزان تولید کاشی به سود ماکریم می‌رسد؟

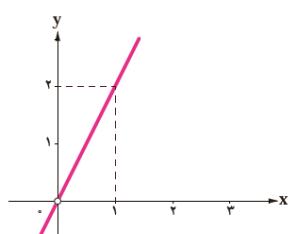
۶ تابع $f(x) = [x]$ با دامنه‌ی $0 \leq x \leq 1$ ، تابع $g(x) = |x|$ با دامنه‌ی $-1 \leq x \leq 1$ و تابع $h(x) = x^3 - 14$ با دامنه‌ی $-1 \leq x \leq 2$ را در نظر بگیرید. سپس موارد زیر را انجام دهید:

الف) تعیین ضابطه و رسم نمودار تابع $s(x) = f(x) + g(x)$.

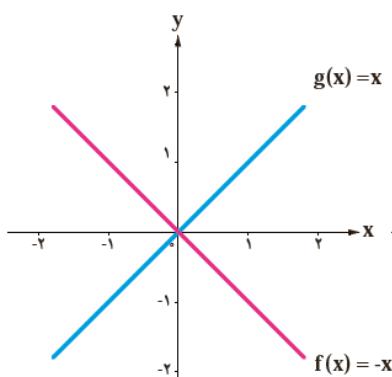
$$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$$

ب) تعیین ضابطه و رسم نمودار تابع $p(x) = h(x) \times g(x)$.

۷ اگر $f(x) = x^4$ و تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه‌ی تابع g را مشخص کنید.



۸ به کمک نمودارهای رسم شده‌ی f و g ، ابتدا نمودار تابع $f + g$ را فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f + g$ را به کمک ضابطه‌ی تابع آن و نیز نقاط $x = -2$ و $x = 0$ و $x = 2$ رسم کنید.





۱ حاصل عبارت $sign\left(\frac{1}{\mu}\right) + sign(\sqrt{2} - ۳) - sign(\pi)$ کدام است؟

-۱ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۲ حاصل عبارت $۲sign(۵ - \sqrt{۶}) - ۳sign([\sqrt{۲}] + [-\sqrt{۲}])$ کدام است؟ (براکت‌ها جزء‌صحیح هستند).

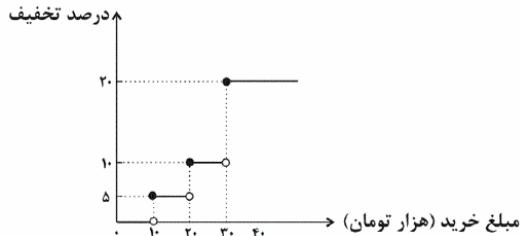
-۱ ۴

-۲ ۳

۲ ۲

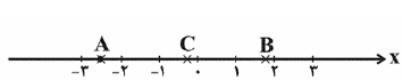
۱ ۱

۳ یک فروشگاه برای خریدهای مشتریان طبق تابع پلکانی زیر بر حسب مازاد مبلغ خرید، یک تخفیف مشخص می‌دهد. اگر از این فروشگاه پنجاه هزار تومان خرید کنیم، چند تومان تخفیف می‌گیریم؟



- ۱ ۴۰۰۰
۲ ۴۵۰۰
۳ ۵۵۰۰
۴ ۶۰۰۰

۴ با توجه به اعداد مشخص شده روی محور، حاصل عبارت $\frac{-\frac{A}{۳} - [-C]}{۴[-\frac{B}{۲}]}$ کدام است؟ (براکت‌ها جزء‌صحیح هستند).



$-\frac{1}{۴}$ ۲

$\frac{1}{۴}$ ۱

$-\frac{۳}{۴}$ ۴

$\frac{۳}{۴}$ ۳

-۱ ۴

۳ ۳

۰ ۲

۱ ۱

۵ حاصل عبارت $[\sqrt{۱}] + ۲[\sqrt{۲}] + ۳[\sqrt{۳}] + ۴[\sqrt{۴}] + ۵[\sqrt{۵}]$ کدام است؟

۲۰ ۴

۲۲ ۳

۲۴ ۲

۲۶ ۱

۶ یک شرکت باربری برای حمل بار بین دو شهر بابت ۳۵ کیلوگرم بار یا کمتر، ۱۰۰۰۰ تومان و بابت هر اضافه بار تا کمتر از ۱۵ کیلوگرم ۵۰۰۰ تومان اضافه دریافت می‌کند. این شرکت برای بارهای بین ۵۹ تا ۵۹ کیلوگرم چند تومان دریافت می‌کند؟

۲۰۰۰۰ ۴

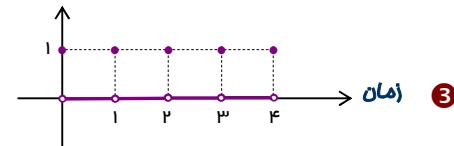
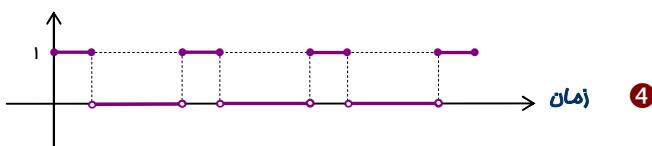
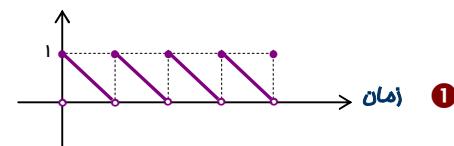
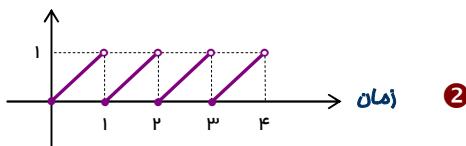
۲۵۰۰۰ ۳

۳۵۰۰۰ ۲

۳۰۰۰۰ ۱



۸ در یک ساعت دیواری، پرنده‌ای رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید و ساعت جدید را اعلام می‌کند. کدام نمودار این رفتار را نشان می‌دهد؟



۹ تابع دو ضابطه‌ای f برای $[x]$ فرد به صورت $f(x) = \frac{x^k}{\mu}$ زوج به صورت $f(x) = \mu x^k$ تعریف شده است.

مقدار $f(-\sqrt{2}) + f(-2\sqrt{2})$ کدام است؟

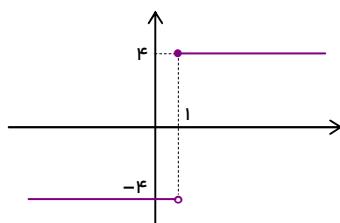
۱۷ ۴

۱۷ ۳

۶۵ ۲

۵ ۱

$$f(x) = \begin{cases} k - 6 & x < 1 \\ (m - 8)x + 2n & x \geq 1 \end{cases}$$



۱۰ نمودار روبرو مربوط به تابع پلکانی حاصل $m+n+k$ کدام است؟

۱۲ ۱

-۱۰ ۲

-۶ ۳

۸ ۴

۱۱ برای مقدار صحیح x حاصل عبارت $[7x] + [-7x]$ کدام است؟

۰ ۴

۱۴ ۳

-۷ ۲

۷ ۱

۱۲ برد تابع $y = [x] - 2$ با دامنه $5 \leq x < 1$ کدام است؟

$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ۴

$\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ ۳

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ۲

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ۱

۱۳ حاصل عبارت $|[-\frac{v}{\mu}]| + |[-\frac{v}{\mu}]|$ کدام است؟

۰ ۴

۳ ۳

-۱ ۲

۱ ۱

۱۴ اگر $f = \{(0, 2), (-1, -6), (3, 10)\}$ و $g = \{(0, 8), (10, 11), (3, 9)\}$ باشد، تابع $(f \times g) + g$ است؟

$\{(0, 18), (3, 96)\}$ ۲

$\{(0, 12), (3, 109)\}$ ۴

$\{(10, 120), (3, 18)\}$ ۱

$\{(-1, 14), (0, 100)\}$ ۳







اگر $f_1(x) = x^r - 1$ و $f_2(x) = 2x + 1$ باشند و قرار دهیم: $f_3(x) = f_1 + f_2$ در این صورت مقدار $\frac{f_3}{f_1}$ ۴ برابر باشد.

کدام است؟

$\frac{1}{3}$ ۴

۲ ۳

۳ ۲

$\frac{4}{3}$ ۱

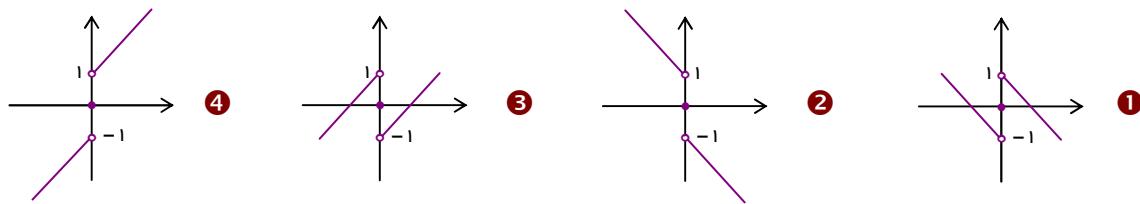
اگر $f(x) = [x] - ۲$ با دامنه $1 \leq x < ۲$ باشند، تابع $f + g$ کدام است؟

$$\begin{cases} (f+g)(x) = |x| + [x] \\ D_{f+g} = \{x: 1 \leq x \leq ۲\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = x - [x] \\ D_{f+g} = \{x: 1 \leq x \leq ۲\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = [x] - x \\ D_{f+g} = \{x: 1 \leq x < ۲\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f+g)(x) = x + ۱ \\ D_{f+g} = \{x: 1 \leq x < ۲\} \end{cases}$$



نمودار تابع $y = -|2x + ۳| + ۲$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع طولهای این دو نقطه کدام است؟

-۳ ۴

-۱ ۳

۳ ۲

۰ صفر ۱

اگر $f_1(x) = \sqrt{2x - ۱} + ۲$ و $f_2(x) = \frac{|x|}{x+۱}$ باشند و قرار دهیم: $f_3(x) = f_1 f_2$ در این صورت مقدار تابع $\frac{f_3}{f_1}$ ۴ برابر باشد.

به ازای $x = ۱$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ ۴

$\frac{3}{4}$ ۳

$\frac{4}{3}$ ۲

$\frac{2}{3}$ ۱

$$g(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

اگر $f(x) = |x|$ باشد، ضابطهی تابع $(g - f)(x)$ کدام است؟

x ۴

- x ۳

- $|x|$ ۲

$|x|$ ۱

در تابع $f(x) = [x + \frac{۳}{۴}] - [-x]$ مقدار $f(\frac{۹}{۴}) + f(-\frac{۱}{۴})$ کدام است؟ (کنکور ۹۸)

۷ ۴

۶ ۳

۵ ۲

۴ ۱



۳۷ اگر $g = \{(3,2), (2,3), (6,1), (1,8)\}$ و $f = \{(1,2), (2,4), (4,5), (3,3)\}$ باشد، برد تابع $g \times f$ کدام است؟
(کنکور خارج ۹۸)

۶, ۸, ۱۲, ۱۶ **۴**

۳, ۶, ۱۲, ۱۶ **۳**

۶, ۱۲, ۱۶ **۲**

۶, ۸, ۱۲ **۱**

۳۸ حاصل عبارت $sign(3\pi - 10) - 3sign(a^3 + 1) + 2sign(\sqrt{7} - 5\sqrt[3]{2})$ کدام است؟ (a عددی حقیقی است).
-۸ **۴** -۲ **۳** -۴ **۲** -۶ **۱**

۳۹ تساوی $sign(ab) = sign(a - b)$ در چند حالت زیر برقرار است؟
الف) اگر $a > b$ باشد.
ب) اگر $a < b$ و a طبیعی و b باشد.
پ) اگر $a = b$ باشد.
ت) اگر $a < b$ و b منفی و $|a| < |b|$ باشد.
ث) اگر $a = b = 0$ باشد.

۳ **۴**

۲ **۳**

۱ **۲**

۴ **۱**

۴۰ مجموع جوابهای معادله $x^{sign(\sqrt[3]{x})} - 2xsign(-1-x^3) = 8sign(x)$ کدام است؟
-۲ **۴** ۲ **۳** ۴ **۲** ۶ **۱**

۴۱ اگر $[x] = -3$ باشد، جمع مقادیر ممکن برای $[-3x - 2x]$ کدام است؟
۳ **۴** ۶ **۳** ۵ **۲** ۴ **۱**

۴۲ اگر $\frac{\Delta x - 1}{\mu} = 1$ باشد، تعداد مقادیر ممکن برای $[x^3]$ کدام است؟
۳ **۴** ۲ **۳** ۱ **۲** ۴ **۱**

۴۳ در تابع پلکانی $f(x) = \begin{cases} (a-3)x-2 & -3 \leq x < -1 \\ \frac{2b+1}{a-1} & -1 \leq x \leq 2 \\ (c+2)x-1 & x > 2 \end{cases}$ داریم: $f(-b) - b$ مقدار $f(x)$ کدام است؟

-۱ **۴**

$-\frac{1}{2}$ **۳**

۰ **۲**

$\frac{1}{2}$ **۱**

۴۴ تابع $f(x) = 2([x] + [-x])x - 1 - ax$ ثابت است. مقدار a در نقاط خارج \mathbb{Z} کدام است؟
۳ **۴** ۴ **۳** ۵ **۲** ۲ **۱**



۱۳۵ از شرایط a و $sign(a-2) = -1$ و $sign(a+1) = 1$ حدود a کدام است؟

\emptyset ④

$-1 < a < 2$ ③

$a < -1$ ②

$a > 2$ ①

۱۳۶ کمترین مقدار تابع $f(x) = \frac{[x]}{sign(-x)}$ با دامنه $\left\{ \frac{1}{4}, -\sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3} \right\}$ کدام است؟

-1 ④

-5 ③

-3 ②

0 ①





۵

آمار

صفحة	فهرست مطالب
۱۳۸	شافعی‌های آماری □
۱۳۹	سیری‌های زمانی □
۱۴۳	ویژه کنکور □
۱۵۹	تمرینات تشریمی و مختلف کتاب درسی □
۱۶۳	تمرین تست □

شاخص‌های آماری

در پایه‌ی دهم، چندین شاخص (معیار) آماری را دیده‌ایم، مانند میانه، میانگین، انحراف معیار و ...

می‌توان گفت:

شاخص آماری:

معیاری آماری است که تغییرات نسبی یک ویژگی از جامعه آماری را نشان می‌دهد.

توجه کنید:

شاخص‌ها در واقع تخمین‌هایی از پارامترهای جامعه بوده و توسط آماره‌های چندین نمونه‌ی انتخاب شده از جامعه برآورده می‌شوند. در این مبحث، چندین شاخص مهم مربوط به جوامع انسانی که به اقتصاد افراد یا خانواده‌های آن‌ها مرتبط هستند را بررسی خواهیم کرد.

اولین شاخص مرتبط با معیشت افراد یا خانوار:

فقر:

کمینه (کمترین) درآمدی است که برای زندگی یک نفر (یا یک خانواده) در یک ماه مورد نیاز است.

روش محاسبه:

اگر میانگین و میانه‌ی درآمد ماهانه‌ی افراد جامعه را داشته باشیم، دو روش زیر برای تعیین خط فقر وجود دارد:

(۱) نصف میانه

(۲) نصف میانگین

مثال: درآمد افراد جامعه‌ای بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:

۱,۱,۲,۱۸۰,۴,۵,۷,۹,۱۰,۱۱

خط فقر را به هر دو روش بیابید. کدام روش برای این جامعه بهتر و دقیق‌تر است؟

پاسخ

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+180+4+5+7+9+10+11}{10} = \frac{230}{10} = 23$$

میانگین پراپر است پا:

داده‌های مرتب شده: ۱,۱,۲,۴,۵,۷,۹,۱۰,۱۱,۱۸۰ و در نتیجه میانه پراپر است پا:

$$Q_2 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

خط قدر توسط میانگین پراپر $11 / 5 = 2.2$ میلیون تومان و توسط میانه پراپر 6 میلیون تومان خواهد بود.

توجه کنید:

در مثال قبل، چون داده‌ی دورافتاده‌ی ۱۸۰ وجود دارد، میانه مرکزیت داده‌ها را بهتر نشان داده و خط فقر بر جسب میانه (۳ میلیون) دقیق‌تر است.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

اگر درآمد ماهیانه ۹ نفر از افراد یک اداره (بر حسب میلیون تومان) به صورت زیر باشد، با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانه، چند نفر زیر خط فقر قرار دارند؟

ω, v, 10, λ, ω, ε, 10, 11, 1ω



داده‌های مرتب شده: ۱۵, ۱۱, ۱۰, ۱۰, ۸, ۷, ۶, ۵, ۵ پوده و میانه (داده‌ی وسط) پراپر است: پا:

$$Q_p = \lambda$$

پس خت فقر برابر $\frac{8}{\mu}$ میلیون تومان پوده و هیچ کس زیر خط فقر نیست.



مثال: درآمد کارکنان یک شرکت بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:

¶, ।, ॥, ॥, ॥, ॥, ॥, ॥, ॥

اگر خط فقر به روش میانگین برابر ۳ میلیون تومان باشد، مقدار x را حساب کنید.



$$\bar{x} = \frac{w+o+r+l+f+x+y+q+s+f}{10}$$

میانگین را حساب می کنیم:

نصف اپنے مقدار پاپد پر اپر ۳ پاسہ:

$$\frac{\omega^{\mu} + x}{\frac{1}{\mu}} = \mu \rightarrow \frac{\omega^{\mu} + x}{\mu^{-1}} = \mu \rightarrow \omega^{\mu} + x = \underbrace{\mu^{-1} \times \mu}_{=1} \Rightarrow x = 1 - \omega^{\mu} = \gamma$$



خط فقر بین المللی:

بانک جهانی، درآمد ۱/۲۵ دلار در روز برای هر فرد را خط فقر بین‌المللی اعلام کرده است.

توجه کنید:

مزیت تعیین خط فقر بین‌المللی این است که توسط آن می‌توان وضعیت فقر در کشورهای مختلف را با یکدیگر مقایسه کرد. ضمناً، ایراد این روش این است که به شرایط خاص اجتماعی، سیاسی و اقتصادی هر کشور توجه کافی نشده و ممکن است با واقعیت فقر در یک کشور خاص مطابقت نداشته باشد.

مثال: خانواده‌ای شش نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. درآمد ماهانه این خانواده به دلار باید

حداقل چقدر باشد تا آن‌ها زیر خط فقر نباشند؟



با توجه به خط فقر پیوندی این اندیشه، هر نفر پاید لااقل $5 / 37 = 35 \times 1 / 5$ (دلار) در ماه درآمد داشته باشد. چون شش نفر هستند:

$$6 \times 37 / 5 = 225 \quad (\text{دلار در ماه})$$



شاخص دیگری مرتبط با اقتصاد افراد یا خانوار:

شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی:

متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی افراد جامعه برای مجموعه‌ای بزرگ از کالاهای خوراکی و خدمات مورد نیاز آنها در طول یک سال است. این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

توجه کنید:

در کشور ما، این شاخص بر اساس متعدد هزینه‌ی حدود ۴۰۰ نوع کالای خوراکی، هزینه‌ی مسکن، پوشاسک و خدماتی چون سلامت، حمل و نقل و تحصیل محاسبه می‌شود.

(روش تعیین):

بعد از تعیین سبد هزینه‌ی خانوار (کالا یا خدمت به همراه مقدار آن)،

- مبلغ کل هزینه‌ی خانوار در سال پایه را حساب می‌کنیم.
- مبلغ کل هزینه‌ی خانوار در سال مورد نظر را حساب می‌کنیم.

در این صورت:

$$\text{شاخص بهای کالا و خدمات} = \frac{\text{مبلغ کل در سال مورد نظر}}{\text{مبلغ کل در سال پایه}} \times 100$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمات در طول یک سال را گویند.

(۱) شاخص توده بدنه

(۲) شاخص آموزش

(۳) شاخص خط فقر

(۴) شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی

پاسخ

موردنچهارم صحیح است.

مثال: (از کتاب)

سبد هزینه‌ی خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده است. فرض کنید قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال در هر کیلوگرم بوده و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال در هر کیلوگرم بررسد. اگر مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای نان و گوشت را در سال مورد نظر حساب می‌کنیم:

$$\frac{(۲۰۰ \times ۱۵۰۰) + (۸۰ \times ۷۰۰۰۰)}{(۲۰۰ \times ۱۰۰۰) + (۸۰ \times ۵۰۰۰۰)} \times ۱۰۰ = \frac{۳۰۰۰۰۰ + ۵۶۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰۰۰ + ۴۰۰۰۰۰} \times ۱۰۰ \\ = \frac{۵۹۰۰۰۰۰}{۴۲۰۰۰۰} \times ۱۰۰ = \frac{۵۹}{۴۲} \times ۱۰۰ = ۱/۴۰۵ \times ۱۰۰ = ۱۴۰/۵$$

شاخص بسیار مهم دیگری در یک جامعه‌ی انسانی:

تورم:

تغییر متوسط قیمت کالاهای خدمات در طول زمان را تورم گویند.

نرخ تورم:

این شاخص میزان تغییرات شاخص بهای کالاهای خدمات را نسبت به سال پایه با یک عدد درصدی نشان می‌دهد:

$$(\text{شاخص بهای در سال پایه}) - (\text{شاخص بهای در سال مورد نظر}) = \underline{\text{نرخ تورم}} \text{ (درصد)}$$

توجه کنید:

در حالت عادی، شاخص بهای در سال پایه برابر ۱۰۰ است.

مثال: فرض کنید گوشت و نان دو کالا باشند به طوری که قیمت آنها در سال جاری به ترتیب ۴۰۰۰۰ و ۴۰۰۰ تومان و در سال پایه به ترتیب ۳۰۰۰۰ و ۳۰۰۰ تومان باشد و مقدار مصرف نیز به ترتیب ۳۵ و ۱۲ کیلوگرم باشد.
 الف) شاخص بهای گوشت و نان را در سال جاری به دست آورید.
 ب) نرخ تورم را حساب کنید.

پاسخ

الف) شاخص بهای در سال چاری:

$$\frac{۳۰ \times ۴۰۰۰۰ + ۱۲ \times ۴۰۰۰}{۳۰ \times ۳۰۰۰۰ + ۱۲ \times ۳۰۰۰} \times ۱۰۰ = \frac{۳۰ \times ۴۰ + ۱۲ \times ۴}{۳۰ \times ۳۰ + ۱۲ \times ۳} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲۴۸}{۹۳۶} \times ۱۰۰ \\ = \frac{۲۰۶}{۱۵۶} \times ۱۰۰ = ۱/۳۲ \times ۱۰۰ = ۱۳۲$$

ب) نرخ تورم برابر است پا:

$$132 - 100 = 32\%$$

مثال: اگر بهای نان در سال ۹۹ برابر ۱۰ و نرخ تورم در سال ۹۹ نسبت به سال ۹۷ برابر ۲۰ درصد باشد، بهای نان در سال ۹۷ را بیابید.

پاسخ

اگر پهای نان در سال ۹۷ را x بگیرید، شاخص بهای در سال ۹۹ برابر است پا:

$$\frac{10}{x} \times 100$$

چون تورم ۵ درصد است، باید:

$$\frac{10}{x} \times 100 - 100 = 20 \rightarrow \rightarrow \frac{100}{x} = 120 \rightarrow 120x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{120} = \frac{100}{12} = 8\text{ میلیون}$$



توجه کنید:

اگر شاخص بهای کالا در سال پایه ۱۰۰ نباشد، نرخ تورم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{b-a}{a} \times 100 \quad \text{نرخ تورم (درصد)}$$

که در آن a شاخص بهای کالا در سال پایه و b شاخص بهای کالا در سال مورد نظر است.
(اگر $a = 100$ باشد، فرمول بالا به همان فرمول قبلی تبدیل خواهد شد.)

مثال: تورم قیمت کالایی از سال ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۱ برابر ۵۰ درصد و شاخص بهای این کالا در سال ۱۴۰۱ برابر ۱۷۰ است. شاخص بهای کالا در سال ۱۴۰۰ را بیابید.

پاسخ

اگر شاخص مورد نظر را x نشان دهیم، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{170-x}{x} \times 100 &= 50 \xrightarrow{\times x} 100 \times (170-x) = 50x \xrightarrow{+50x} 2(170-x) = x \\ &\rightarrow 340 - 2x = x \rightarrow 340 = 3x \Rightarrow x = \frac{340}{3} \equiv 113.\overline{3} \end{aligned}$$



شاخص دیگری در جامعه:

نرخ بیکاری:

از تقسیم تعداد افراد بیکار بر تعداد افراد فعال حاصل می‌شود.

$$[(\text{تعداد افراد فعال}) \div (\text{تعداد افراد بیکار})] = \text{نرخ بیکاری (درصد)}$$

توجه کنید:

- به فردی بالای ۱۶ سال که به طور موقت بیکار شده، یا در جستجوی شغل باشد یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخصی باشد، بیکار گفته می‌شود.
- به مجموعه‌ی کل افراد بیکار و افرادی که مشغول به کار هستند، فعال گفته می‌شود. پس:

$$\text{تعداد افراد بیکار} + \text{تعداد افراد شاغل} = \text{تعداد افراد فعال}$$



مثال: در یک کشور نرخ بیکاری ۱۵ درصد است. اگر جمعیت فعال این کشور ۲۰ میلیون نفر باشد، تعداد بیکاران و سپس تعداد شاغلین را محاسبه کنید.

پاسخ

اگر تعداد افراد بیکار را پر حسب میلیون نفر x پگیریم، باید:

$$15 = \frac{x}{20} \times 100 \rightarrow 15 = 5x \Rightarrow x = \frac{15}{5} = 3 \quad (\text{میلیون نفر})$$

اکنون تعداد شاغلین قابل تعیین است:

$$20 - 3 = 17 \quad (\text{میلیون نفر})$$



مثال: در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد شانزده ساله و بیشتر، شاغل هستند. در این منطقه ۲۰۰ نفر شانزده ساله و بیشتر جویای کار میباشند.

- الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است?
ب) چند شغل در این منطقه ایجاد شود تا نرخ بیکاری در آن برابر ۵ درصد شود؟

پاسخ

الف) تعداد افراد قابل پردازش $= 1400 + 200 = 1600$ نفر است و در نتیجه:

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{200}{1400} \times 100 = \frac{1}{7} \times 100 = 14\%$$

ب) تعداد مورد نظر را x پگیرید. در این صورت تعداد افراد بیکار $x - 200$ خواهد شد و پاید نرخ بیکاری به ۵ درصد تبدیل شود:

$$\frac{200-x}{1400} \times 100 = 5 \rightarrow \frac{200-x}{14} = 5 \rightarrow 200-x = \underbrace{14 \times 5}_{=70} \rightarrow -x = 70 - 200 = -130 \Rightarrow x = \frac{-130}{-1} = 130$$



مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

در یک منطقه ۱۸۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل هستند. در این منطقه ۱۴۰۰ نفر بالای ۱۶ سال و بیشتر جویای کار میباشند.

- الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است?
ب) حداقل چند شغل ایجاد شود تا نرخ بیکاری در این منطقه کمتر از ۳ درصد باشد.

پاسخ

الف) کاملاً تکرار مثال قبل است:

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{400}{2200} \times 100 = \frac{2}{11} \times 100 \approx 18\%$$

ب) تعداد مورد نظر را x پگیرید. در این صورت تعداد افراد بیکار $x - 400$ خواهد شد و پاید نرخ بیکاری کمتر از ۳ درصد شود:

$$\frac{400-x}{2200} \times 100 < 3 \rightarrow \frac{400-x}{22} < 3 \rightarrow 400-x < 66 \Rightarrow \underbrace{400-66}_{334} < x$$

پس لازم است حداقل ۳۳۵ شغل ایجاد شود.



شاخص دیگری وجود دارد که میزان سهولت در درک متن را از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت قواعد نگارش (درجهٔ خوانایی متن) مشخص می‌کند.

شاخص پایه آموزش:

این شاخص برای هر متن به صورت زیر تعریف و محاسبه می‌شود:

$$\text{شاخص پایه آموزش} = \frac{\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله}}{\text{درصد کلمات «دشوار»}} \times ۱۰$$

بعد از محاسبه، جواب را به نزدیک‌ترین عدد طبیعی تبدیل می‌کنیم. (به روش گرد کردن)

(توسط روش فوق، عددی طبیعی از ۱ تا ۱۲ حاصل می‌شود که نشان دهندهٔ پایهٔ تحصیلی مربوط به آن متن یا کتاب است.)

توجه کنید:

منظور از کلمات دشوار، کلمات دو هجایی (دو بخشی) بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات است.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

برای کتابی با متوسط طول جملات ده کلمه‌ای و ۱۷ درصد کلمات سخت:

الف) شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید.

ب) این کتاب مناسب چه پایه‌ای است؟

پاسخ

محاسبهٔ شاخص طبق روش بالا:

$$(۱۷+۱۰) \times ۰/۱۰ = ۲۷ \times ۰/۱۰ = ۱۰/۸ \approx ۱۱$$

پس کتاب مناسب پایهٔ یازدهم است.



سری‌های زمانی

۳

برخی از متغیرها در طول زمان تناوب، یعنی رفتاری تا حدود زیادی تکراری دارند. شناخت الگوی رفتار و تکرار آنها، باعث می‌شود شناخت بهتری از این متغیرها داشته باشیم و امکان پیش‌بینی نسبتاً دقیقی از متغیر در آینده برای ما فراهم شود.

سری زمانی:

مجموعه‌ی داده‌ای که در طول زمان با فاصله‌های منظم گردآوری می‌شوند.

توجه کنید:

اگر روی محور افقی «زمان» و روی محور عمودی «مقادیر مشاهده شده» (یعنی: داده‌ها) را مشخص کرده و نمودار پراکنش نگاشت داده‌ها را توسط پاره خط‌هایی رسم کنیم، نمودار آن سری زمانی حاصل می‌شود.

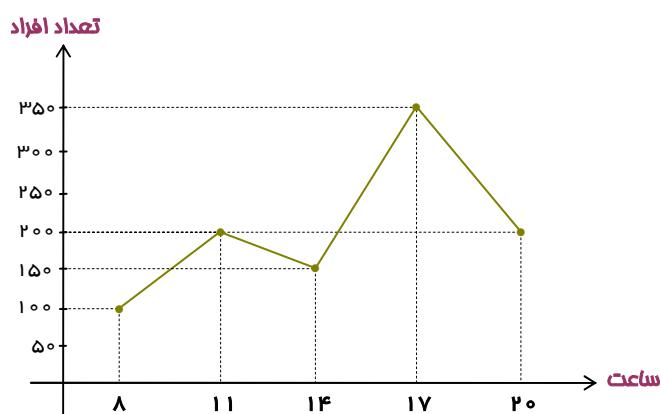
مثال: تعداد مراجعان به یک مرکز خرید بین ساعت ۸ تا ۲۰ طبق جدول زیر است:

ساعت	۸	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰
تعداد مشتری	۱۰۰	۲۰۰	۱۵۰	۳۵۰	۲۰۰

نمودار سری زمانی مربوطه را رسم کنید.

پاسخ

نقاط مربوطه‌ی (۸, ۱۰۰)، (۱۱, ۲۰۰)، (۱۴, ۱۵۰) و (۲۰, ۲۰۰) را در یک دستگاه مشخص کرده و آن‌ها را به هم متصل می‌کنیم:



در ادامه، توسط سری زمانی یا نمودار آن، به دو روش زیر مقادیری از متغیر را تخمین زده یا پیش‌بینی می‌کنیم:

برونیابی و درونیابی

درونیابی:

تخمین مقادیر بین داده‌های ثبت شده است.

(چنان‌که خواهیم دید، درونیابی و بروندیابی به روش خطی انجام خواهد شد. روش انجام هر دو در ادامه ...)

برای انجام درونیابی یا بروندیابی به نوشتن معادله‌ی خط نیاز است، ببینید:

پادآوری:

معادله‌یک خط توسط شیب m و مختصات یک نقطه‌ی (x_1, y_1) روی آن نوشته می‌شود:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

بنابراین:

وقتی مختصات دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از یک خط را داریم، ابتدا $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ را مشخص کرده و بعد توسط

مختصات یکی از دو نقطه به دلخواه، معادله را می‌نویسیم.

مثال: معادله‌ی خط گذرا از نقاط $(-2, 5)$ و $(\frac{5}{2}, -3)$ را بنویسید.

پاسخ

$$m = \frac{-\frac{5}{2} - 5}{\frac{5}{2} - (-2)} = \frac{-\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = -\frac{5}{3}$$

شیب برابر است با؛ معادله:

$$y - 5 = -\frac{5}{3}(x + 2) \rightarrow y = -\frac{5}{3}x - 10 + 5 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x - 5$$



مثال: تعداد مشتری‌ها در یک مرکز خرید بین ساعت ۸ تا ۱۶ به صورت زیر داده شده است:

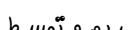
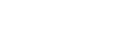
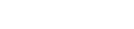
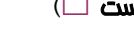
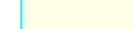
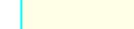
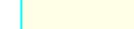
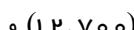
ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
تعداد مشتری	۳۰۰	۶۵۰	۷۰۰	۴۰۰	۲۰۰

الف) نمودار سری زمانی رارسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، تعداد مشتری این فروشگاه را در ساعت ۱۳ تخمین بزنید. (به روش درونیابی)

پاسخ

الف) نمودار مشابه قبیل در دستگاه رسم می‌شود. (به عهده‌ی دانش آموخته عذریم).



خطای تخمین:

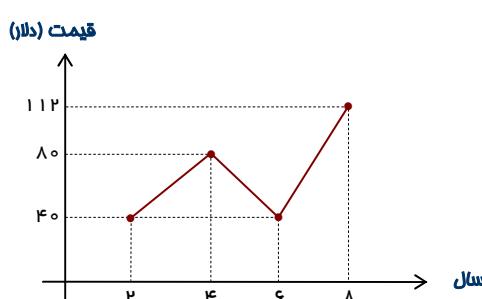
وقتی مقداری را توسط درونیابی یا بروندیابی تخمین می‌زنیم، اگر از مقدار واقعی اطلاع داشته باشیم، خطای تخمین را با e نشان داده و به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$e = | \text{مقدار تخمین} - \text{مقدار واقعی} |$$

برای نمونه:

اگر توسط درونیابی یا بروندیابی به عدد $5/245$ برسمیم و به طریقی مطلع شویم که مقدار واقعی 243 بوده است، خطای برابر می‌شود با:

$$e = | 243 - 245/5 | = | -2/5 | = 2/5$$



مثال: با توجه به نمودار سری زمانی روبرو:

الف) قیمت کالا را در سال سوم تخمین بزنید.

ب) قیمت کالا را در سال دهم تخمین بزنید.

پ) اگر قیمت واقعی در سال‌های سوم و دهم به ترتیب 70 و 130 دلار باشد، خطای تخمین‌های خود را حساب کنید.

پاسخ

الف) طبق درونیابی:

معادله خط گذرا از نقاط $(2, 40)$ و $(4, 80)$ را نوشته و عدد 3 را جایگزین می‌کنیم:

$$m = \frac{80 - 40}{4 - 2} = \frac{40}{2} = 20 \rightarrow y - 40 = 20(x - 2) \rightarrow y = 20x \xrightarrow{x=3} 20 \times 3 = 60$$

ب) طبق پرونیابی:

به روشن گفته شده، توسط تمام نقاط $(2, 40)$ ، $(4, 80)$ و $(6, 12)$ ، یک نقطه مشخص می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{40+80+12+112}{4} = \frac{272}{4} = 68$$

نقطه‌ی $(5, 68)$ حاصل شد؛ چون سال دهم به سال 8 در جدول نزدیک است، په کمک $(8, 112)$ و $(5, 68)$ معادله خط می‌نویسیم:

$$m = \frac{112 - 68}{8 - 5} = \frac{44}{3} \approx 15 \rightarrow y - 68 = 15(x - 5) \Rightarrow y = 15x - 7$$

اکنون $x = 10$ را جایگزین می‌کنیم:

$$y = 15 \times (10) - 7 = 143 \quad (\text{تخمین قیمت در سال دهم})$$

پ) خطای درونیابی پراپر $= 10 - 70 - 60 = 10 - 143 = -133$ (سنت).



ویژه آمادگی کنکور



در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای سلطه بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف نظر کنید!

در ابتدا، نمونه تست‌ها و برخی نکات مرتبط با خط فقر را می‌آوریم.

درآمد افراد یک جامعه به صورت مرتب شده از کوچک به بزرگ در زیر آمده است. اگر خط فقر به روش میانگین $1/05$ میلیون تومان باشد، خط فقر به روش میانه چند میلیون تومان است؟

$$0/8, 0/9, 1/6, m, n, 2/9, 3/5, 3/7$$

۰/۸۵ ④

۰/۹ ③

۰/۹۵ ②

۱ ①

گزینه ۲

پاید میانگین پراپر $1/05 = 2 \times 1/05 = 2$ پاسد. پس:

$$\frac{0/8 + 0/9 + 1/6 + m + n + 2/9 + 3/5 + 3/7}{8} = 2/1 \rightarrow 13/4 + m + n = 8 \times 2/1 = 16/8$$

$$\Rightarrow m + n = 16/8 - 13/4 = 3/4$$

$$\text{چون } \frac{8+1}{5} = 14/5 \text{ (است، میانه توسط داده‌های چهارم و پنجم حساب می‌شود)}$$

$$Q_r = \frac{m+n}{2} = \frac{3/4}{2} = 1/7 \rightarrow Q_r = \frac{1/7}{2} = 0/85 \text{ میلیون تومان}$$



با توجه به جدول زیر، اگر بخواهیم به افرادی که پایین‌تر از خط فقر (بر حسب میانه) قرار دارند، یارانه پرداخت کنیم، به چند نفر یارانه تعلق می‌گیرد؟

درآمد ماهانه (هزار تومان)	تعداد اعضا فانداز
۳	۱۴۰۰
۴	۵۴۰۰
۲	۲۰۰۰
۵	۷۵۰۰
۶	۲۶۰۰

- ۰ ①
- ۳ ②
- ۹ ③
- ۶ ④

گزینه ۱

برای تعیین خط ققدر بر حسب میانه، درآمد هر یک از ۱۶ نفر را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۲۶۰۰}{۲} = ۱۳۰۰, \frac{۷۵۰۰}{۵} = ۱۵۰۰, \frac{۲۰۰۰}{۲} = ۱۰۰۰, \frac{۵۲۰۰}{۴} = ۱۳۰۰, \frac{۱۴۳۰۰}{۳} = ۱۴۰۰$$

۱۰۰۰ نفر، ۱۵۰۰ نفر، ۱۴۰۰ نفر، ۶ نفر، ۳ نفر، ۱۳۰۰ نفر، ۲ نفر، ۱۵۰۰ نفر

درآمدها په ترتیب از چپ:





$$\text{چون } \frac{1300+1400}{2} = 1350 \text{ (سنت، میانه توسط داده‌های هشتم و نهم، یعنی ۱۳۵۰) و در نتیجه خط فقر پر ابر } \frac{16+1}{2} = 8 \text{ می‌باشد.}$$

$$\text{چون } \frac{1350}{2} = 675 \text{ (سنت، میانگین داده‌ها) همچنان که هیچ فردی درآمد کمتر از خط فقر ندارد.}$$



با توجه به جدول زیر، خط فقر بر حسب میانه از خط فقر بر حسب میانگین ...

درآمد ماهانه (هزار تومان)		تعداد اعضا خانوار
۱	۴۰۰۰	
۲	۳۵۰۰	
۳	۳۰۰۰	
۴	۲۸۰۰	
۵	۱۰۰۰۰	
۶	۶۰۰۰	

۱ تقریباً ۷۱ هزار تومان کمتر است.

۲ تقریباً ۱۴۲ هزار تومان کمتر است.

۳ تقریباً ۱۴۲ هزار تومان بیشتر است.

۴ تقریباً ۷۱ هزار تومان بیشتر است.

گزینه ۱

تعداد اعضا چندول ۱ نفر و جمیع درآمد کل خانواده‌ها ۲۸۲۰۰ هزار تومان (سنت، میانگین درآمد هر نفر):

$$\bar{x} = \frac{28200}{21} \rightarrow \bar{x} = \frac{28200}{2} = 142 \text{ هزار تومان} \quad \text{خط فقر} = \frac{28200}{42} = 671$$

برای تعیین خط فقر پر حسب میانه، درآمد هر یک از افراد را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{6000}{6} = 1000 \quad \frac{10000}{5} = 2000 \quad \frac{14800}{4} = 3700 \quad \frac{3000}{3} = 1000 \quad \frac{2400}{2} = 1200 \quad \frac{2000}{1} = 2000$$

درآمدها په ترتیب از پیوست: ۱۰۰۰، ۱۴۰۰، ۲۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۷۰۰، ۶۰۰۰

$$\text{چون } \frac{21+1}{2} = 11 \text{ (سنت، میانه پر ابر داده‌ی یازدهم: ۱۲۰۰ و در نتیجه خط فقر پر ابر } \frac{1200}{2} = 600 \text{ (سنت. پس خط فقر پر حسب میانه، از خط فقر پر حسب میانگین کمتر است:}$$

$$671 - 600 = 71$$



اگر درآمد افراد یک جامعه چهار برابر شود، مقادیر خط فقر با استفاده از میانگین (a) و خط فقر با استفاده از میانه (b) چه تغییری می‌کند؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱ a و b دو برابر می‌شوند.

۲ a و b چهار برابر می‌شوند.

۳ a دو برابر و b چهار برابر می‌شود.

۴ a چهار برابر و b دو برابر می‌شود.

گزینه ۲

طبق خواص میانگین و میانه هنگام تغییر داده‌ها، واضح است: با چهار برابر شدن داده‌ها، میانگین و میانه نیز برابر شده و در نتیجه نصف‌های آنها نیز چهار برابر خواهند شد.



نکته ۱

تعیین مناسب خط فقر:

چون میانگین معمولاً مرکزیت داده‌ها را بهتر نشان می‌دهد، تعیین خط فقر توسط میانگین برتری نسبی دارد.

ولی:

اگر در بین داده‌ها، داده‌ی دورافتاده داشته باشیم، میانه مرکزیت داده‌ها را دقیق‌تر نشان داده و خط فقر باید توسط میانه تعیین شود.

در یک جامعه‌ی آماری، درآمد افراد بر حسب میلیون تومان عبارتند از: ۳,۴,۵,۶,۸ و در جامعه‌ی دیگر درآمد افراد بر حسب میلیون تومان عبارتند از: ۱,۱,۲,۳,۴,۷,۰. در هر جامعه، خط فقر را به روش مناسب حساب می‌کنیم. اختلاف این دو خط فقر چقدر است؟

۲/۲۵ ④

۲ ③

۱/۲۵ ②

۱ ①

گزینه ۲

در جامعه‌ی اول:

$$\bar{x} = \frac{۳+۵}{۶} = ۴ \rightarrow \text{خط فقر} = \frac{\bar{x}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

در جامعه‌ی دوم، داده‌ی دورافتاده ۷ وجود داشته و پنایر این پاید میانه پکار رود:

$$Q_3 = \frac{۲+۳}{۲} = ۲.۵ \rightarrow \frac{Q_3}{\bar{x}} = \frac{۲.۵}{۴} = ۱/۲۵$$

اختلاف این دو مقدار $۱/۲۵ - ۲ = ۱/۵$ است.

در یک نمونه‌ی تصادفی از کارکنان یک شرکت، میانه و میانگین درآمد ماهیانه‌ی آنان به ترتیب ۲۵۰ و ۳۰۰ واحد پول است. اگر سه نفر آنان درآمد بسیار بالایی داشته باشند، خط فقر کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۹)

۲۵۰ ④

۱۸۳ ③

۱۵۳ ②

۱۲۵ ①

گزینه ۱

سه نفر درآمد بسیار بالا، یعنی داده‌های مربوطه دورافتاده هستند و در نتیجه پاید میانه را پکار پیدایم:

$$\frac{Q_3}{\bar{x}} = \frac{۲۵۰}{۳۰۰} = ۱/۳$$



درآمد هفتگی افرادی در جامعه $\frac{۲}{۸}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۷}, \frac{۶}{۵}, \frac{۹}{۴}, \frac{۹}{۵}, \frac{۹}{۴}, \frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ (برحسب میلیون تومان) است. حداکثر مقدار $m+n$ برای آن که به روش میانه فقط دو نفر زیر خط فقر قرار گیرند، کدام است؟

۴ ④

۲/۸ ③

۳/۶ ②

۴/۸ ①



پسون دو داده‌ی m و n که نامعلوم هستند، داده‌ها را مرتب می‌نویسیم:
 $0/7, 0/9, 1, 1/4, 2/4, 2/8, 3/5, 4/2, 4/9$

پس پاید $7/0$ و $9/0$ زیر مخط قدر پوده ولی ۱ چنین نباشد. یعنی:

$$0/9 < \frac{Q_1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1/8 < Q_1 \leq 2$$

پس این که پیشترین $m+n$ حاصل شود، m و n را پیشترین مقادیر قرار می‌دهیم:
 $0/7, 0/9, 1, 1/4, 2/4, 2/8, 3/5, 4/2, 4/9$
 $m \quad n$

چواب $2+2=4$ است.



نمونه‌هایی مرتبط با شاخص بهای کالا و خدمات و تورم ببینید:

اگر سبد هزینه‌ی خانواری در سال پایه از دو کالای نان و مرغ تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب 500 و 4000 تومان و مقدار مصرف یک خانواده در سال به ترتیب برابر 55 و 200 کیلوگرم و قیمت این کالاهای در سال مورد نظر به 600 و 6000 تومان رسیده باشد، تورم در سال مورد نظر چند درصد می‌باشد؟

۱۴۹ ④

۱۴۹ ③

۱۳۷ ②

۳۷ ۱

شاخص پها در سال چدید:

$$\frac{50 \times 600 + 200 \times 6000}{50 \times 500 + 200 \times 4000} \times 100 = \frac{5 \times 6 + 2 \times 600}{5 \times 5 + 2 \times 400} \times 100 = \frac{1230}{825} \times 100 \approx 149$$

اکنون پاید شاخص پها در سال پایه که 100 است را از عدد بالا کم کنیم:

$$\text{درصد } 149 - 100 = 49$$

توجه کنید:

همان‌طور که در ساده کردن کسر بالا و برخی نمونه‌های بعدی می‌بینید، می‌توانید تعداد صفرهایی یکسان از تمام عامل‌های جمع (مانند 50×600 و 200×4000) را حذف کنید تا محاسبات سریع‌تر انجام شود.



قیمت برنج و گوشت در سال پایه به ترتیب 42 و $5/5$ هزار تومان و در سال مورد نظر به ترتیب 120 و 240 هزار تومان است. اگر شاخص بهای برنج و گوشت در سال مورد نظر 240 و مقادیر مصرفی برنج و گوشت به ترتیب a و 16 کیلوگرم باشد، مقدار a چند کیلوگرم است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

۷۵ ۴

۶۴ ۳

۵۰ ۲

۴۸ ۱

طبق اطلاعات داده شده:

$$\begin{aligned} \frac{a \times 120 + 16 \times 240}{a \times 42 + 16 \times 137 / 5} \times 100 &= 140 \rightarrow \frac{120a + 3840}{42a + 2200} \times 10 = \frac{14}{1} \\ \rightarrow 10(120a + 3840) &= 14(42a + 2200) \rightarrow 1200a + 38400 = 1008a + 52800 \\ \rightarrow 192a &= 14400 \Rightarrow a = \frac{14400}{192} = 75 \end{aligned}$$



قیمت نان در سال ۹۶ از قیمت آن در سال پایه، ۸۰ درصد بیشتر بوده است. شاخص قیمت نان در سال ۹۶ چقدر بوده است؟

۱۸۰ ۴

۱۶۴ ۳

۱۲۰ ۲

۸۰ ۱

کلینه ۴

اگر شاخص پهای نان در سال ۹۶ را x بگیریم، پاید:

$$x - 100 = 80 \Rightarrow x = 80 + 100 = 180$$



اگر سبد هزینه خانواری شامل نان، برنج و گوشت باشد و میزان مصرف نان این خانواده، ۴ برابر مصرف گوشت و میزان مصرف برنج آنها، $\frac{1}{5}$ برابر مصرف نان باشد، در صورتی که قیمت نان و گوشت و برنج در سال پایه به ترتیب ۵۰۰۰، ۲۲۰۰۰ و ۶۰۰۰ و در سال مورد نظر به ترتیب برابر ۱۰۰۰، ۱۴۱۶۰۰ و ۸۵۰۰ تومان باشد، شاخص بهای این سه کالا در سال مورد نظر کدام است؟

۱۷۲ ۴

۱۶۱ ۳

۱۵۶ ۲

۱۳۸ ۱

کلینه ۳

اگر میزان مصرف گوشت را x بگیرید، مصرف نان $4x$ و مصرف برنج $\frac{1}{5}x$ پوده است، پس شاخص پهای برابر است پا:

$$\begin{aligned} \frac{4x \times 1000 + x \times 141600 + \frac{1}{5}x \times 85000}{4x \times 5000 + x \times 22000 + \frac{1}{5}x \times 60000} \times 100 &= \frac{4x \times 10 + x \times 1416 + \frac{1}{5}x \times 85}{4x \times 5 + x \times 220 + \frac{1}{5}x \times 60} \times 100 \\ &= \frac{x(40 + 1416 + 170)}{x(20 + 220 + 36)} \times 100 = \frac{956}{600} \times 100 = \frac{956}{6} = 161 \end{aligned}$$



اگر در شاخص بهای کالا، واحد اندازه‌گیری دو برابر شود، آنگاه تغییرات مقدار این شاخص کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۹)

۴ نصف می‌شود.

۳ قابل پیش‌بینی نیست.

۲ دو برابر می‌شود.

۱ تغییر نمی‌کند.

کلینه ۱

چون هم قیمت‌ها در صورت کسر و هم در مخرج دو برابر می‌شوند، پا فاکتور کیمی از عدد ۲ در صورت و مخرج (دقیقاً مانند فاکتور کیمی از x در پاسخ تسبیح قبیل)، بعد از ساده کردن ۲ در صورت و مخرج، شاخص پا قیمت‌های قبیل و په صورت یکسان حاصل می‌شود.
نتیجه:

اگر قیمت‌ها از تومان به ریال یا بر عکس تبدیل شوند، در شاخص بهای و تورم، تغییری ایجاد نمی‌شود!



توجه کنید:

در حالت عادی، شاخص بها در سال پایه ۱۰۰ است و در نتیجه رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\text{درصد تورم} = \frac{\text{شاخص بها در سال مجدید}}{\text{شاخص بها در سال پایه}} - 100$$

اگر سبد کالای خانواده‌ای از سه کالای A، B و C تشکیل شده باشد و قیمت کالاهای ۹۶ و ۹۷ مطابق جدول زیر باشد، x چقدر باشد که تورم این کالاهای با هم در سال ۹۷ نسبت به سال پایه ۹۶ برابر ۲۰ درصد باشد؟ (مقادیر مصرف کالاهای A، B و C در سال به ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۴۰ کیلوگرم است).

کالا	قیمت (سال ۹۶)	قیمت (سال ۹۷)
A	۱۲۰۰۰	۱۸۰۰۰
B	۸۰۰۰	x
C	۱۰۰۰۰	۱۱۰۰۰

- ۱ ۹۲۴۰
۲ ۹۶۰۰
۳ ۸۹۶۰
۴ ۱۰۳۲۰

کزینه ۳

طبق مطلب قبل، پاید شاخص پها در سال ۹۷ پراپر $120 = \frac{100 + \text{درصد پاشد}}{100}$:

$$\frac{20 \times 18000 + 50 \times x + 40 \times 11000}{20 \times 12000 + 50 \times 8000 + 40 \times 10000} \times 100 = 120$$

$$\frac{2 \times 18000 + 5x + 4 \times 11000}{2 \times 12000 + 5 \times 8000 + 4 \times 10000} \times 100 = 120$$

$$\frac{36000 + 5x + 44000}{2 \times 12000 + 5 \times 8000 + 4 \times 10000} = 120 \rightarrow \frac{80000 + 5x}{104000} = 120$$

$$\rightarrow 80000 + 5x = 124800 \rightarrow 5x = 44800 \Rightarrow x = \frac{44800}{5} = 8960$$

----- ♦ -----

نمونه‌هایی مرتبط با شاخص بیکاری را در ادامه ببینید:

در یک جامعه از بین جمعیت فعال آن، تعداد بیکاران ۷ میلیون نفر و تعداد افراد شاغل ۱۳ میلیون نفر هستند. نرخ بیکاری در این جامعه چند درصد است؟

۱۷ ④

۱۲ ③

۳۵ ②

۳۳ ①

کزینه ۴

چون جمعیت فعال $20 = 13 + 7$ میلیون نفر است:

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{7}{20} \times 100 = 7 \times 5 = 35\%$$

----- ♦ -----



در یک کشور، جمعیت شاغل دو برابر جمعیت بیکار است. اگر جمعیت فعال این کشور ۱۲۰ میلیون نفر باشد، نرخ بیکاری تقریباً چند درصد است؟

۲۸ ④

۳۰ ③

۳۳/۳ ②

۴۰ ۳ ①

کزینه ۴

اگر جمعیت بیکار را x پگیریم، جمعیت شاغل $2x$ است و پاید:

$$x + 2x = 120 \rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \text{ (میلیون نفر)}$$

در نتیجه نرخ بیکاری پرایبر است بـ:

$$\frac{40}{120} \times 100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$$



۲۰ درصد از جمعیت ۵۰ میلیونی یک کشور کمتر از ۱۶ سال سن دارند. اگر ۷۰ درصد از افراد بالای ۱۶ سال در این کشور دارای تحصیلات دانشگاهی و نرخ بیکاری در این کشور ۲۵ درصد و تعداد بیکاران با تحصیلات دانشگاهی $1/5$ برابر تعداد بیکاران فاقد تحصیلات دانشگاهی باشد، نرخ بیکاری تحصیل کردگان دانشگاهی چند درصد است؟

۲۱/۴ ④

۲۶/۳ ③

۳۳/۳ ②

۲۵ ۱ ①

کزینه ۵

پاید ۸ درصد جمعیت کشور، ۱۶ سال یا پیشتر داشته باشند:

$$\frac{8}{100} \times 50 = 8 \times 5 = 40 \text{ میلیون نفر (تعداد افراد فعال)}$$

چون نرخ بیکاری ۲۵ درصد است، می‌توان تعداد افراد بیکار را حساب کرد:

$$\frac{x}{40} \times 100 = 25 \rightarrow x = 100 \times \frac{25}{40} = 25 \text{ میلیون نفر (تعداد افراد بیکار)}$$

اگر تعداد بیکاران فاقد تحصیلات a باشد، تعداد تحصیل کردگان بیکار $a/5$ است:

$$a + a/5 = 25 \rightarrow 2/5 a = 25 \Rightarrow a = \frac{25 \times 5}{2} = 125 \text{ میلیون نفر}$$

پس $125 - 25 = 100$ میلیون نفر تحصیل کردگی بیکار داریم و چون تعداد کل آنها 125 است، نرخ بیکاری آنها می‌شود:

$$\frac{6}{28} \times 100 = \frac{600}{28} = 21\frac{3}{7}\%$$



در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم شود، نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟ (نویت ۲-کنکور ۱۴۰۲)

۲۵۰ ④

۱۷۵ ③

۱۲۵ ②

۵۰ ۱ ①

کزینه ۳

چون n نفر معادل $\frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۵}$ از تعداد پیکاران است، تعداد پیکاران $۵n$ نفر پوده است، پا توجه به کاهش ۵ درصدی پیکاری:

$$\frac{n}{۱۵۰۰} = \frac{۵}{۱۰۰} \rightarrow n = \frac{۱۵۰۰ \times ۵}{۱۰۰} = ۷۵ \Rightarrow ۵n = ۳۷۵ \quad (\text{نفر})$$

یعنی ۳۷۵ نفر پیکار پوده‌اند و آنکه باید با این عدد، تعداد پیکاران ۳۰۰ نفر شده است، آنکه x شغل دیگر ایجاد می‌کنند ۵

$$\text{ندرخ پیکاری} = \frac{۱}{۳} - ۱ \text{ ندرخ پیکاری اولیه شود:}$$

$$\frac{۳۰۰-x}{۱۵۰۰} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۳۷۵}{۱۵۰۰} \rightarrow ۳۰۰-x=۱۲۵ \Rightarrow x=۳۰۰-۱۲۵=۱۷۵ \quad (\text{نفر})$$



به یادآوری شاخص توده‌ی بدنی (نماتوب) و نمونه تست‌هایی از آن توجه کنید.

نکته ۲

نماتوب یا BMI

این شاخص برای هر شخص با توجه به وزن و اندازه‌ی قد او، چنین محاسبه می‌شود:

$$BMI = \frac{\text{وزن پر مسیب کیلوگرم}}{\text{مقدار قد پر مسیب متر}}$$

بعد از محاسبه‌ی این عدد، مطلوب بودن یا نبودن وزن شخص مشخص می‌شود:

$BMI < ۱۹$ یعنی: شخص کمیود وزن دارد.
 $BMI \geq ۳۰$ یعنی: شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد.
 $۱۹ \leq BMI < ۲۵$ یعنی: شخص در محدوده‌ی سلامت وزنی است.
 $۲۵ \leq BMI < ۳۰$ یعنی: شخص اضافه وزن دارد.

به یاد داشته باشید:

- باید $BMI = ۱۹$ یا بیشتر از ۱۹، ولی کمتر از ۲۵ باشد، تا شخص دارای سلامت وزنی باشد.
- اگر BMI کمتر از ۱۹ باشد، شخص کمیود وزن دارد.
- اگر BMI برابر ۲۵ یا بیشتر باشد، شخص اضافه وزن دارد.

بعلاوه:

در محدوده‌ی سلامت وزنی، با توجه به سن شخص، عده‌های مناسب و ایده‌آل زیر بیان شده است:

گروه سنی	نماتوب
۱۹_۲۴	۲۲
۲۵_۳۴	۲۳
۳۵_۴۴	۲۴
۴۵_۵۴	۲۵

(نیاز به حفظ کردن جدول نیست!)

وزن مطلوب شخصی با قد ۲۰۰ سانتی‌متر و شاخص توده‌ی بدنی ۳۴، چقدر باید باشد؟

۱۲۰ ④

۸۰ ③

۹۶ ②

۴۸ ①

گزینه ۴



اندازه‌ی قد پر حسب متر پرایبر $\frac{300}{100} = 3$ متر است. اگر وزن مطلوب را با x نشان دهیم، پاید:

$$\frac{x}{3} = 3 \rightarrow \frac{x}{4} = 3 \Rightarrow x = 4 \times 3 = 12 \text{ کیلوگرم}$$



با توجه به جدول زیر، اگر بدنای نمایوب (BMI) علی نسبت به نمایوب ایده‌آل سن او ۲ واحد اختلاف دارد و همچنین قد او ۲۰۵ سانتی‌متر باشد، مقدار وزن علی در حال حاضر چند کیلوگرم است؟ (علی ۲۸ ساله است و کمبود وزن دارد).

گروه سنی	۱۹-۲۴	۲۵-۳۴	۳۵-۴۴	۴۵-۵۴	۵۵-۶۴
نمایوب ایده‌آل	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶

۹۴ ④

۹۰ ③

۱۰۰ ②

۸۴ ۱

کلیله ۱

پرای سن ۲۸، نمایوب ایده‌آل ۲۳ است و در نتیجه نمایوب علی پاید $23 - 2 = 21$ باشد. چون قد او ۲ متر است:

$$\frac{x}{3} = 21 \rightarrow \frac{x}{4} = 21 \Rightarrow x = 4 \times 21 = 84 \text{ کیلوگرم}$$



توسط شاخص بعدی می‌توان پایه‌ی (سطح) آموزشی یک متن یا کتاب انگلیسی را مشخص کرد. در واقع این شاخص، میزان سهولت در ک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت قواعد نگارش (درجه‌ی خوانایی متن) را مشخص می‌کند.

نکته ۳

شاخص پایه آموزش:

این شاخص برای هر متن به صورت زیر تعریف و محاسبه می‌شود:

$\frac{۱}{۵} \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دشوار»}) = \text{شاخص پایه آموزش}$

بعد از محاسبه، جواب را به نزدیک‌ترین عدد طبیعی تبدیل می‌کنیم (به روش گرد کدن)

از این شاخص عددی طبیعی از ۱ تا ۱۲ به دست می‌آید که نشان دهنده‌ی پایه‌ی تحصیلی مربوط به آن کتاب است.

توجه کنید:

هنگام گرد کردن عدد به دست آمده به روش بالا :

اگر رقم دهم آن عدد اعشاری ۵ یا بیشتر باشد، عدد طبیعی بالاتر را انتخاب کرده و در غیر این صورت، عدد طبیعی قبلی را انتخاب می‌کنیم. برای نمونه:

$$7/41 \longrightarrow 7 \quad (پایه‌ی هفتم) \quad 12 \longrightarrow 11/51 \quad (پایه‌ی دوازدهم)$$

برای کتابی با متوسط طول جملات ۱۵ کلمه‌ای و ۱۵ درصد کلمه‌ی دشوار، شاخص پایه‌ی آموزش کدام است؟

۱۱ ۴

۱۰ ۳

۹ ۲

۸ ۱



طبق رابطه گفته شده ببالا:

$$(15+10) \times 0/14 = 25 \times 0/14 = 10$$



در کتاب لاتین A، مجموع درصد لغات دشوار و میانگین تعداد لغات هر جمله برابر ۱۳ و در کتاب لاتین B، مقدار فوق برابر ۱۸ می باشد. شاخص پایه‌ی آموزش کتاب B چقدر از شاخص پایه‌ی آموزش کتاب A بیشتر است؟

۳ ۴

۲ ۳

۵ ۶

۱ ۲

مشابه مورد قبل:

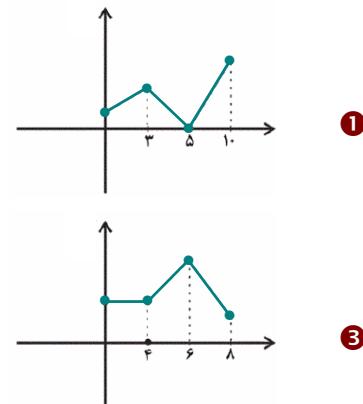
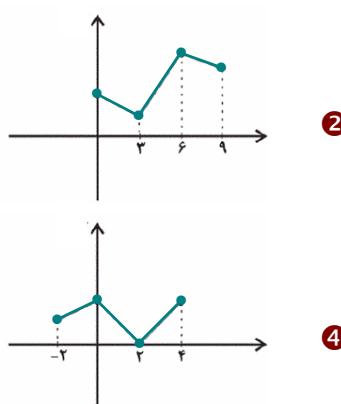
$$\text{شاخص پایه‌ی آموزش A} = [13 \times 0/14] = [5/2] = 5$$

$$\text{شاخص پایه‌ی آموزش B} = [18 \times 0/14] = [7/2] = 7$$

چوب پراید $7 - 5 = 2$ است.

به نمونه تست‌ها و بررسی بیشتری از سری‌های زمانی توجه کنید.

کدام نمودار زیر می‌تواند یک نمودار سری زمانی را نشان دهد؟ (محور افقی را فواصل زمانی در نظر بگیرید.)



پایید نقطه‌ی متواالی روی محور افقی (فواصل رُمانی) با هم فاصله‌ی یکسان داشته باشند.

توجه کنید:

در گزینه‌ی چهارم فاصله‌ها یکسان نیست، ولی رُمانی ۲ - هم وجود دارد که ممکن نیست.



در یک مرکز خرید، تعداد مشتری‌ها بین ساعت ۹ تا ۱۳ در جدول زیر آمده است. درون یابی خطی آن در ساعت ۱۰/۵

کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۸)

۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۰۰	۱۵۰	۱۹۰	۲۵۰	۱۲۰

۱۷۲ ۲
۱۷۸ ۴۱۷۰ ۱
۱۷۵ ۳

کزینه ۱ 

با استفاده از نقطه (۱۰, ۱۵۰) و (۱۱, ۱۹۰)، معادله خط را می‌نویسیم:

$$m = \frac{190 - 150}{11 - 10} = 40 \rightarrow y - 150 = 40(x - 10) \rightarrow y = 40x - 250$$

$$40 \times 10 / ۵ - 250 = 420 - 250 = 170 \quad \text{اکنون کافی است عدد } ۵ \text{ چای } x \text{ قرار گیرد:}$$

(۹۰) : (روش کوتاه)

$$\frac{150 + 190}{۲} = 170 \quad \text{چون عدد } ۵ / ۱۰ \text{ میانگین عددهای } ۱۰ \text{ و } ۱۱ \text{ است، درون یا پی نیز میانگین } ۱۵۰ \text{ و } ۱۹۰ \text{ متوسط بود:}$$



تعداد مراجعه کنندگان به یک درمانگاه بین ساعت ۸ تا ۱۸ یک روز به صورت زیر ثبت شده است. برای بروزنیابی تعداد مراجعه کنندگان در ساعت ۲۰، از کدام معادله خط استفاده می‌شود؟ 

۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	ساعت (x)
۱۱	۲۵	۲۰	۱۸	۲۶	۵۲	تعداد مراجعه کنندگان (y)

$$y = 5x - 38 \quad ۱$$

$$y = 8x - 38 \quad ۲$$

$$y = 8x - 24 \quad ۳$$

$$y = 5x - 24 \quad ۴$$

کزینه ۱ 

به روشن گفته شده، میانگین ساعت‌ها و تعداد را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{8+10+\cdots+18}{۶} = \frac{۷۸}{۶} = ۱۳ \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{11+۲۵+\cdots+۵۲}{۶} = \frac{۱۶۲}{۶} = ۲۷$$

اکنون معادله خط گذرا از نقطه (۱۳, ۲۷) و (۱۸, ۵۲) را می‌نویسیم:

$$m = \frac{52 - 27}{18 - 13} = \frac{25}{5} = 5 \rightarrow y - 27 = 5(x - 13) \Rightarrow y = 5x - 38$$



نرخ تورم کشوری در فاصله زمانی سه سال داده شده، بروزنیابی آن در سال شانزدهم کدام است؟ (کنکور خارج ۱۳۹۹) 

سال (x)	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
تورم (y)	۲۰/۵	۲۴	۲۲	۲۷	۲۱/۵

$$۱ \quad ۱$$

$$۲ \quad ۲/۳۵$$

$$۳ \quad ۲/۷۵$$

$$۴ \quad ۲/۲$$

کزینه ۱ 

میانگین‌ها را در چدول حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = ۱3 \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{۲۰/۵ + ۲۴ + ۲۲ + ۲۷ + ۲۱/۵}{۵} = \frac{۱۱۵}{۵} = ۲۳$$

اکنون معادله خط گذرا از نقطه (۹, ۲۳) و (۱۵, ۲۱/۵) را می‌نویسیم:

$$m = \frac{۲۱/۵ - ۲۳}{15 - ۹} = \frac{-1/۵}{6} = -\frac{15}{60} = -\frac{1}{4} \rightarrow y - 23 = -\frac{1}{4}(x - 9)$$

حالا $x = ۱۶$ را چایگزین می‌کنیم:

$$y = -\frac{1}{4}(16-9) + 23 = -\frac{7}{4} + 23 = -1/75 + 23 = 21/25$$



به روش پاسخ‌گویی تست بعد به صورت ویژه توجه کنید.

? تعداد بازدید کنندگان از یک مرکز تفریحی در طول یک هفته به صورت جدول زیر است. اگر تعداد بازدید کنندگان در روزهای یکشنبه و سه شنبه از طریق درونیابی به ترتیب ۱۴۱ و ۱۵۳ نفر به دست آید، مقدار $b+a$ کدام است؟

جمعه	چهارشنبه	دوشنبه	شنبه	روزهای هفته
۱۸۰	b	a	۱۲۰	تعداد بازدید کنندگان

- ۱ ۲۹۲
- ۲ ۳۰۰
- ۳ ۳۰۶
- ۴ ۳۱۸

گزینه ۳

اولاً: چون پاید مقادیر چدول عدد پاشند، روزهای هفته را با شماره‌ی آن‌ها چاکریئن می‌کنیم؛ شنبه = ۱ و یکشنبه = ۲ و
ثانیاً: خاصیت زیر وجود دارد:

وقتی پیوین نقطه‌ی A و B، مقدار در نقطه‌ی C را درونیابی می‌کنیم، پاید شیب AC و شیب BC پرایپر باشد.

پس:

• پا گوچه په نقطه (۱, ۱۲۰) و (۳, a) و درونیابی (۲, ۱۴۱) پاید:

$$\frac{141-120}{2-1} = \frac{141-a}{2-3} \rightarrow 21 = \frac{141-a}{-1} \rightarrow -21 = 141-a \Rightarrow a = 162$$

• پا گوچه په نقطه (۴, ۱۵۳) و (۵, b) و درونیابی (۳, ۱۶۲) پاید:

$$\frac{153-162}{4-3} = \frac{153-b}{4-5} \rightarrow -9 = \frac{153-b}{-1} \rightarrow 9 = 153-b \Rightarrow b = 144$$

در نتیجه:

$$b+a = 144+162 = 306$$

(حواله ۵): (روش کوتاه)

در هر سه نقطه (یعنی: دو نقطه اپندا و انتها و نقطه‌ی درونیابی پیوین)، روزهای هفته په صورت منظم (با فاصله‌های یکسان) تغییر می‌کند، در نتیجه پاید افزایش تعداد بازدید کنندگان هم یکسان پاشد، یعنی، با گوچه په مقادیر داده شده‌ی:

$$b \leftarrow 153 \leftarrow a \quad a \leftarrow 141 \leftarrow 120$$

پاید: $a = 162 = 141 - 120 \Rightarrow a = 162$. به صورت مشابه:

$$\text{پاید: } b = 153 - a = 153 - 9 = 144 \quad \boxed{162}$$



? تعداد کالای فروخته شده توسط یک فروشگاه در هفته‌های اول تا هفتم به صورت جدول زیر است:

هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد کالاهای فروخته شده	۸	x	۵	y	۱۵	۱۰	۱۲

پیش‌بینی‌ها نشان می‌دهد که تعداد کالایی که در هفته‌ی نهم به فروش می‌رسد ۸ کالا است. مقدار $y+x$ کدام است؟

(کنکور ۱۴۰۰)

۷۶ ۴

۵۰ ۳

۳۶ ۲

۲۶ ۱

کزینه ۱۴

طبق فرضیات، پرونیابی در هفته نهم، پراپر ۸ است؛ یعنی:
نقطه (۹, ۸) روی خط برونیابی قرار دارد.

تعیین میانگین‌ها:

$$\bar{x} = ۱۴ \quad , \quad \bar{y} = \frac{۸ + ۹ + ۵ + ۷ + ۱۰ + ۱۲}{۷} = \frac{x + y + ۵۰}{۷}$$

معادلهی خط گذر از نقاط (۱۴, ۸), (۷, ۱۰) و (۹, ۱۲) را می‌نویسیم:

$$m = \frac{۱۲ - \frac{x + y + ۵۰}{۷}}{۷ - ۱۴} \rightarrow Y - ۱۲ = \frac{۱۲ - \frac{x + y + ۵۰}{۷}}{۷ - ۱۴} (X - ۷)$$

محاسبه نقطه (۹, ۸) را چایگین می‌کنیم:

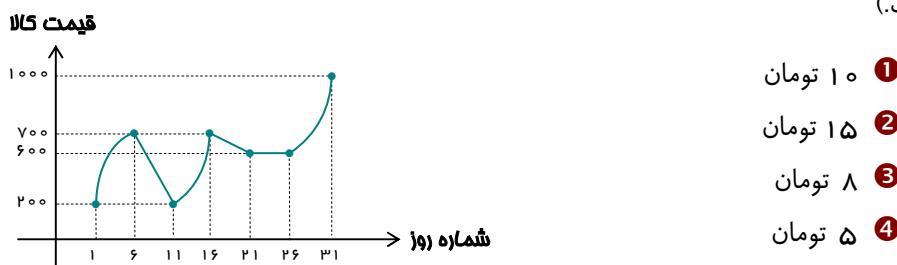
$$۸ - ۱۲ = \frac{۱۲ - \frac{x + y + ۵۰}{۷}}{۷ - ۱۴} (۹ - ۷) \rightarrow -۴ = ۲ \times \frac{۱۲ - \frac{x + y + ۵۰}{۷}}{۳} \rightarrow -۶ = ۱۲ - \frac{x + y + ۵۰}{۷}$$

$$\rightarrow \frac{x + y + ۵۰}{۷} = ۱۲ + ۶ = ۱۸ \rightarrow x + y + ۵۰ = ۷ \times ۱۸ = ۱۲۶$$

$$\Rightarrow x + y = ۱۲۶ - ۵۰ = ۷۶$$



با توجه به نمودار زیر، مقدار خطای درونیابی در روز دوازدهم کدام است؟ (قیمت واقعی در روز دوازدهم برابر ۳۰۵ تومان است).



کزینه ۱۴

با استفاده از نقاط (۱۱, ۲۰۰) و (۱۶, ۷۰۰)، معادلهی خط را می‌نویسیم:

$$m = \frac{۷۰۰ - ۲۰۰}{۱۶ - ۱۱} = ۱۰۰ \rightarrow y - ۲۰۰ = ۱۰۰(x - ۱۱)$$

مقدار $x = ۱۲$ را چایگین می‌کنیم:

$$y - ۲۰۰ = ۱۰۰(۱۲ - ۱۱) \rightarrow y = ۱۰۰ + ۲۰۰ = ۳۰۰$$

$$| ۳۰۰ - ۳۰۵ | = |-۵| = ۵$$

پس خط پراپر است با:



نکته ۴

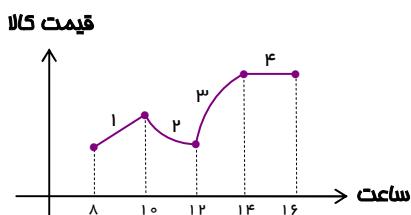
خطای کمتر در درون‌یابی:

هر قدر نمودار سری زمانی بین دو نقطه، به خط مستقیم شبیه‌تر باشد، خطای درون‌یابی در محدوده‌ی بین دو نقطه کمتر است.

بیویژه:

اگر نمودار به صورت یک پاره‌خط (مستقیم) باشد، مقدار درون‌یابی با مقدار واقعی برابر بوده و خطای برابر صفر است.

در نمودار زیر که قیمت واقعی یک کالا را بر حسب زمان نشان می‌دهد، اگر خطای درون‌یابی هر لحظه را در بازه‌های زمانی با e نمایش دهیم، کدام گزینه قطعاً صحیح است؟



$$|e_1| > |e_4| \quad ①$$

$$|e_2| = |e_3| \quad ②$$

$$e_1 = e_4 \quad ③$$

$$|e_2| < |e_4| \quad ④$$

گزینه ۳

طبق تکه‌ی قابل، خطای در محدوده‌های اول و چهارم پر از صفر است و در نتیجه $e_1 = e_4$ مُواهد بود.



توجه کنید:

کمتر بودن خطای را با توجه به نمودار در نکته‌ی قبل دیدیم. به صورت مفهومی نیز، وقتی می‌توان بین دو کمیت بروون‌یابی یا درون‌یابی دقیق‌تری انجام داد که بین آن‌ها به نوعی تناسب برقرار باشد.

برای نمونه:

- بین فاصله‌ی بین دو شهر و مصرف بنزین خودرو تناسب وجود دارد.
- بین فاصله‌ی بین دو شهر و تغییر درجه‌ی حرارت هوا تناسب وجود ندارد.

با توجه به مفهوم سری زمانی، کدام مورد زیر را می‌توان دقیق‌تر درون‌یابی یا بروون‌یابی کرد؟

- ① مدت زمانی که دانش‌آموزان در کلاس‌های کنکور حضور دارند؛ {درصد کسب شده در کنکور سراسری}
- ② مدت زمان حرکت یک قطار با سرعت ثابت در سطح بدون شب؛ {مقدار مصرف سوخت}
- ③ مدت زمان حرکت یک خودرو از تهران به سمت شمال؛ {مقدار فشار وارد شده به کمک فنرها}
- ④ مدت زمانی که یک بازاریاب اینترنتی صرف صحبت با مشتریان می‌کند؛ {تعداد مشتریان جذب شده}

گزینه ۲

در سه مورد دیگر، بین دو کمیت گفته شده، الزاماً تناسب وجود ندارد.



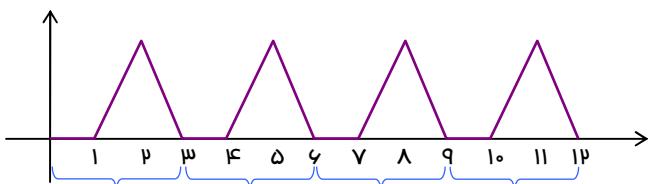
به معرفی نوع خاصی از سری زمانی توجه کنید.

نکته

سری زمانی متناوب:

گاهی داده‌های یک سری زمانی (و در نتیجه نمودار آن) بعد از گذشت یک زمان مشخص، دوباره شروع به تکرار می‌کنند و این تکرار ادامه دارد. (مثل این‌که کپی‌های یک قطعه از نمودار چسبیده به هم در حال تکرار است.)

مانند نمودار متناوب زیر:



توجه کنید:

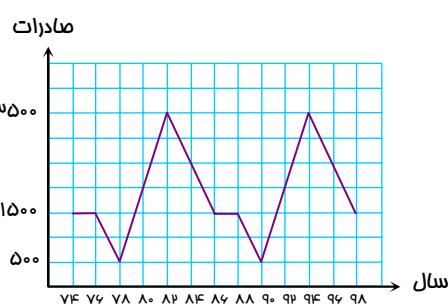
در چنین حالتی، طول زمانی که داده‌ها و نمودار لازم است تا دوباره تکرار شود را «دوره‌ی تناوب» گویند. در نمودار بالا، دوره‌ی تناوب برابر است با:

$$3 = 5 - 3 = (\text{زمان ابتدای همان قطعه‌ی تکراری}) - (\text{زمان انتهای یک قطعه‌ی تکراری}) = \text{دوره‌ی تناوب}$$

نکته‌ی مهم:

چنان‌که در مثال بعد هم می‌بینید، قاعده‌ی مهم زیر وجود دارد:

اگر به زمان‌های روی محور، به اندازه‌ی دوره‌ی تناوب اضافه یا کم کنید، داده‌ها پکسان می‌مانند!



مثال: در سری زمانی مقابل،

الف) دوره‌ی تناوب را مشخص کنید.

ب) میزان صادرات در سال ۱۴۰۴ را دقیقاً مشخص نمایید.

پاسخ

الف) نمودار را از سال ۷۶ تا ۸۶ نگاه کنید. ادامه‌ی نمودار از ۸۶ په بعد، دقیقاً تکرار قبل است و پنایراین:

$$86 - 74 = 12 = \text{دوره‌ی تناوب}$$

ب) چون $1404 - 12 = 1392$ است، پس مقدار صادرات در سال‌های ۹۲ و ۱۴۰۴ یکسان است:

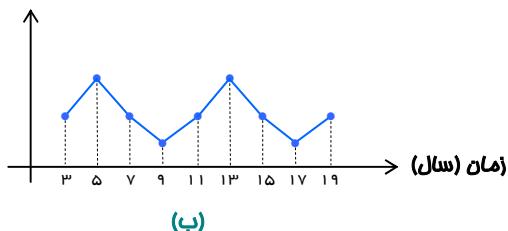
طبیعی نمودار؛ ۲۰۰۰





اختلاف دورهی تناوب دو سری زمانی با نمودارهای داده شده کدام است؟

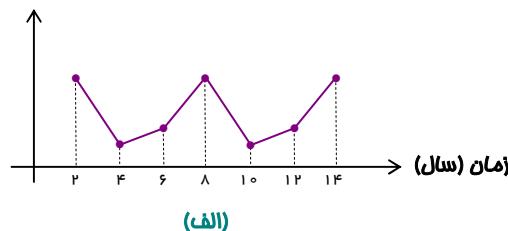
قیمت کالا



(ب)

۴

قیمت کالا



(الف)

۲

۱

گزینه

په آسانی دیده می‌شود که:

در نمودار اول دورهی تناوب $6 - 2 = 4$ و در نمودار دوم پراید $8 - 6 = 2$ است.

پس اختلاف آنها پراید $4 - 2 = 2$ مطابقت دارد.

----- ♦ -----



۱ اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

الف) تورم ب) شاخص بیکاری

۲ اگر گوشت و نان دو کالا باشند به طوری که قیمت آنها در سال جاری به ترتیب 110000 و 50000 تومان باشد و در سال پایه به ترتیب 85000 و 45000 تومان باشد، به طوری که مقدار مصرفی برابر 350 و 400 کیلوگرم باشد.

(الف) شاخص بهای گوشت و نان را در سال جاری به دست آورید.
(ب) تورم گوشت و نان را مشخص کنید.

۳ اگر شاخص بهای نان در سال 96 برابر 145 و مقدار تورم در سال 96 نسبت به سال 95 برابر 60 درصد باشد، شاخص بهای نان در سال 95 را بیابید.

۴ در یک جامعه نرخ بیکاری 10 درصد و جمعیت فعال 35 میلیون نفر است. تعداد بیکاران را بیابید.

۵ در یک کتاب لاتین، درصد لغات دشوار 6 و میانگین تعداد کلمات در هر جمله 25 است. شاخص پایه‌ی آموزش را بیابید.

۶ درآمد ماهانه‌ی هشت نفر از مدیران یک شرکت بر حسب میلیون تومان به صورت زیر است:
 $2,4,3,5,5,3,6,2$

(الف) خط فقر این داده‌ها را بر اساس میانه و میانگین به دست آورید.
(ب) تعداد مدیران زیر خط فقر را در هر دو حالت مشخص کنید.

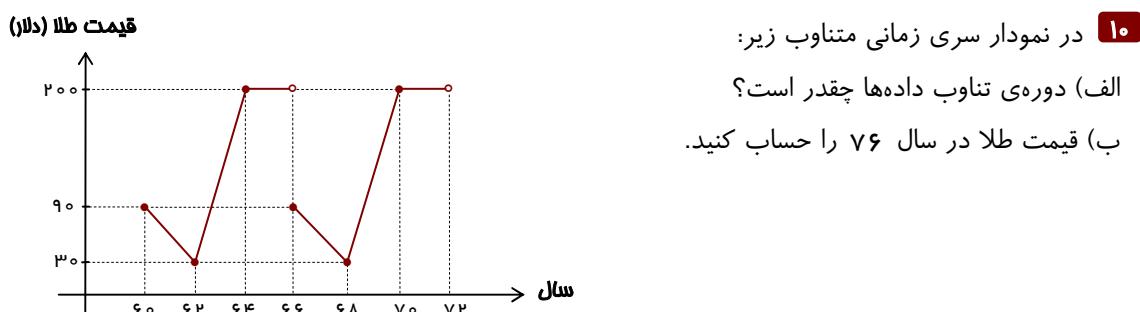
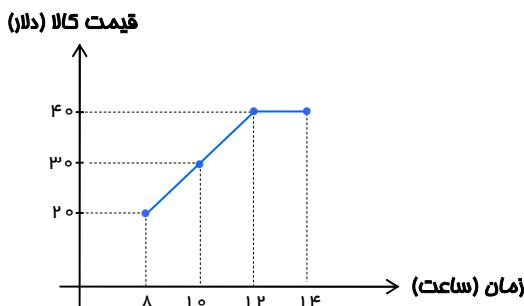
۷ در شهری 2000 نفر از افراد 16 سال به بالا شاغل هستند. در این شهر حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری در آن 8 درصد شود. (800 نفر بیکار در این شهر داریم).

۸ تعداد مشتری‌ها در یک مرکز خرید بین ساعت 8 صبح تا 16 به صورت جدول زیر می‌باشد:

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
تعداد مشتری	۳۰۰	۶۵۰	۷۰۰	۱۴۰۰	۴۰۰

(الف) نمودار سری زمانی جدول بالا رارسم کنید.
(ب) با توجه به نمودار رسم شده تعداد مشتریان فروشگاه را در ساعت 11 درون یابی کنید.

۹ با توجه به نمودار سری زمانی زیر، قیمت کالا را در ساعت ۱۱ و ۱۶ به ترتیب درونیابی و بروونیابی کنید.



۱۱ میزان فروش یک شرکت در پنج سال متولی بر حسب میلیارد تومان به صورت زیر است: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

سال x	۱	۲	۳	۴	۵
فروش y	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹

(الف) نمودار سری زمانی زمانی را رسم کنید.

(ب) فروش در سال هفتم را بروونیابی کنید

تمرینات
 منتخب کتاب
?

۱ اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵ میلیون ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان یک شرکت چقدر باشد تا هیچ کارمندی در آن شرکت زیر خط فقر نباشد، چه زمانی از میانه درآمد خانوارها برای محاسبه خط فقر استفاده می‌کنیم؟

۲ خانواده ۶ نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین المللی، درآمد ماهانه این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشند؟

۳ در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل هستند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار می‌باشند.

- الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟
 ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر با ۵ درصد باشد؟

۴ نماتوب یا شاخص توده‌ی بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص‌های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبه‌ی آن باید وزن فرد به کیلوگرم را بر توان دوم قدرش بحسب متر تقسیم کرد. جدول زیر اطلاعات خانواده‌ی صالحی را نشان می‌دهد:

عضو خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

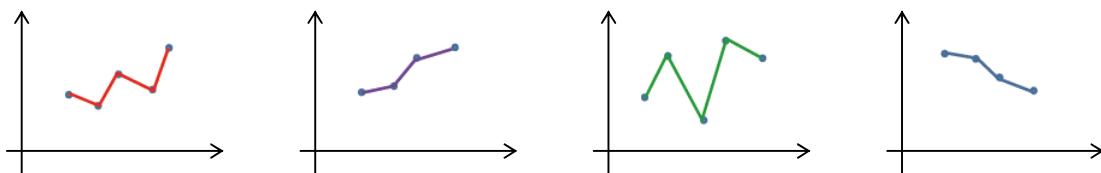
اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارد؟

۵ شاخص پوسیدگی دندان (DMFT) در سال ۱۳۶۰ در ایران برابر با ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پر شده بوده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر با ۶ شده است. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟



۱۶۲

۴ اگر نمودارهای شکل زیر مربوط به سری‌های زمانی باشند، در کدام حالت درون‌یابی و بروون‌یابی خطی بهتری امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



۷ یک دکه‌دار تعداد بطری‌های آب فروخته شده از شروع فصل گرما را یک روز در میان، مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

شنبه	پنجشنبه	سهشنبه	یکشنبه	جمعه	چهارشنبه	دوشنبه	شنبه	روز	تعداد بطری‌ها
۲۳	۲۱	۲۲	۱۸	۲۵	۱۶	۱۳	۸		

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) تعداد بطری‌های فروخته شده در روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

پ) تعداد بطری‌های فروخته شده در روز دوشنبه از هفته‌ی دوم را بروون‌یابی کنید.

۸ تعداد زلزله‌های دارای شدت بیش از ۷ ریشتر در جهان، مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است:

سال	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
تعداد زلزله‌های شدیدتر از ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

پ) معادله‌ی خطی را که نقطه (۱۰, ۲۱) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

ت) با استفاده از خطی که معادله‌ی آن را نوشتی‌اید، تعداد زلزله‌های شدیدتر از ۷ ریشتر در سال یازدهم در جهان را بروون‌یابی کنید.

ث) اگر بدانیم که در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای بروون‌یابی چقدر است؟



TEST

۱ درآمد افراد یک جامعه‌ی آماری بر حسب میلیون تومان برابر است با:

۲,۲,۲,۳,۴,۴,۵,۵ / ۵,۶

خط فقر را به روش نصف میانگین به دست می‌آوریم، چند نفر زیر خط فقر قرار ندارند؟

۱۰ ④

۹ ③

۸ ②

۷ ۱

۲ استانی چهار شهر با جمعیت فعال و نرخ بیکاری مطابق با جدول زیر دارد. اگر نرخ بیکاری استان ۲۱/۴ درصد باشد،

جمعیت شاغل شهر B چند نفر است؟

D شهر	C شهر	B شهر	A شهر	
۰/۷	۱	۰/۳	۰/۵	جمعیت (میلیون نفر)
۱۰ درصد	۳۲ درصد	x	۲۰ درصد	نرخ بیکاری

۱ ۲۳۵۰۰۰

۲ ۱۵۰۰۰

۳ ۱۴۵۰۰۰

۴ ۲۵۵۰۰۰

۳ در یک جامعه‌ی آماری از بین جمعیت فعال، ۳۵ میلیون نفر شاغل‌اند، ۳ میلیون نفر از کار اخراج شده‌اند، ۷ میلیون نفر دیگر جویای کار هستند و ۲ میلیون نفر دیگر هم از ابتدای ماه بعد سر کار می‌روند. نرخ بیکاری در این جامعه در حال حاضر تقریباً چند درصد است؟

۳۴/۵ ④

۳۲/۵ ③

۲۸/۵ ②

۲۴/۵ ۱

۴ قد زهرا ۱۶۰ سانتی‌متر و وزنش ۸۰ کیلوگرم و قد نگار ۱۸۰ سانتی‌متر و وزنش ۹۰ کیلوگرم است. اگر هر دو

ساله باشند، کدام یک از نظر شاخص سلامتی، وزن طبیعی و در محدوده‌ی سلامت وزنی قرار دارد؟ (اگر شاخص توده‌ی بدنی

شخص در محدوده‌ی $19 \leq BMI \leq 25$ باشد، وزن مطلوب دارد).

۴ هیچ‌یک

۳ هر دو

۲ زهرا

۱ نگار

۵ در یک بخش روستایی ۲۳۴۵ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل و ۶۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار هستند.

حداقل چند شغل در این بخش باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه به ۵ درصد برسد؟

(شغل‌های جدید برای استخدام افراد بیکار است).

۴۸۰ ۴

۴۵۳ ۳

۳۸۳ ۲

۲۵۰ ۱

۶ تعداد مشتری‌های یک مرکز خرید در ساعت‌های ۹ و ۱۵ به صورت زیر ثبت شده است. به کمک درونیابی خطی، تعداد

مشتری‌ها در ساعت ۱۲ کدام است؟

ساعت		
۹	۱۵	
تعداد مشتری	۳۵۰	۶۵۰

۵۰۰ ۲

۵۵۰ ۴

۴۵۰ ۱

۶۰۰ ۳



فرض کنید قیمت نفت در جهان در سال‌های مختلف یک سری زمانی متناوب را تشکیل دهد که هر یک از قیمت‌ها هر ۸ سال تکرار می‌شوند. اگر در سال ۱۳۹۵ و ۱۳۹۷ قیمت هر بشکه نفت به ترتیب ۴۵ و ۸۰ دلار باشد، قیمت هر بشکه نفت در سال ۱۴۰۵ چند برابر قیمت آن در سال ۱۳۸۱ می‌باشد؟

۲ ④

۲/۵ ③

۱/۵ ②

۱ ①

تعداد دانشجویان دختر و پسر یک دانشگاه از سال ۹۱ تا ۹۷ یک سال در میان در جدول زیر آمده است. در سال ۹۶ به کمک درون‌یابی تقریباً چند درصد دانشجویان این دانشگاه دختر بوده‌اند؟

سال	دانشجویان دختر	دانشجویان پسر
۹۱	۶۴۵۰	۵۱۰۰
۹۳	۷۲۳۰	۵۸۵۰
۹۵	۷۹۰۰	۶۰۰۰
۹۷	۶۳۰۰	۵۶۰۰

- ۴۸ ①
۵۰ ②
۵۵ ③
۶۲ ④

در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل و ۱۴۳۳ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار هستند. حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری به ۶ درصد برسد؟ (کنکور ۹۸)

۶۰ ④

۵۰ ③

۱۴۵ ②

۱۴۰ ①

در نمودار سری زمانی، خطای برای هر نقطه، برابر کدام است؟ (کنکور ۹۸)

- ۱) قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی از درون‌یابی آن
۲) نصف درون‌یابی خطی است.
۳) نصف بروون‌یابی خطی است.
۴) قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی از بروون‌یابی آن

قیمت سه نوع کالا در سال پایه ۲۰۰۰ و ۳۵۰۰ و ۷۵۰۰ واحد پول، در سال مورد نظر به ترتیب ۳۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ و ۵۰۰۰ واحد پول است. تعداد مورد نیاز به این کالا در سال به ترتیب ۶۰ و ۱۰۰ و ۸۰ می‌باشد. مقدار تورم تقریباً چند درصد است؟ (کنکور خارج ۹۸)

۱۴۰/۱ ④

۳۹/۲ ③

۳۷/۴ ②

۳۵/۸ ①

نرخ تورم کشوری با فاصله‌های زمانی دو سال، به صورت جدول زیر است. درون‌یابی آن در سال نهم کدام است؟ (کنکور ۹۹)

سال (x)	۲	۴	۶	۸	۱۰
تورم (y)	۱۴	۱۸	۱۲	۲۰	۲۶

- ۲۲ ①
۲۳ ②
۲۴ ③
۲۵ ④

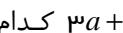
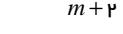
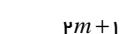
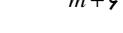
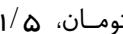
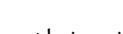
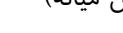
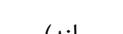
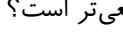
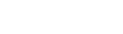
شاخص پایه آموزش یک کتاب ۱۰ و میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۵ است. درصد کلمات دشوار کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱۵ ④

۱۶ ③

۱۸ ②

۲۰ ①





۱۶۴

در یک برونویابی، آخرین داده ثبت شده (a, m) ، میانگین داده‌های ثبت شده $(2, 3)$ و معادله‌ی برونویابی $y = mx + b$ بوده است. مقدار $2a + b$ کدام است؟

۳۳ ۴

۹ ۳

۱۲ ۲

۱۵ ۱