به نام خدا

حسابان۱(درس دوم از فصل اول)

ریاضی۲(درس دوم از فصل اول)

معادله درجه۲وتابع درجه۲

درس۲: معادلهٔ درجهٔ دوم

یاد آوری حل معادله درجه دوم: هر معادله به‌فرم کلی $ax^2+bx+c=0$ را که در آن $a\neq 0$ است، یک معادلهٔ درجه دوم گوییم.

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x'=1 \text{ و } x''=\frac{c}{a}$$

$$3x^2-5x+2=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{b=a+c} x'=-1 \text{ و } x''=-\frac{c}{a}$$

$$3x^2+5x+2=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0 \xrightarrow{b=a+c} x'=-1 \text{ و } x''=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

یاد آوری حل نامعادله درجه دو :

$-x^2+5x>0$

$-x^2+5x=0 \to x(-x+5)=0$ ، $x=0$ ، $x=5$

$(0,5)$

$3x^2-2x-1\geq 0$

1 ، $-\frac{1}{3}$

$(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[1,+\infty)$

$x^2(x^2-9)(4x^2+3x-1)\leq 0$

$0,\ \pm 3,\ -1,\ \frac{1}{4}$

$[-3,-1]\cup[\frac{1}{4},+\infty)$

$\frac{x}{x+3}>2 \rightarrow$

$\frac{x}{x+3}-2>0 \to \frac{x-2x-6}{x+3}>0 \to \frac{-x-6}{x+3}>0$

-6 ، -3

$(-6,-3)$

مثال) اگر $x = -1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشهٔ‌دیگر‌را‌بیابید.

$$۴(-۱)^۲ - m(-۱) - ۷ = ۰$$

$$۴ + m - ۷ = ۰ \rightarrow m = ۳$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{۷}{۴}$$

تست) اگر عدد $x = 1$ ریشه مضاعف معادله $(m-3)x^2 + nx + 4 - m = 0$ باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

$(x-۱)^۲$

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{-5}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{-9}{2}$

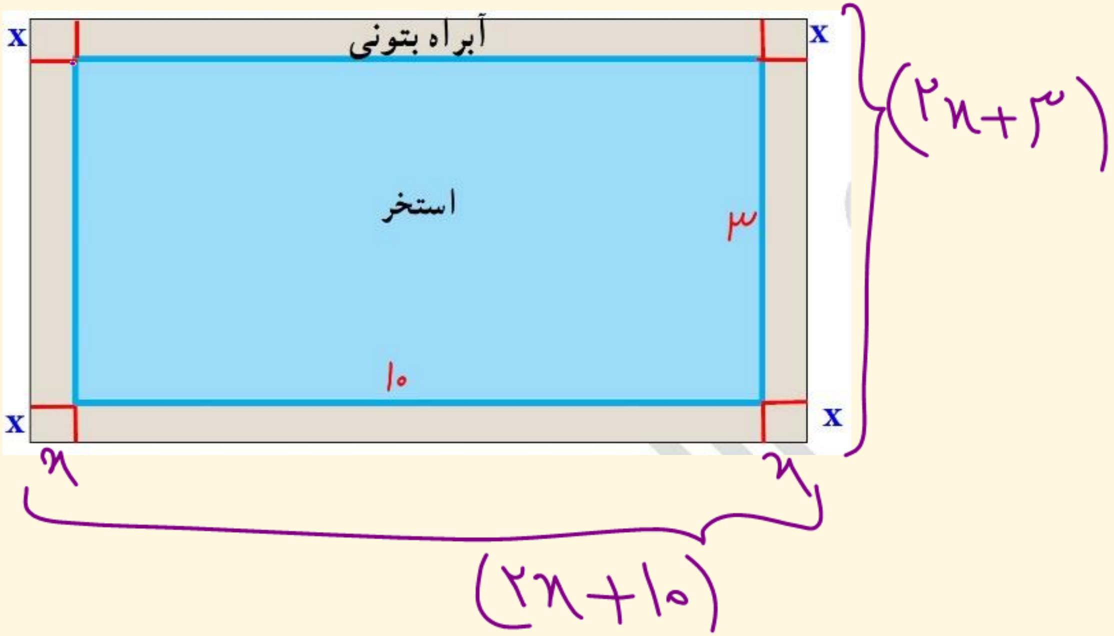
$$(m-۳)x^۲ + nx + ۴ - m = (m-۳)(x-۱)^۲$$

$$(m-۳)x^۲ + nx + ۴ - m = (m-۳)x^۲ - ۲(m-۳)x + m - ۳$$

$$۴ - m = m - ۳ \rightarrow ۲m = ۷ \rightarrow m = \frac{۷}{۲}$$

$$n = ۲(\frac{۷}{۲} - ۳) = ۷ - ۶ = ۱$$

مثال) یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است.اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربعباشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



$$(2x+10)(2x+3)=30+14$$

$$4x^2+26x+30=44$$

$$4x^2+\overset{13(2x)}{26x}-14=0$$

$$(2x-1)(2x+14)=0$$

$$\begin{cases} 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \checkmark \\ 2x+14=0 \to x=-7 \times \end{cases}$$

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم:

می‌دانیم معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ دارای دو ریشهٔ $\alpha,\beta=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ است. حال اگر این ریشه‌ها را جمع، ضرب و تفریق کنیم، خواهیم داشت:

جمع ریشه

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}\rightarrow\boxed{S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}}$$

ضرب ریشه

$$P=\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}\qquad\boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P\rightarrow\boxed{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3P\rightarrow\boxed{\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \boxed{D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = \sqrt{S^2 - 2P - 2P} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

$$\rightarrow \boxed{|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P}} \rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = \sqrt{S^2 - 4P} & \alpha > \beta \\ \alpha - \beta = -\sqrt{S^2 - 4P} & \alpha < \beta \end{cases}$$

$P=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$ $\qquad$ $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=4$

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-8x+5=0$ باشند. بدون محاسبهٔ ریشه‌ها حاصل عبارات زیر را بیابید. $(\alpha>\beta)$

$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$ و $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-8)}{2}=4$

الف) $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{4^2-2\times\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{11}{\frac{25}{4}}$

$\alpha^2\beta^2 \rightarrow (\alpha\beta)^2$

ب) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{S^3-3PS}{P}$

پ) $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)}{(\beta+1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta}{\alpha\beta+\beta+\alpha+1}=\frac{S^2-2P+S}{P+S+1}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ت) $\underbrace{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}-2=$

$$\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})^2} = \sqrt{\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\sqrt{\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{PS+2P\sqrt{P}} =$$

ث) $\alpha^2-\beta^2 = \overbrace{\cancel{(\alpha+\beta)}}^{S}(\alpha-\beta) = S\sqrt{S^2-4P}$

تست) اگرمجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $\overset{a}{1}x^2 - \overset{b}{(a^2+b^2+1)}x + \overset{c}{2ab-1} = 0$ به ترتیب برابر 14 و 11 باشند، حاصل $|a-b|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 5

$$S=\frac{-b}{a}=14 \rightarrow a^2+b^2+1=14 \rightarrow a^2+b^2=13$$

$$P=\frac{c}{a}=11 \rightarrow 2ab-1=11 \rightarrow 2ab=12$$

$$\xrightarrow{-} a^2+b^2-2ab=1$$

$$(a-b)^2=1 \rightarrow |a-b|=1$$

تست) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{3\alpha^2+5\alpha\beta+3\beta^2}{4\alpha\beta^2+4\alpha^2\beta}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) $\frac{47}{16}$ ۴) $-\frac{47}{16}$

$$\begin{cases} S=+4 \\ P=1 \end{cases}$$

$$\frac{3\alpha^2+3\beta^2+5\alpha\beta}{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}=\frac{3(S^2-2P)+5P}{4P(S)}$$

$S=-۲ , P=-۱$

تست) اگر $\cancel{x_1}\,\alpha < \cancel{x_2}\,\beta$ باشد، در معادله $x^2+2x-1=0$ حاصل عبارت $2\cancel{x_1}\alpha^2+3\cancel{x_2}\beta^2$ کدام است؟

۱) ~~$15-2\sqrt{2}$~~ ۲) $15+2\sqrt{2}$ ۳) $17-2\sqrt{2}$ ۴) $17+2\sqrt{2}$

$۲\alpha^۲+۳\beta^۲ = \underbrace{۲/۵\alpha^۲}-۰/۵\alpha^۲+\underbrace{۲/۵\beta^۲}+۰/۵\beta^۲ = ۲/۵(\alpha^۲+\beta^۲)+۰/۵(-\alpha^۲+\beta^۲)$

$۲/۵(\alpha^۲+\beta^۲)+۰/۵\underbrace{(\beta^۲-\alpha^۲)}_{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)} = \frac{۵}{۲}\cancel{(\underbrace{S^۲-۲P}_{۴+۲})}+\frac{۱}{۲}S\sqrt{\underbrace{S^۲-۴P}_{۴+۴}} = ۱۵+\cancel{\frac{۱}{۲}}(-\cancel{۲})\sqrt{۸}$

$۱۵-\sqrt{۸}$

تست) اگر در معادلهٔ $x^2-5mx+16=0$ رابطهٔ $\cancel{x_1}\alpha^3=\cancel{x_2}\beta<0$ برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

$S=۵m \quad P=۱۶$

$\alpha^۳=\beta$

$\alpha+\beta=۵m$

۱) 2 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

$\alpha\cdot\beta=۱۶ \xrightarrow{\alpha^۳=\beta} \alpha\cdot\alpha^۳=۱۶ \to \alpha^۴=۱۶ \to \alpha=\pm۲ \to \alpha=-۲ , \beta=-۸$

$۴+۱۰m+۱۶=۰ \to ۱۰m=-۲۰ \to m=-۲$

مثال)اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 9x + 2 = 0$ باشند.بدون محاسبهٔ ریشه‌ها حاصل عبارات زیر را بیابید. $(\beta > \alpha)$

الف) $2\alpha^2 + 9\alpha\beta^2 + 7 =$

ب) $\frac{2\alpha^2+2}{\beta} + \frac{9\beta}{\alpha} =$

پ) $2\alpha^3 + 9\beta^2 + 2\beta$

ت) $5\alpha^2 + 3\beta^2$

ث) $\sqrt{2\beta^2 + 2} + 3\sqrt{\alpha}$

مثال) اگر بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(n+2)x+3=0$ رابطهٔ $2\alpha+\beta=7$ برقرار باشد، مقدار n و ریشه‌های معادله را بیابید.

a, b, c

$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=n+2$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=7\\ \alpha+\beta=n+2\\ \alpha\cdot\beta=3\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\alpha=7-n-2\to\alpha=5-n\\ 5-n+\beta=n+2\to\beta=2n-3\end{cases}$$

$$\alpha\cdot\beta=3\longrightarrow(5-n)(2n-3)=3$$

$$10n-15-2n^2+3n=3\longrightarrow 2n^2-13n+18=0$$

$$n^2-13n+36=0$$

$$(n-9)(n-4)=0$$

$$n=\cancel{\frac{9}{2}},\quad n=\frac{4}{2}=2$$

پویش جهادی

دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱ ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی وتجربی ■ پایه یازدهم

مثال) مقدار m را چنان بیابید که یکی ازریشه‌های معادلهٔ $x^2-2m^2x-8=0$ مربع دیگری باشد

$\alpha=\beta^2$ I

$\alpha+\beta=2m^2$ II

$\alpha\cdot\beta=-8$ III

$\mathrm{I},\mathrm{III}\to\beta^2\cdot\beta=-8\to\beta^3=-8\to\beta=-2$, $\alpha=4$

$\mathrm{II}\to 4+(-2)=2m^2\to\cancel{2}=\cancel{2}m^2\to m=\pm1$

مثال) اگردرمعادلهٔ $\overset{a}{x^2}\overbrace{-5mx}^{b}\overbrace{+m+1}^{c}=0$ چهاربرابر یکی ازریشه‌ها،پنج واحدبیشتر ازدیگری باشد، ریشه‌ها کدامند؟

$\begin{cases}4\alpha=5+\beta\\ \alpha+\beta=5m\end{cases}$ $\begin{cases}4\alpha-\beta=5\\ \alpha+\beta=5m\end{cases}\to\cancel{5}\alpha=\cancel{5}(m+1)\to\alpha=m+1$

$\to\beta=5m-m-1\to\beta=4m-1$

$\alpha\cdot\beta=m+1\to\cancel{(m+1)}(4m-1)=\underset{1}{\cancel{m+1}}\to\begin{cases}m+1=0\to m=-1\\ 4m-1=1\to m=\frac{1}{2}\end{cases}$

مثال) به ازای کدام مقدار m ، در معادلهٔ درجه دوم $x^2+mx+m+7=0$ ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی برابر ۱۰ می‌باشد.

$$\alpha^2+\beta^2=10 \rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=10 \rightarrow$$

$$\alpha+\beta=-m$$

$$\alpha.\beta=m+7$$

$$(-m)^2-2(m+7)=10 \rightarrow$$

$$m^2-2m-14-10=0$$

$$m^2-2m-24=0 \rightarrow (m-6)(m+4)=0$$

$$\begin{cases} m=-4 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow \Delta>0 \\ m=6 \rightarrow x^2+6x+13=0 \rightarrow \Delta<0 \quad \times \end{cases}$$

۲,۳ $\begin{cases} S=۵ \\ P=۶ \end{cases}$ $x^۲ - Sx + P = ۰ \longrightarrow x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$

تشکیل معادلهٔ درجه دوم:

اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، بدیهی است که این معادله به صورت $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ می‌باشد که پس از ساده کردن داریم: $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ و با فرض $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ معادلهٔ مطلوب به فرم $\boxed{x^2-Sx+P=0}$ درمی‌آید. پس برای تشکیل یک معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن، کافی است مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را یافته و در معادلهٔ اخیر جایگزین کنیم.

مثال ۱۰) معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر $3-\sqrt{2}$ و $3+\sqrt{2}$ باشند.

$S = ۳ + \cancel{\sqrt{۲}} + ۳ - \cancel{\sqrt{۲}} = ۶$

$P = (۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲}) = ۹ - ۲ = ۷$

$x^۲ - Sx + P = ۰$

$x^۲ - ۶x + ۷ = ۰$

پویش جهادی

دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱ ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی وتجربی ■ پایه یازدهم

مثال) اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-5x+1=0$ برابر α و β باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشند.

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{25}{9}-\frac{2\times 3}{3\times 3}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{19}{\cancel{9}}}{\frac{1}{\cancel{3}}}$$

$$S_{\text{جدید}}=\frac{19}{3} \quad , \quad P_{\text{جدید}}=\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\beta}}\times\frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\alpha}}=1$$

$$x^2-Sx+P=0$$

$$x^2-\frac{19}{3}x+1=0$$

$$3x^2-19x+1=0$$

$-۵x^۲-۵x+۴=۰ \longrightarrow ۵x^۲+۵x-۴=۰$

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $4x^2-5x-5=0$ باشند،ریشه‌های $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ کدام معادله است؟

$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{۵/۴}{-۵/۴}=-1$

$P=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-۵/۴}=-\frac{۴}{۵}$

$x^۲-Sx+P=۰ \rightarrow$

$x^۲+1x-\frac{۴}{۵}=۰ \rightarrow ۵x^۲+۵x-۴=۰$

مثال) معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+x-3=0$ باشند، راییابید.

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $3x^2+5x-1=0$ باشند، ریشه‌های $\frac{1}{2\alpha+1}$ و $\frac{1}{2\beta+1}$ کدام معادله است

نکته مثال) معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مفروض است، معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش:

الف) قرینهٔ ریشه‌های این معادله باشد.

$$y=-x \to x=-y \to a(-y)^2+b(-y)+c=0 \to \boxed{ay^2-by+c=0}$$

ب) عکس ریشه‌های این معادله باشد.

$$y=\frac{1}{x} \to x=\frac{1}{y} \to a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0 \to \boxed{cy^2+by+a=0}$$

پ) عکس و قرینهٔ ریشه‌های این معادله باشد.

$$y=\frac{-1}{x} \to x=\frac{-1}{y} \to a\left(\frac{-1}{y}\right)^2+b\left(\frac{-1}{y}\right)+c=0 \to \boxed{cy^2-by+a=0}$$

ت) k برابر ریشه‌های این معادله باشد.

$$y=kx \to x=\frac{y}{k} \to a\left(\frac{y}{k}\right)^2+b\left(\frac{y}{k}\right)+c=0 \to \boxed{ay^2+bky+ck^2=0}$$

مثال) اگر ریشه‌های معادلات زیرعکس هم باشندمقدار عبارت m^2+n^2 رابیابید.

$$(m-1)x^2-3x+n=0 \quad \text{و} \quad (2n+1)x^2-x+m+1=0$$

$S=\frac{5}{3}\ ,\ P=\frac{1}{3}$

مثال) اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-5x+1=0$ برابر α و β باشند،معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر α^3 و β^3 باشند.

$S_{\text{جدید}}=\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

$P_{\text{جدید}}=\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\beta)^3=$

$x^2-\underset{\text{جدید}}{S}x+P=0$

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم:

برای بحث در وجود ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم به علامت Δ و برای تعیین علامت ریشه‌ها به علامات حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها یعنی $P=\frac{c}{a}$ و $S=\frac{-b}{a}$ به صورت زیر توجه می‌کنیم:

الف) $\frac{c}{a}=0 \rightarrow x'=0$ و $x''=\frac{-b}{a}$

ب) $\frac{c}{a}<0 \rightarrow$ معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد. b^2-4ac

پ) $\frac{c}{a}>0 \rightarrow$
- $\Delta<0 \rightarrow$ معادله ریشه ندارد. $\rightarrow$ بحث معنی ندارد.
- $\Delta=0 \rightarrow x'=x''=\frac{-b}{2a} \rightarrow$
  - $\frac{-b}{a}>0 \rightarrow$ معادله ریشهٔ مضاعف مثبت دارد. S
  - $\frac{-b}{a}<0 \rightarrow$ معادله ریشهٔ مضاعف منفی دارد. S
- $\Delta>0 \rightarrow$
  - $\frac{-b}{a}>0 \rightarrow$ هر دو ریشه مثبت است.
  - $\frac{-b}{a}<0 \rightarrow$ هر دو ریشه منفی است.

مثال) به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ زیر دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3=0$$

$m\in\mathbb{Z} \rightarrow \{0,1\}$

$\frac{c}{a}<0 \rightarrow \frac{2m-3}{m+1}<0$

$2m-3 \rightarrow \frac{3}{2}$, $m+1 \rightarrow -1$

	-1		$\frac{3}{2}$	
$+$		ج $-$		$+$

مثال) حدود m را طوری بیابیدکه معادلهٔ‌دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

$$(1-m)x^2-6x+3=0$$

$\Delta>0 \rightarrow 36-12(1-m)>0 \rightarrow 3-(1-m)>0 \rightarrow 3-1+m>0 \rightarrow m>-2$

$S>0 \rightarrow -\frac{b}{a}>0 \rightarrow \frac{6}{1-m}>0 \rightarrow 1-m>0 \rightarrow m<1$

$P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \rightarrow \frac{3}{1-m}>0 \quad 1-m>0 \rightarrow m<1$

$-2<m<1$

یادآوری نمودار توابع درجه دوم در حالت کلی:

در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ که آن را سهمی نیز می‌نامند، چون $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ با فرض $x_s = \frac{-b}{2a}$ و $y_s = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$ معادلهٔ سهمی به صورت $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ در می‌آید که در آن نقطهٔ $S(x_s ,y_s)$ را راس سهمی گوییم و برای رسم آن کافی‌است راس نمودار تابع $y = ax^2$ یعنی مبدا مختصات را به نقطهٔ S انتقال دهیم. اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای می‌نیمم و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای ماکزیمم است.

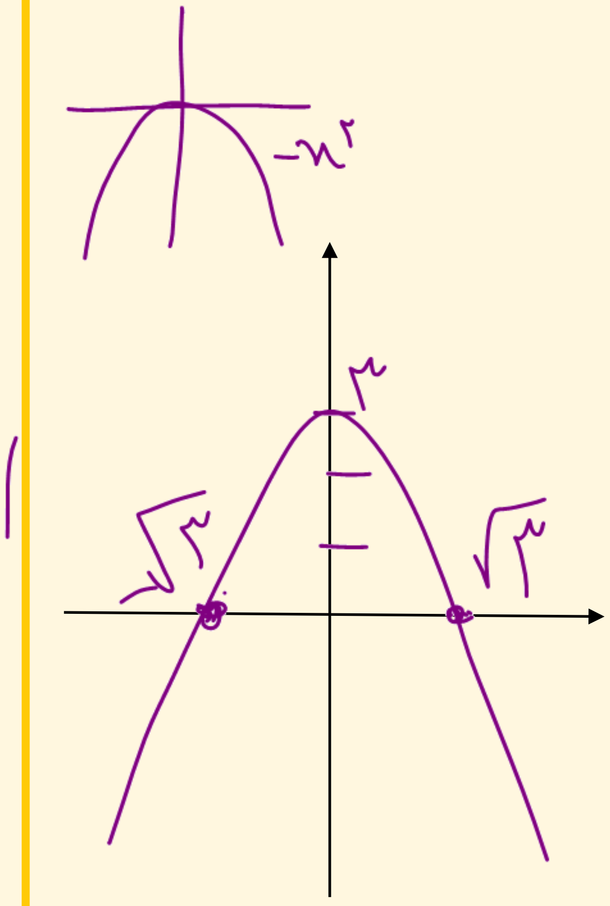
رسم سهمی : علاوه بر روش انتقال به روش زیر نیز می‌توان نمودار این توابع را رسم کرد:

ابتدا مختصات راس سهمی یعنی نقطهٔ $S\left(\frac{-b}{2a} ,f(\frac{-b}{2a})\right)$ را به دست می‌آوریم و چون خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن آن است ، مختصات دو نقطهٔ دیگر در طرفین راس و به و به فاصلهٔ مساوی از آن را تعیین می‌کنیم، بدیهی است به دلیل تقارن تابع، عرض این دو نقطه برابر خواهد شد. برای رسم دقیق‌تر، مختصات نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز در صورت وجود به دست می‌آوریم، بدیهی است که این نمودار حتماً محور عرض‌ها را قطع می‌کند اما اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ فاقد ریشه باشد، با محور طوها نقطه مشترکی ندارد.

مثال) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y=0 \rightarrow -x^2+3=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

الف) $f(x) = -x^2 + 3$

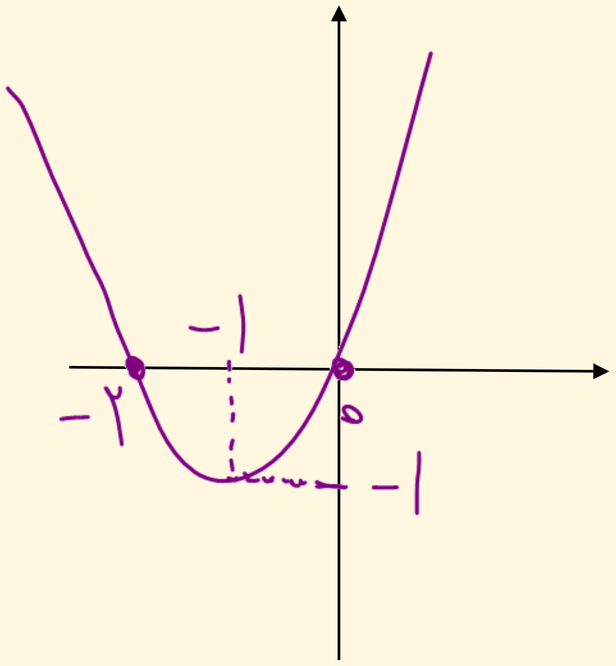


ب) $f(x) = x^2 + 2x$

$x^2+2x=0 \rightarrow x(x+2)=0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad -2$

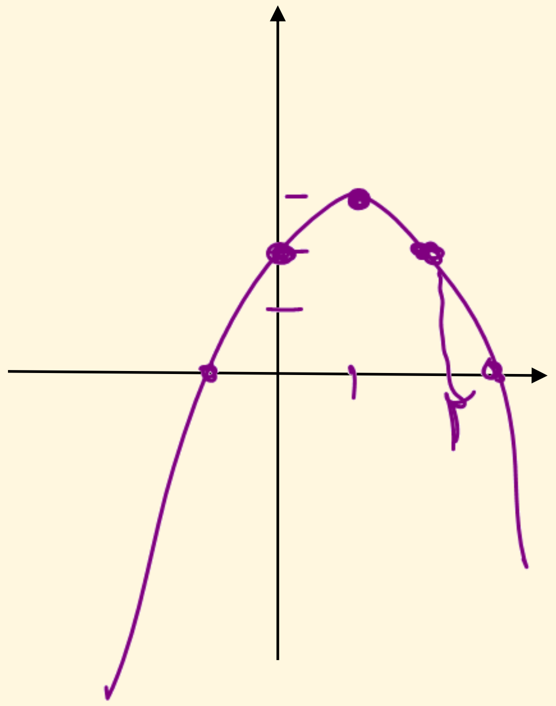


پ) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

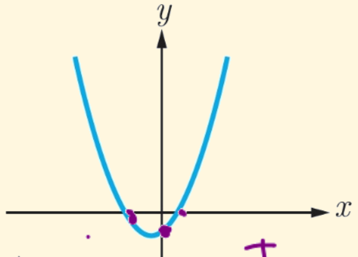
$x_s = \frac{-b}{2a}$

$y_s =$

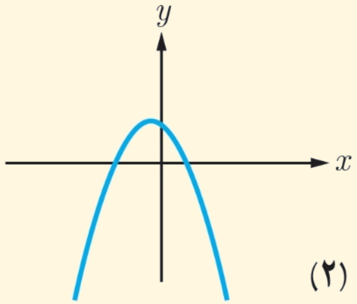
x	۰	۱	۲
y	۲	۳	۲

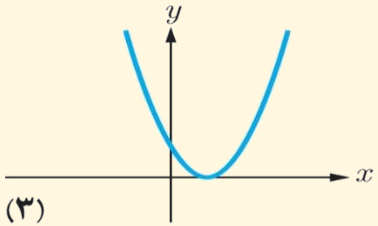


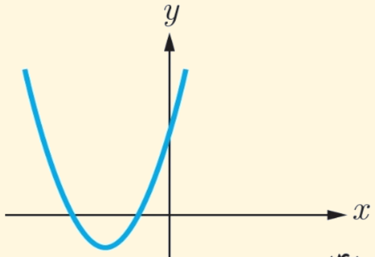
مثال) هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.
درهرمورد، علامت ضرایب a، b، c و تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.

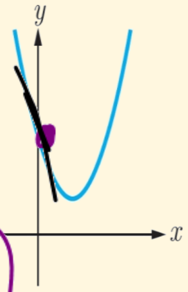

(۱)

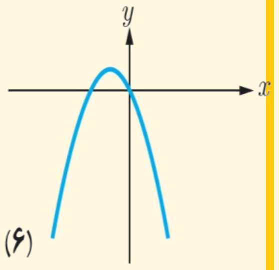
$-\frac{b}{a} < 0 \rightarrow \frac{+b}{+a} > 0$

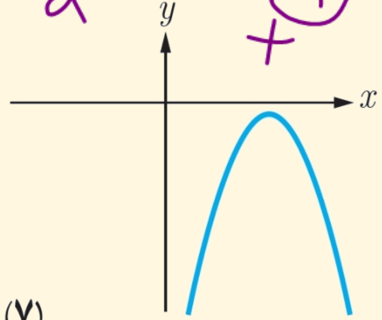

(۲)

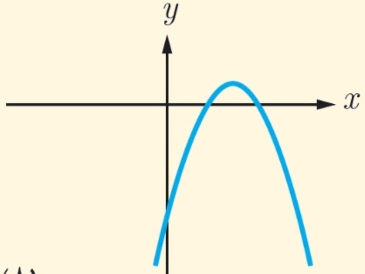

(۳)


(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)

	تعداد و علامت صفرهای تابع f	علامت Δ	علامت a	علامت b	علامت c
1	دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.	+	+	+	-
2	دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.	+	-	-	+
3	ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.	0	+	-	+
4	دو ریشهٔ منفی دارد.	+	+	+	+
5	ریشهٔ حقیقی ندارد.	-	+	-	+
6	یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ منفی دارد.	+	-	-	0
7	ریشهٔ حقیقی ندارد.	-	-	+	-
8	دو ریشهٔ مثبت دارد.	+	-	+	-

پویش جهادی

دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی وتجربی ■ پایه یازدهم

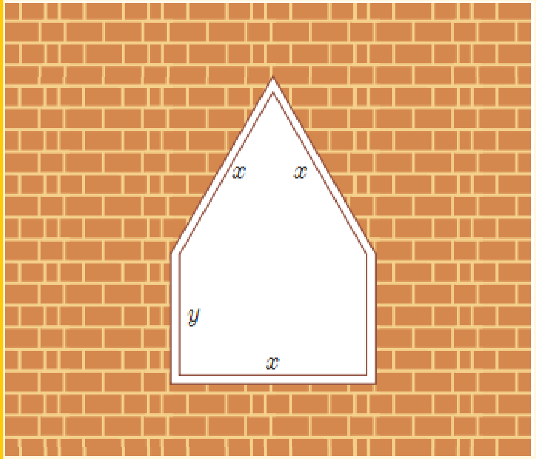
تست) به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $(m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3=0$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است؟

۱) هیچ مقدار ۲) یک مقدار ۳) دو مقدار ۴) بی‌شمار مقدار

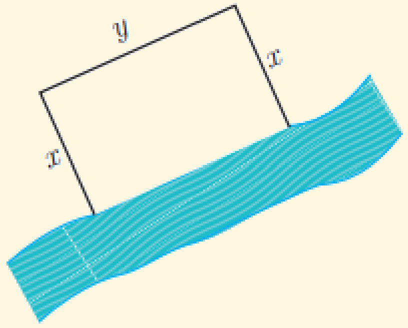
تست) به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ $(1-m)x^2-6x+3=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

۱) $m<1$ ۲) $m\geq -2$ ۳) $-2\leq m<1$ ۴) $m\leq -2$

مثال) یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرارگرفته است.اگر محیط پنجره۴m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

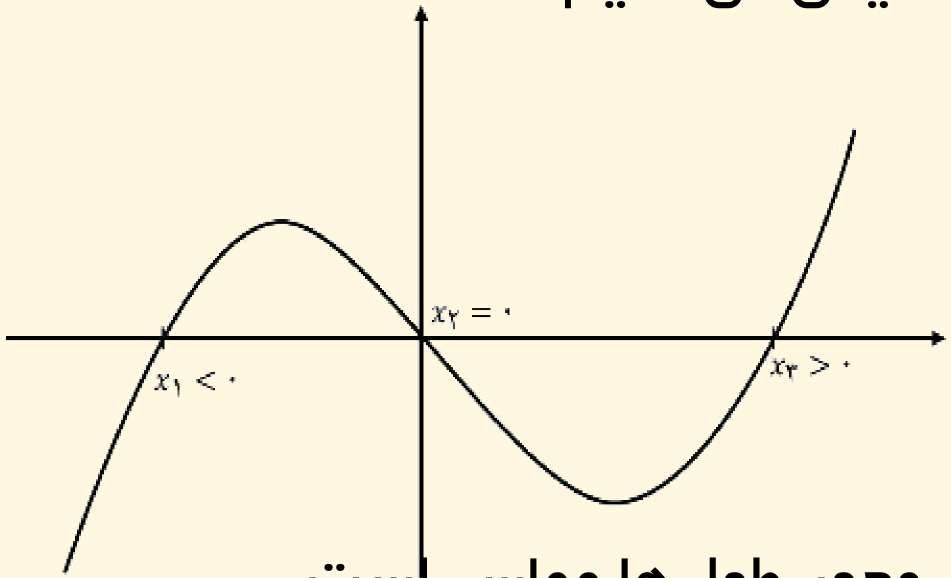


مثال) قراراست در کنار یک رودخانه،محوطه ای مستطیل شکل ایجادکنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود.اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده رادراختیارداشته باشیم،ابعاد مستطیل راطوری تعیین کنیدکه مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد



صفرهای تابع:

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنهٔ f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست. مجموعهٔ صفرهای تابع $y=f(x)$ و یا ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را با نماد $A.S\ (Answer\ Set)$ نمایش می‌دهیم.



مثلاً اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد،
در این‌صورت معادله‌ی $f(x)=0$ دارای
یک ریشه منفی (x_1)، یک ریشه صفر (x_2)
و یک ریشه مثبت (x_3) می‌باشد.

دقت کنید که در ریشه‌های مضاعف، نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است.

مثال) صفرهای توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = x^3 - 4x$

ب) $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$

پ) $h(x) = x^4 - 10x^2 + 16$

مثال) صفرهای تابع $f(x) = \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6$ را بیابید.

مثال۲۲) مجموع ریشه های معادله $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0$ را بیابید

نکتهٔ) اگر $x=\alpha$ یکی از صفرهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$یا یکی ازریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ باشد، برای یافتن سایر صفرها، چون $x-\alpha$ یکی از عوامل چندجمله‌ای $f(x)$ است، کافی است چندجمله‌ای $f(x)$ را بر دوجمله‌ای $x-\alpha$ تقسیم کرده و عامل دیگر $f(x)$ را بیابیم، اگر خارج قسمت این تقسیم را $Q(x)$ بنامیم، داریم: $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ سپس از معادلهٔ $Q(x)=0$ سایر ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آوریم.

مثال) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-4x+4$ برابر 2 باشد، سپس سایر صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

نکته) تابع درجه ۲ در حالت کلی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد که برای به دست آوردن پارمتر های c,b,a از نکات زیر نیز میتوان کمک گرفت

اگر سه نقطه عادی به صورت $A(x_1 ,y_1)$ و $B(x_2 ,y_2)$ و $C(x_3 ,y_3)$ باشند.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + AB$ معادله خط

اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند.ضابطه تابع وطول راس سهمی به صورت زیرمی باشد

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$

طول راس سهمی $= \quad x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{\alpha+\beta}{2}$

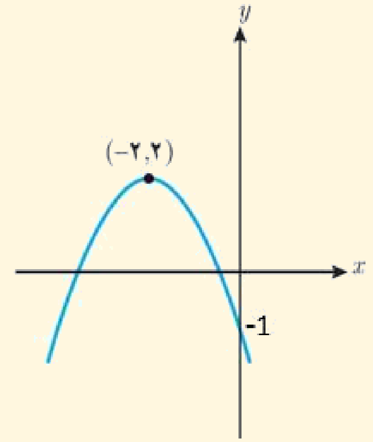
اگر نقطه (x_s,y_s) راس تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند. ضابطه تابع بصورت زیر می باشد .

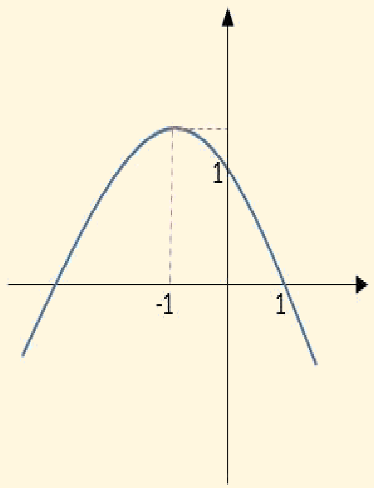
$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

تست) اگر اعداد $\frac{1}{2}$ و $\frac{-2}{3}$صفرهای یک تابع درجه دوم بوده و مقدار ماکزیمم این تابع برابر $\frac{49}{72}$ باشد، مقدار این تابع به ازای $x = 1$ کدام است؟

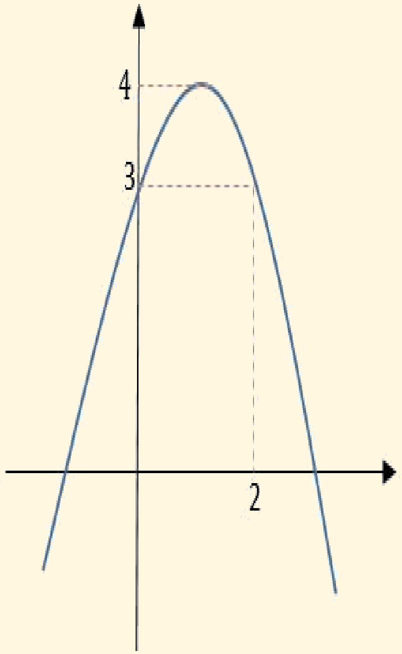
۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{-5}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

مثال) هریک ازسهمی های زیر،نمودارحالتی از تابع$f(x) = ax^2 + bx + c$ است .مجموع و حاصلضرب صفرهای تابع ومقادیر c,b,a را به دست آورید.

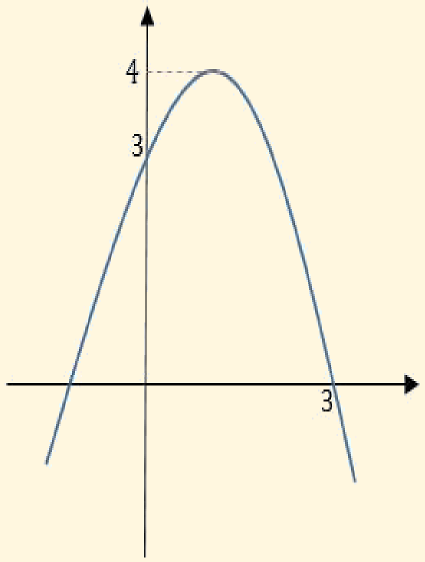




مثال) حاصل ضرب و حاصل جمع صفر های تابع درجه دوم زیر را بیابید.



مثال) حاصل ضرب وحاصل جمع صفر های تابع درجه دوم زیر را بیابید.(روش اول)



تست) نمودارتابع درجه دوم $f(x) = mx^2 + 4x + 2m - 4$ محور های مختصات رادر سه نقطه قطع می کندواین سه نقطه تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند.مجموع مقادیر ممکن برای mکدام است؟ $ca = -1$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پویش جهادی

دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی وتجربی ■ پایه یازدهم

تست) راس سهمی و صفرهای تابع $f(x) = x^2 + bx + b$ تشکیل یک مثلث قائم الزاویه می دهند.حاصلضرب مقادیر ممکن برای b کدام است. $\Delta = 4$

۱) ۴−　　۲) ۴　　۳) $۲\sqrt{۳}$　　۴) $-۲\sqrt{۳}$

مثال) اگر نمودار تابع $f(x) = (2m+3)x^2 - 3mx + 3m - 5$ از هر چهار ناحیه گذشته ودارای می‌نیمم باشد، حدود m را بیابید

مثال۲۹) به ازای چند مقدار از $k \in N$ عدد ۲ بین ریشه های تابع زیر قرار می گیرد.

$$f(x) = -x^2 + 5x - 2^k$$

مثال) اگر نمودار تابع $f(x) = mx^2 - 4mx + 2 - m$ فقط از ناحیهٔ سوم نگذرد، حدود m را بیابید

مثال ۳۱) حاصل ضرب ریشه های معادله $(x^2 + 3x)^2 - 18(x^2 + 3x) + 72 = 0$ رابیابید.

حل معادلات به روش هندسی :

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی ازنقاط تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها ومقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

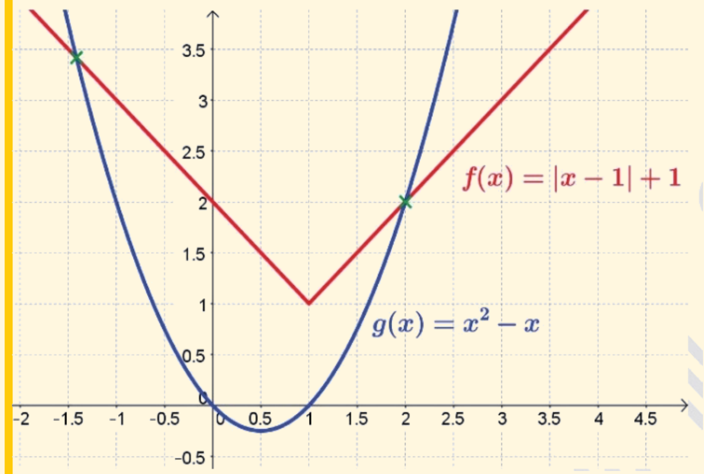
نکتهٔ مهم: محل تقاطع این دو تابع ریشهٔ سادهٔ معادله $f(x) = 0$ و محل تماس این دو تابع، ریشهٔ مضاعف (و یا شبه مضاعف معادله) خواهد بود. ضمناً اگر محل تلاقی یا تماس در سمت راست محور عرض‌ها واقع باشد، این ریشه مثبت و اگر در سمت چپ محور عرض‌ها باشد، این ریشه منفی و اگر در مبدا مختصات باشد، این ریشه صفر می‌باشد. دقت کنید استفاده از روش هندسی، در مسائلی مفیدتر است که تعداد و علامت ریشه‌ها را بخواهند.

مثال) تعداد جواب های معادله های زیر را مشخص کنید.

$$|x| = x^2 - 2x$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$$

مثال) تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی بیابید.



حل نا معادلات به روش هندسی :

$$x^2 > \sqrt{x}$$

$$|x| \geq x^2 - 2x$$

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$x^2 - 3x - \sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\sqrt{|x|} > |x| - 6$$

$$x^2 - 5x - \sqrt{x} - 6 < 0$$

به نام خدا

حسابان۱(درس سوم از فصل اول)

ریاضی ۲(درس سوم از فصل اول)

معادلات گویا و گنگ

درس ۳:معادلات شامل عبارات گویا

هر معادله شامل عبارات گویا را یک معادلهٔ گویا گوییم.

برای حل این معادلات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) در صورت امکان دامنهٔ تعریف معادله را تعیین می‌کنیم (مخرج هیچ یک از کسرها نباید صفر باشد).

۲) مخرج کسرها را در صورت امکان به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و طرفین معادله را در «ک.م.م» مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا به یک معادلهٔ چند جمله‌ای برسیم.

۳) از حل این معادله، ریشه‌ها را یافته و آن‌ها را با دامنهٔ تعریف مقایسه می‌کنیم تا ریشهٔ قابل قبول به دست آید.

نکات مهم:

۱) اگر تعیین دامنهٔ تعریف به راحتی امکان‌پذیر نباشد، جواب‌ها را در مخرج‌ها امتحان می‌کنیم تا هیچ مخرجی را صفر نکنند.

۲) بعضی از این معادلات با تغییر متغیر مناسب حل می‌شوند.

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{x-4}{x-2}$$

مثال) اگریکی از ریشه‌های معادلهٔ $\frac{8}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x+a}+\frac{x+1}{x-1}$ برابر -6 باشد ریشه‌های دیگر را در صورت وجود بیابید.

مثال) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را تنهایی انجام دهند؟

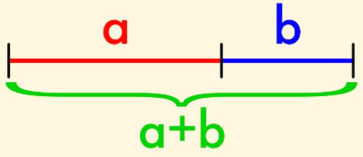
مثال) فاصلهٔ بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود وپس ازدو ساعت توقف همین مسیر رابرمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد.درصورتی که سرعت حرکت کشتی درمسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشترازسرعت آن در خلاف جریان آب باشدسرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

مثال) در یک مغازهٔ ماهی های تزئینی ، ماهی های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصدی نگهداری می‌شوند.یک کارگرمبتدی۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴درصدی ساخته است اگردرمغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگرناچار باشدهمان رابه محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را به طور تقریبی باید تبخیر کند تا این محلول رابه غلظت موردنظررساند؟

نسبت طلایی: این نسبت عددی گنگ است که با حرف یونانی فی نمایش داده می‌شود.

مقدار دقیق آن برابر $\boxed{\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ و مقدار تقریبی آن برابر $\boxed{\varphi \cong 1/61803398}$ است

زیرا این نسبت زمانی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگتربه بخش کوچکتر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگتر باشد. پس با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \to a^2 = ab + b^2 \to a^2 - ab - b^2 = 0 \to a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} \to \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

نسبت طلایی یکی از زیبایی‌های دنیای ریاضی است که رد آن را در خیلی جاهای طبیعت می‌توان مشاهده کرد، از نسبت طول اندام‌های انسان گرفته تا چشم‌نوازترین آثار معماری و حتی رشد مارپیچ دانه‌های گل آفتابگردان. بسیاری از هنرمندان معتقدند شکل‌هایی که درآن‌ها نسبت طلایی رعایت شده است،چشم‌نوازترین شکل‌های ممکن راتشکیل می‌دهند.

مثال) اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازۀ طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد،طول و عرض زمین چقدر است؟

نکته:اگر در یک زمین مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم: $\boxed{\frac{L}{w}=\frac{L+w}{L}}$

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل **نسبت طلایی** برقرار است.

مثال) اگر مساحت یک مستطیل که طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است برابر ۱۰ باشد محیط مستطیل چند است؟

معادلات شامل عبارات گنگ:

هر معادله که در آن، حداقل یک مجهول زیر رادیکال باشد را یک معادلهٔ گنگ یا اصم گوییم.برای حل این معادلات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) در صورت امکان بهتر است بین تعداد رادیکال‌ها در طرفین معادله، توازن ایجاد می‌کنیم.

۲) دامنهٔ تعریف معادله را در صورت امکان تعیین می‌کنیم.

۳) طرفین معادله را با توجه به فرجه‌ها به توان n می‌رسانیم. (اگر فرجه‌ها برابر نباشند، طرفین را به توان «ک.م.م» فرجه‌ها می‌رسانیم)

۴) معادلهٔ جدید را تا جایی ساده می‌کنیم که به یک معادلهٔ چندجمله‌ای برسیم.

۵) از حل معادلهٔ چندجمله‌ای، ریشه‌ها را یافته و با دامنهٔ تعریف مقایسه می‌کنیم تا ریشهٔ خارجی وارد مسئله نگردد.

۶) در بعضی معادلات گنگ، ممکن است پس از به توان رساندن طرفین، به معادلهٔ گنگ دیگری برسیم، در این صورت باید دامنهٔ تعریف معادلهٔ جدید را یافته و با دامنهٔ اولیهٔ اشتراک بگیریم. بدیهی است که جواب‌هایی قابل قبول‌اند که در اشتراک این دو دامنه واقع باشند.

$$\sqrt{5x-1}+3=0$$

$$x+\sqrt{5x+10}=8$$

$$17 + \sqrt{169 - x^2} = x \quad \rightarrow$$

$$\sqrt{1 - x^2} - x = 0 \qquad \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{1-3x}=\sqrt{1+x}$$

$$\sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}+2 \rightarrow$$

$$\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2-10x+9}=\mathrm{x}-1$$

$$2x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$$

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=4$$

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}=4$$

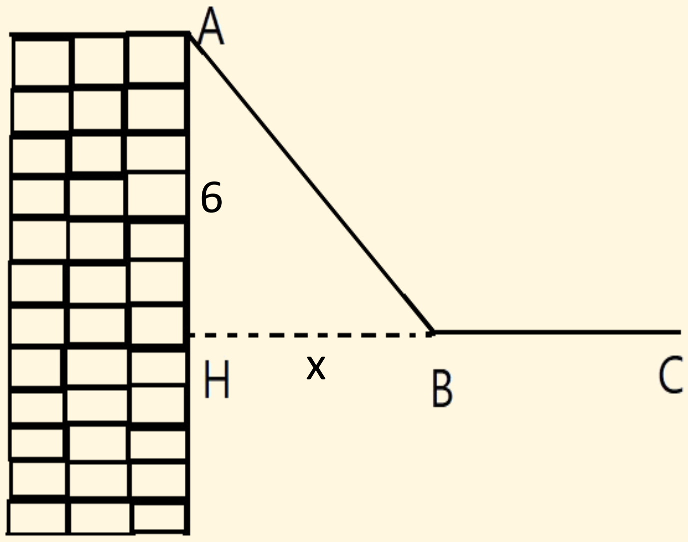
$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x \qquad \rightarrow$$

$$x-\sqrt{2-x}\geq 0$$

تست) مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{5-x^2} \geq 2x$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال) یک بدلکار سینما از ساختمانی با کم کردن ارتفاعش به اندازهٔ ۶ متر از نقطهٔ A به نقطهٔ B و سپس از نقطهٔ B تا نقطهٔ C روی طناب به صورت افقی راه می‌رود.اگر فاصلهٔ نقطهٔ C تا ساختمان ۱۲ متر باشد، چنانچه بدلکار برای طی کردن هر متر از فواصل اریب و افقی به ترتیب به میزان ۹۸ و ۷۰ کیلوکالری انرژی مصرف نماید و او در کل برای طی مسیر مورد نظر به اندازهٔ ۱۲۶۰ کیلوکالری انرژی مصرف کرده باشد.



الف) فاصلهٔ نقطهٔ B از پای ساختمان را بیابید.

ب) اگر بدلکار مستقیماً از A به C برود، چقدر کالری مصرف خواهد کرد؟

به نام خدا
حسابان۱
درس چهارم از فصل اول
قدر مطلق

پویش جهادی

دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

رشته ریاضی وتجربی

پایه یازدهم

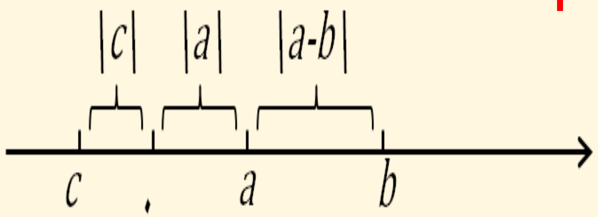
درس۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

یادآوری:

درسال قبل با مفهوم قدرمطلق و برخی ازویژگی‌های آن آشنا شدید.همانطورکه می‌دانید اگر$u \in R$دراینصورت قدرمطلق u را با نماد $|u|$نمایش داده به صورت زیرتعریف می کنیم :

$$|u| = \begin{cases} u & ; u > 0 \\ -u & ; u \le 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |u| = \begin{cases} u & ; u \ge 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |u| = \begin{cases} u & ; u > 0 \\ 0 & ; u = 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases}$$

نکته) اگر $b \in R$ و a، منظور از فاصلهٔ a تا b ، عدد $|a-b|$است.



فاصله نقطهٔ متناظر با عدد a روی محور تا مبدا مختصات را $|a|$ می نامند

نکته) اگر u یک متغیر حقیقی و n عددی طبیعی باشد، همواره داریم:

الف) $\sqrt[2n]{u^{2n}} = |u|$

ب) $\sqrt[2n+1]{u^{2n+1}} = u$

مثال) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-5-(-3)|$

ب) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$

پ) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

ث) $|x-2|$

ح) $|2-x|-|x+3|$

خ) $|x^2-1|$

رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق:

برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق، معمولاً ازروش تعیین علامت و تبدیل تابع به یک تابع چندضابطه‌ای استفاده می‌کنیم.

مثال) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 4} =$

چ) $y = |x+3| - |x-2|$

ح) $y = |x-1| + |x+2|$

پ) $y = |x+1| - |x-2|$

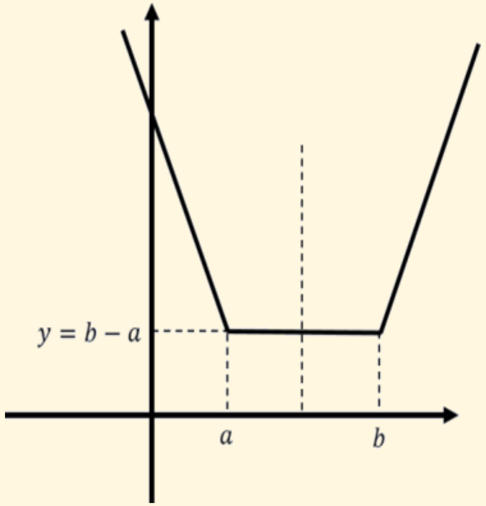
ب) $y = |x+1| + |x-2|$

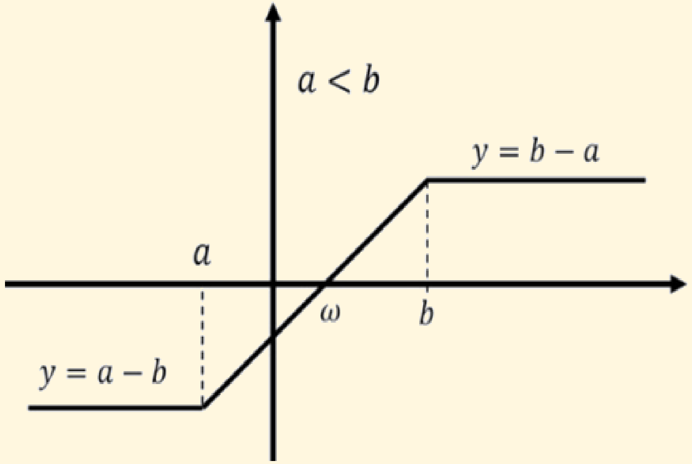
نکتهٔ) نمودار توابع به فرم $y = |x-a| + |x-b|$ که در آن $a < b$ است، تشکیل شده ازدو نیم خط مایل و یک پاره خط افقی بین آنها (**تابع گلدانی**) و داریم:

الف) در این توابع خط $x = \frac{a+b}{2}$ محورتقارن است.

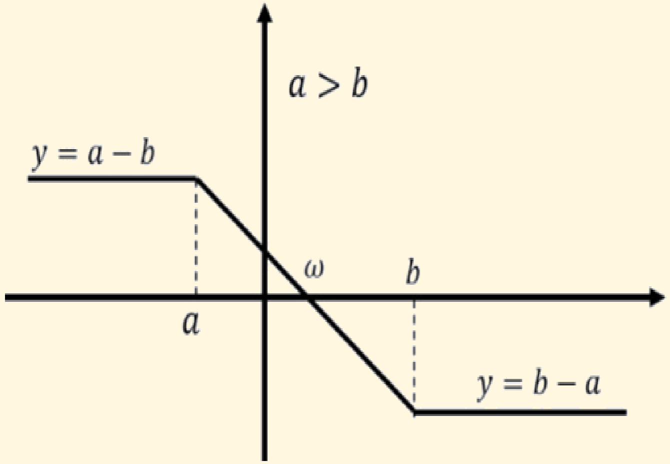
ب) برد این توابع عبارتست از: $R_f = [b-a, +\infty)$

پ) اگر $a = -b$ باشد نمودار این تابع نسبت به محور عرض‌ها متقارن خواهد بود. مانند: $y = |x+2| + |x-2|$





نکتهٔ) نمودار توابع بفرم $y = |x - a| - |x - b|$ ، تشکیل شده از دو نیم خط افقی و یک پاره خط مایل بین آنها **(سرسره ای یا آبشاری)** به یکی از شکل‌های روبرو است.



دراین توابع داریم:

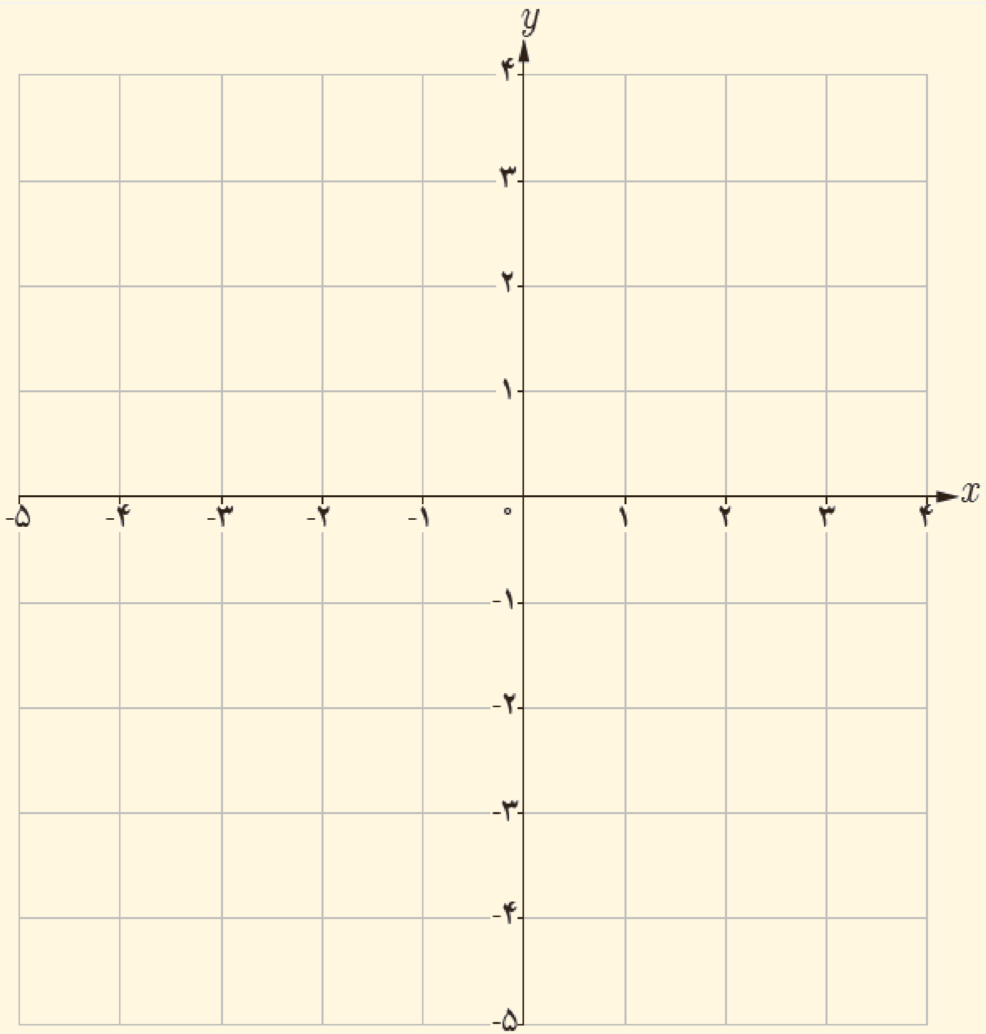
الف) نقطه $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ ω مرکز تقارن است.

ب) برد آنها عبارتست از: $R_f = [-|a - b|,|a - b|]$

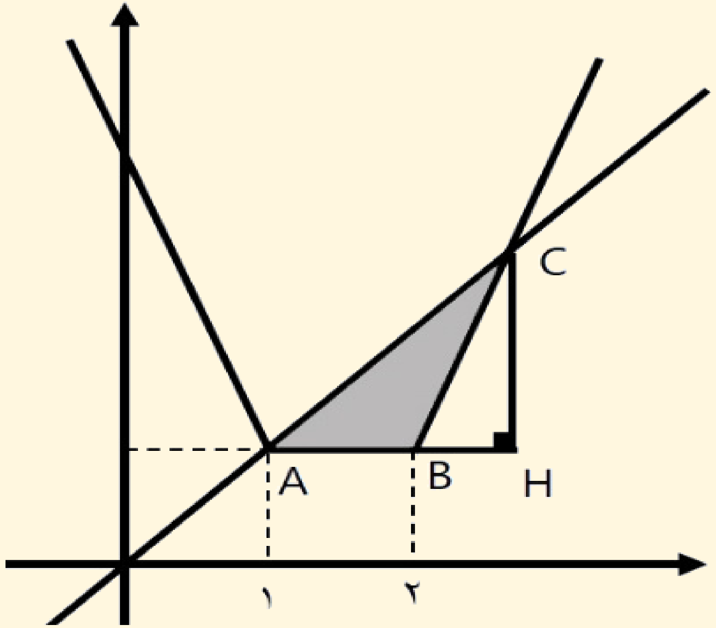
پ) اگر $a = -b$ باشد مبداء مختصات مرکز تقارن آنها خواهد بود. مانند: $y = |x + 2| - |x - 2|$

ج) $y = |2x - 1| + |x + 2|$

خ) $y = \sqrt[3]{x^3}\sqrt{x^2} - x^2 + 1 =$



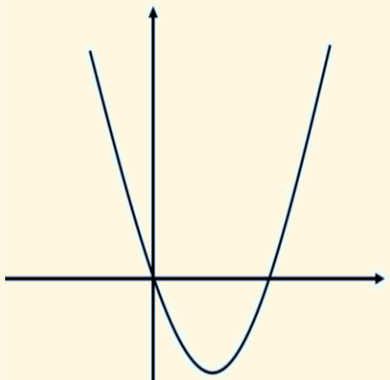
مثال) سطح بین تابع $y = |x-2| + |x-1|$ و خط $y = x$ را بیابید.

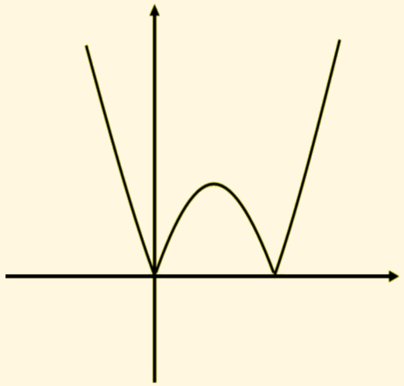


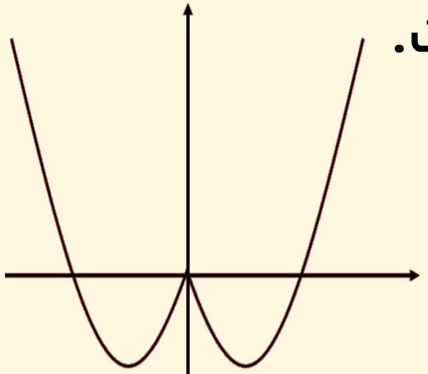
حالات خاص رسم نمودار تابع شامل قدر مطلق:

۱) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی‌است ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده،سپس بخشی از نمودار را که زیرمحور طولها واقع شده حذف کرده ، قرینهٔ آن را نسبت به محور طولها رسم کنیم.

۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ کافی‌است نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده ، سپس بخشی از نمودار را که در سمت چپ محور عرضها واقع شده حذف کرده، قرینهٔ باقیمانده را نسبت به محور عرضها رسم کنیم . دقت کنید که نمودار تابع $y = f(|x|)$، نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.


$y = f(x)$


$y = |f(x)|$


$y = f(|x|)$

مثال۴) نمودار توابع زیر را رسم کنید .

پویش جهادی

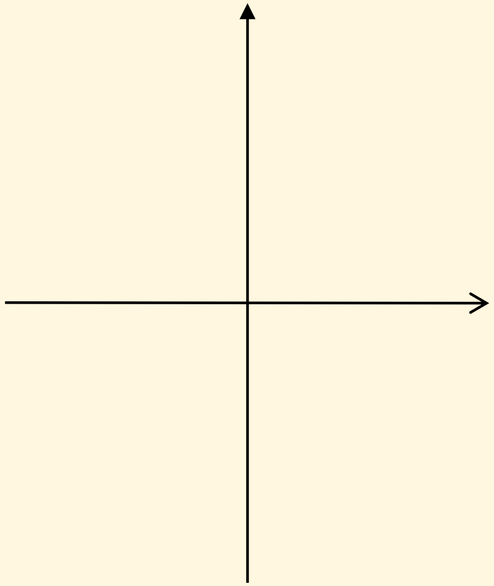
دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

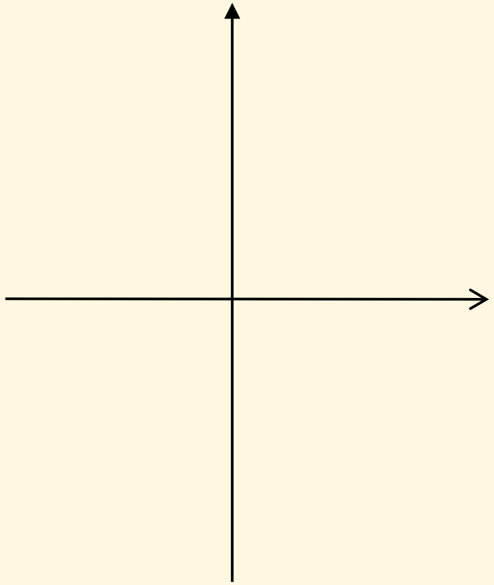
قدر مطلق استاد حسنی

رشته ریاضی وتجربی ■ پایه یازدهم

الف) $f(x) = |x^2 - 4|$

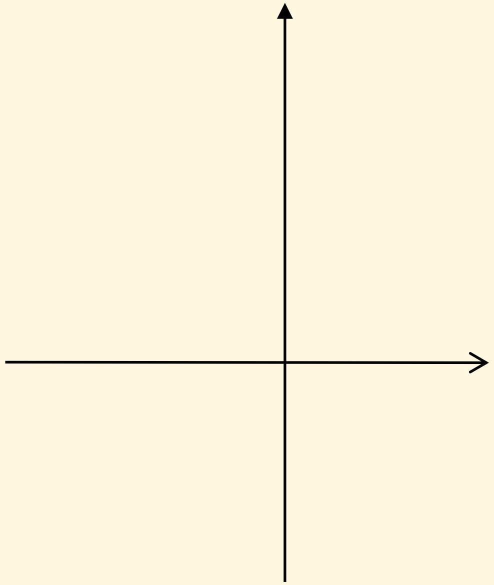


$y = x^2 - 4$

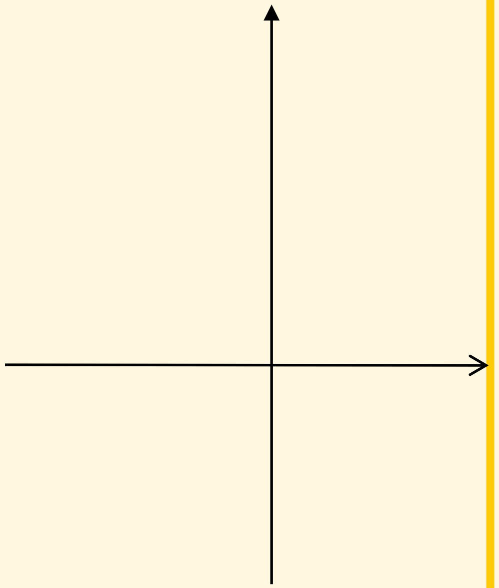


$y = |x^2 - 4|$

ب) $f(x) = |x^2 + 2x|$

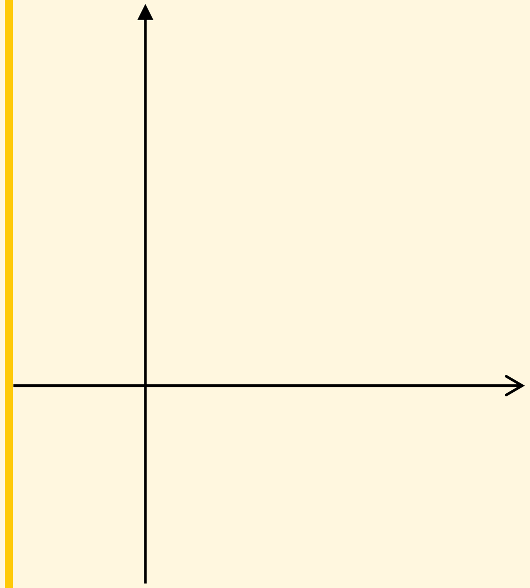


$y = x^2 + 2x$

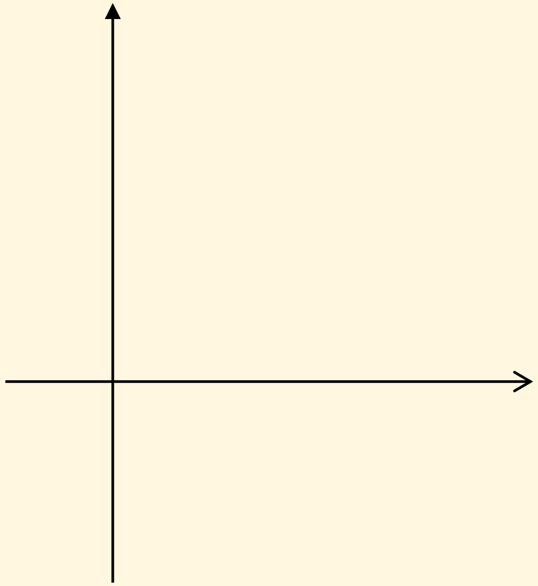


$y = |x^2 + 2x|$

پ) $f(x) = |-x^2 + 4x - 3|$

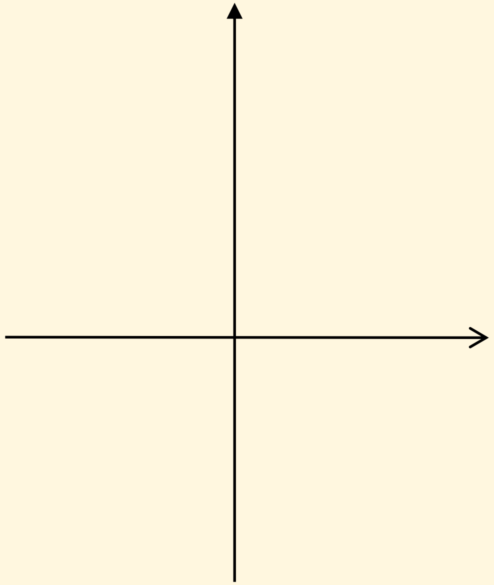


$y = -x^2 + 4x - 3$

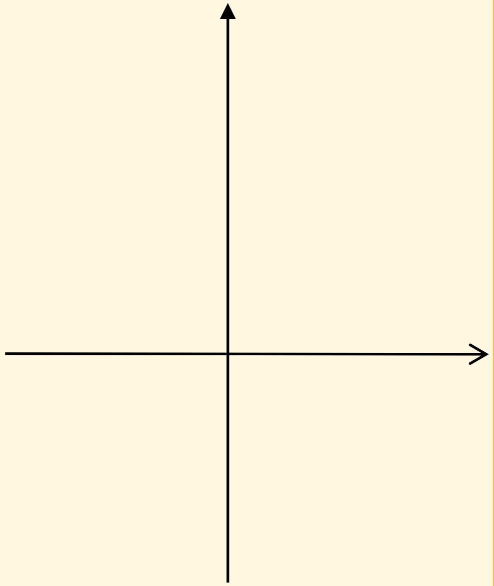


$y = |-x^2 + 4x - 3|$

ت) $f(x) = ||x| - 1|$

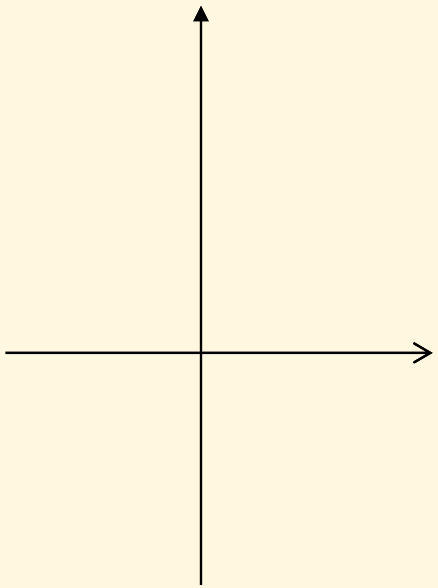


$y = |x| - 1$

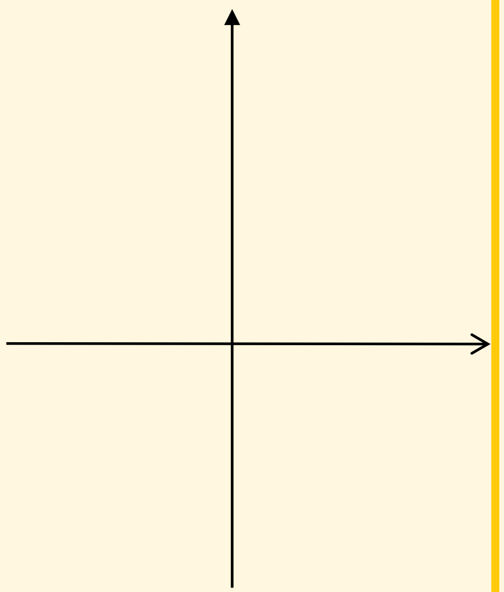


$y = ||x| - 1|$

ح) $f(x) = x^2 - 3|x|$

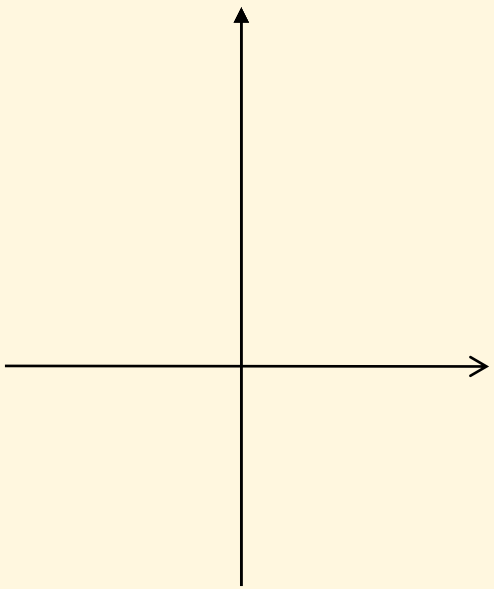


$y = x^2 - 3x$

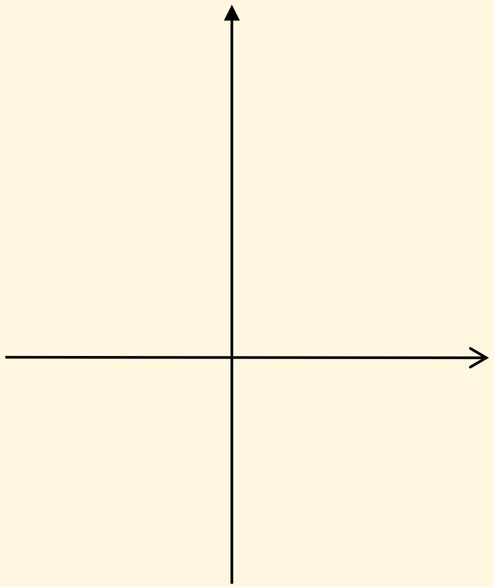


$y = |x|^2 - 3|x|$

ث) $f(x) = (|x| - 1)^2$



$y = (x-1)^2$



$y = (|x| - 1)^2$

خواص کلی قدرمطلق در تساوی‌ها :

شماره	ویژگی	مثال
1	$\lvert u^{2n}\rvert = u^{2n}$	$\lvert (x+1)^2\rvert = (x+1)^2$
2	$\lvert u^{2n+1}\rvert = \lvert u\rvert^{2n+1}$	$\lvert (2x-1)^3\rvert = \lvert 2x-1\rvert^3$
3	$\lvert -u\rvert = \lvert u\rvert$	$\lvert x-y\rvert = \lvert y-x\rvert$
4	$\lvert u\rvert = u \Leftrightarrow u \geq 0$	$\lvert 2x+6\rvert = 2x+6 \to 2x+6 \geq 0 \to x \geq -3$
5	$\lvert u\rvert = -u \Leftrightarrow u \leq 0$	$\lvert x-2\rvert = 2-x \to x-2 \leq 0 \to x \leq 2$

ادامه خواص کلی قدرمطلق در تساوی ها:

شماره	ویژگی	مثال
6	$\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$	$\lvert x-1\rvert+\lvert y+2\rvert=0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$
7	$\lvert u\rvert=a \Leftrightarrow u=\pm a$	$\lvert x-2\rvert=5 \rightarrow x-2=\pm 5 \rightarrow x=-3,7$
8	$\lvert u\rvert=\lvert v\rvert \Leftrightarrow u=\pm v$	$\lvert 2x-1\rvert=\lvert x\rvert \rightarrow 2x-1=\pm x \rightarrow x=\frac{1}{3}\,,1$
9	$\lvert uv\rvert=\lvert u\rvert\lvert v\rvert$	$\lvert x^2-3x+2\rvert=\lvert(x-1)(x-2)\rvert=\lvert x-1\rvert\lvert x-2\rvert$
10	$\left\lvert\frac{u}{v}\right\rvert=\frac{\lvert u\rvert}{\lvert v\rvert}$	$\lvert tanx\rvert=\left\lvert\frac{sinx}{cosx}\right\rvert=\frac{\lvert sinx\rvert}{\lvert cosx\rvert}$

حل معادلات شامل قدرمطلق:

حالت اول:

$$|f(x)| = a \quad \rightarrow f(x) = \pm a$$

$$|x^2 + 3x + 2| = 6$$

$$\big||2x - 1| - 7\big| = 4$$

حالت دوم: $|f(x)| = f(x) \rightarrow f(x) \geq 0$

$$|x^2 - 3x| = x^2 - 3x \rightarrow$$

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4 \rightarrow$$

حالت سوم: $|f(x)| = -f(x) \rightarrow f(x) \leq 0$

$$|x^2 - 4x - 5| = 4x + 5 - x^2$$

$$|x^2 - 4| = 4 - x^2 \rightarrow$$

حالت چهارم: $|f(x)| = |g(x)| \rightarrow f(x) = \pm g(x)$

$$|x^2 - 3x| = |x^2 - 2x + 3|$$

$$|x - 1||x + 2| = |x + 6|$$

حالت پنجم:

$$|f(x)| = g(x) \xrightarrow{g(x)\geq 0} f(x) = \pm g(x)$$

$$|f(x)| = g(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = g(x) \\ f(x) \leq 0 \rightarrow -f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \rightarrow$$

$$\frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

$$|x-1| = x^2 - x - 1$$

$$|x^2 - x - 1| = x - 1$$

حالت ششم:

$$|f(x)| + |g(x)| = 0 \to \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$|3x^2 - 5x + 2| + |x^3 + x^2 - 2x| = 0 \ \to$$

$$|x^2 - 3x + 2| + |x^3 - 3x^2 + 2| = 0 \ \to$$

$$x^2 - |x| - 2 = 0$$

$$|2x - 1| - |x| = 7$$

مثال۵) اگر تفاضل جواب های معادلهٔ $|x+1|+|x-2|=k$ برابر 7 باشد k را بیابید.

مثال) اگر خط $y = k$ نمودار تابع $y = |x+1| + |3-x|$ را در دو نقطه قطع کند یک ذوزنقه به مساحت $\frac{9}{2}$ تشکیل می‌شود پارامتر k را بیابید.

مثال) حدود k را طوری بیابید که معادلهٔ $|2x-x^2|=1-2k$

الف) جواب نداشته باشد.

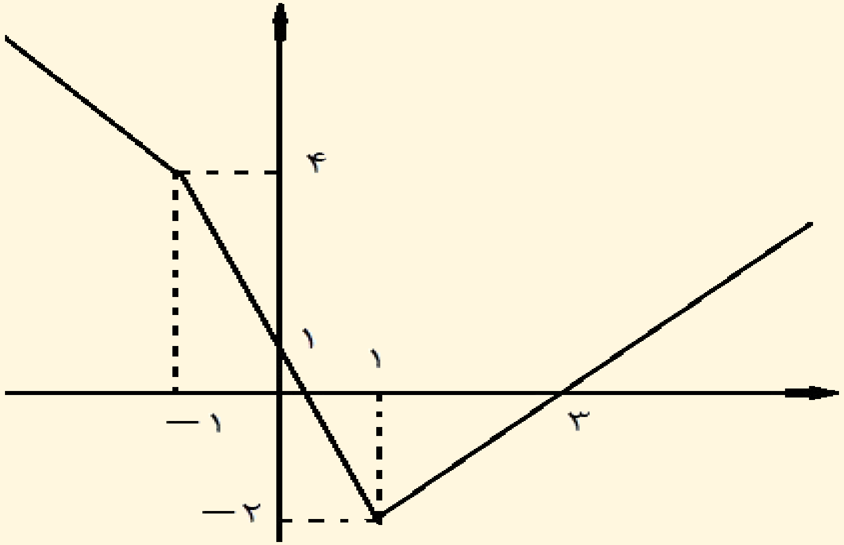
ب) فقط دو جواب داشته باشد

پ) سه جواب داشته باشد.

ت) چهار جواب داشته باشد.

مثال) در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ زیر بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

$$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}=\mathrm{m} \to 2|x-1|-|x+1|=m$$



۱) اگر $m<-2$ باشد معادله ریشه ندارد.

۲) اگر $m=-2$ باشد معادله یک ریشهٔ مثبت برابر $x=1$ دارد.

۳) اگر $-2<m<1$ باشد معادله دو ریشهٔ مثبت دارد.

۴) اگر $m=1$ باشد معادله یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر دارد.

۵) اگر $m>1$ باشد، معادله یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد

مثال) اگر $f(x) = x^2 + 2x$ باشد. نمودار تابع $g(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$ را رسم کنید.

خواص کلی قدرمطلق در نامساوی ها:

شماره	ویژگی	مثال
1	$-\lvert u\rvert \le u \le \lvert u\rvert$	$-\lvert 3\rvert \le 3 \le \lvert 3\rvert$ و $-\lvert 2x-1\rvert \le 2x-1 \le \lvert 2x-1\rvert$
2	$\lvert u\rvert \le a \Leftrightarrow -a \le u \le a$	$\lvert 3x\rvert \le 6 \to -6 \le 3x \le 6 \to -2 \le x \le 2$
3	$\lvert u\rvert \ge a \Leftrightarrow u \le -a$ یا $u \ge a$	$\lvert 2x\rvert \ge 4 \to 2x \le -4$ یا $2x \ge 4 \to x \le -2$ یا $x \ge 2$
4	$\lvert u+v\rvert \le \lvert u\rvert + \lvert v\rvert$	$\lvert 3x+2y\rvert \le 3\lvert x\rvert + 2\lvert y\rvert$
5	$a \le \lvert u\rvert \le b \Leftrightarrow$ $-b \le u \le -a$ یا $a \le u \le b$	$2 \le \lvert x\rvert \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x \le -2$ یا $2 \le x \le 5$

حل نامعادلات شامل قدر مطلق:

برای این‌کار همانند درس معادلات، چنانچه بتوان از خواص اخیر استفاده کرد نامعادله را حل می‌کنیم در غیر اینصورت لازم است از روش تعیین علامت استفاده کنیم.

$$|3x-5|<3$$

$$|x^2-5x|\geq 6$$

$$|x^2-5x|\leq 6$$

$$1 \leq |2x+1| \leq 7$$

$$\big||x-2|-3\big| < 4$$

$$\left|\frac{x+1}{2-x}\right| \geq 2$$

$$6+\sqrt{|x|}-|x|>0 \rightarrow$$

$$|x+1|+|x-2|<5$$

$$|x^2-2| \geq |2-3x|$$

$|2x - 3| > x$

$|2x + 1| - |2 - x| > 5x -$

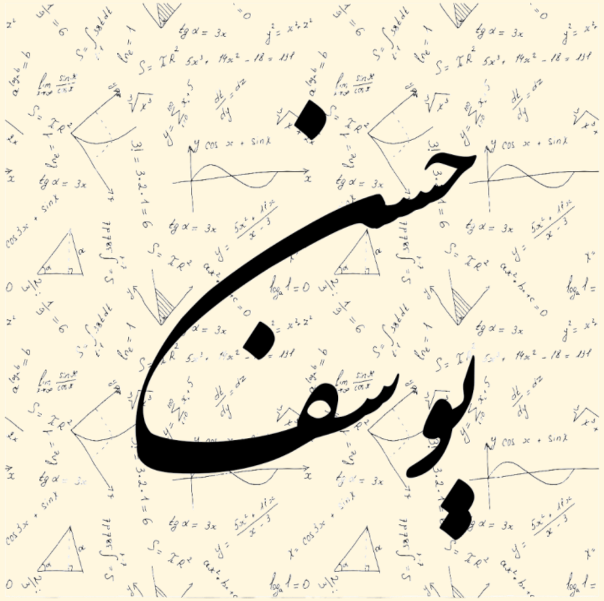
مثال) اگر دربازه (a,b) نمودار تابع $y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار $y=2x+|x|$ باشد. طول نقطه وسط این بازه را بیابید.

نامساوی مثلثی $|u+v| \le |u| + |v| \rightarrow \begin{cases} |u+v| = |u| + |v| & \Leftrightarrow uv \ge 0 \\ |u+v| < |u| + |v| & \Leftrightarrow uv < 0 \end{cases}$

مثال) مجموعه جواب معادلهٔ $|x^2+x-5| = |x^2-1| + |x-4|$ را بیابید.

مثال) مجموعه جواب نامعادلهٔ $|2x-3| < |x-1| + |x-2|$ را بیابید

به نام خدا
حسابان۱(درس پنجم از فصل اول)
ریاضی۲(درس اول از فصل اول)
هندسه تحلیلی



پویش جهادی

دبیرستان ماندگار البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

رشته ریاضی وتجربی ■ پایه یازدهم

درس۵:آشنایی با هندسهٔ تحلیلی

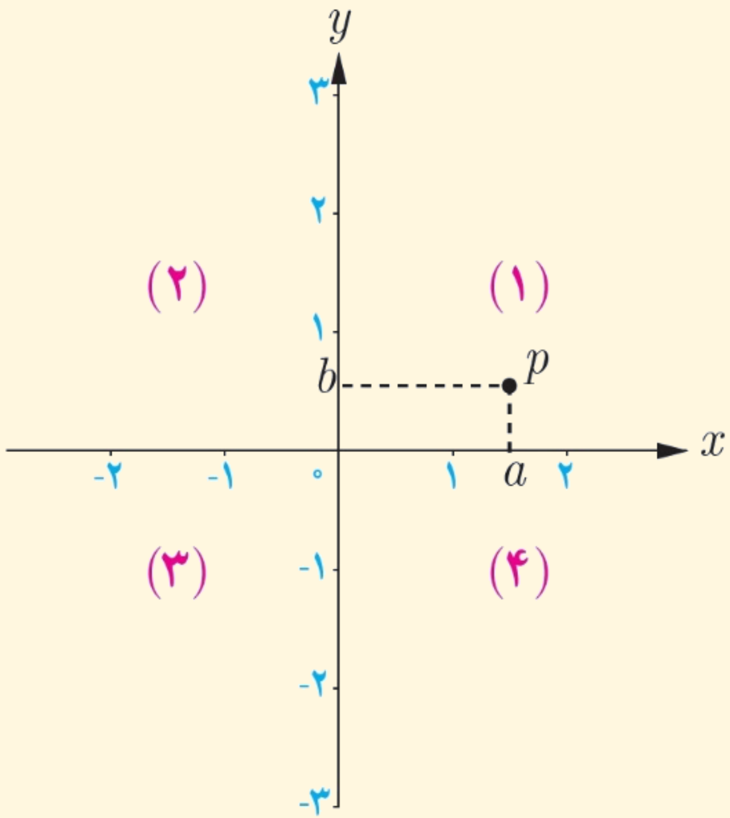
یادآوری:

درسال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

به هر نقطهٔ P در صفحهٔ مختصات یک زوج مرتب $(a\,,b)$ نظیرمی‌شود به این زوج مختصات نقطهٔ P گفته می‌شود.

طول نقطهٔ p را با x_P و عرض آن را با y_P نشان می‌دهیم.

در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحهٔ مختصات آشنا می‌شویم



مثال) حدود m را چنان بیابید که نقطهٔ $P(m^2-4m+3\ ,|m+1|-2)$

الف) در ربع اول واقع باشد.

ب) در ربع چهارم واقع باشد.

پ) روی محور طول‌ها باشد.

ت) روی محور عرض‌ها باشد

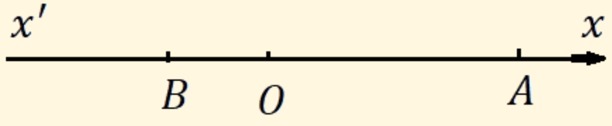
ث) مجموع طول و عرض آن برابر ۲ باشد

فاصلهٔ بین دو نقطه:

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو نقطه، دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف) زمانی که هر دو نقطه روی محور طول‌ها (یا عرض‌ها) باشند.

از دستور زیربه دست می‌آید.

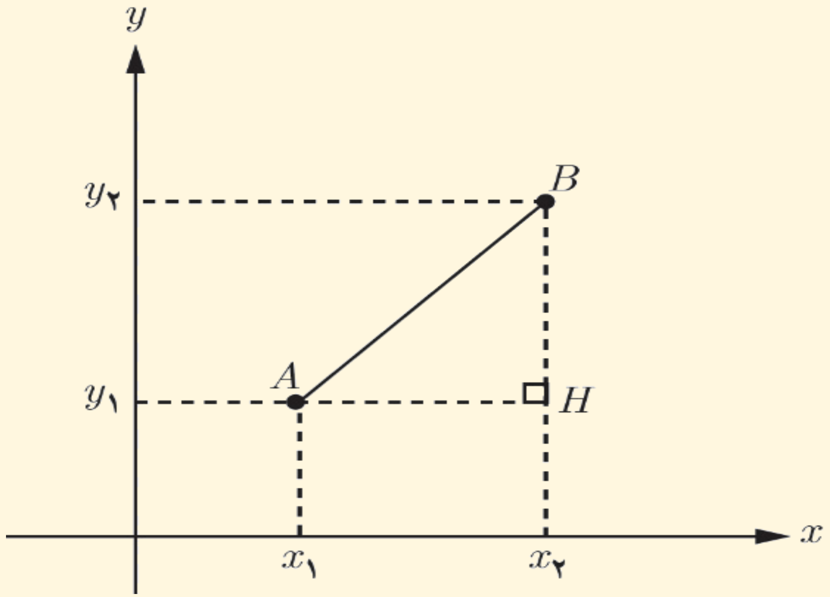


$$\boxed{|AB| = |x_B - x_A|} \qquad \boxed{|AB| = |y_B - y_A|}$$

ب) زمانی که اقلاً یکی از دو نقطه روی محورهای مختصات واقع نباشد در این صورت به طور کلی برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B از دستورزیر

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

استفاده می‌کنیم.



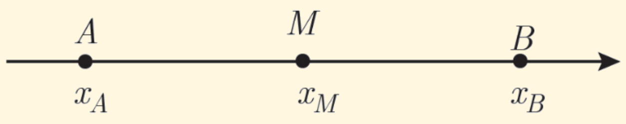
در حالت خاص، فاصلهٔ نقطهٔ A از مبداء مختصات از دستور

$$\boxed{OA = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2}}$$

به دست می‌آید.

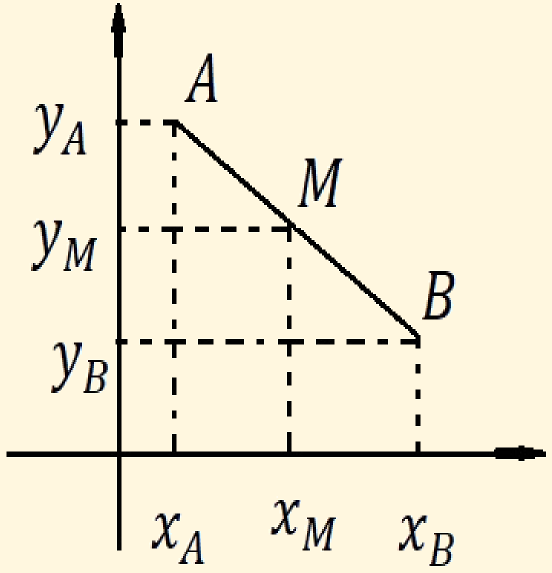
مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط:

زمانی که هر دو نقطه روی محور طول‌ها (یا عرض‌ها) باشند.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

حال فرض کنید که این دو نقطه روی یک خط مایل به صورت مقابل باشد در این صورت اگر نقطهٔ M وسط دو نقطهٔ A و B باشد



$$\boxed{M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$

معادله خط:معادله خط گذرنده ازدونقطه A و B با شیب $m = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$ از رابطه زیر به دست می آید

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال) نقاط $A(1\ ,3)$، $B(-1\ ,2)$ و $C(5\ ,-5)$ سه رأس مثلث ABC درصفحهٔ مختصات هستند

الف) طول اضلاع مثلث را به دست اورید.

ب) نشان دهید مثلث قائم‌الزاویه است.

پ) شیب دو خط AC و AB را به دست آورید.

ت) معادله میانه CM را بنویسید.

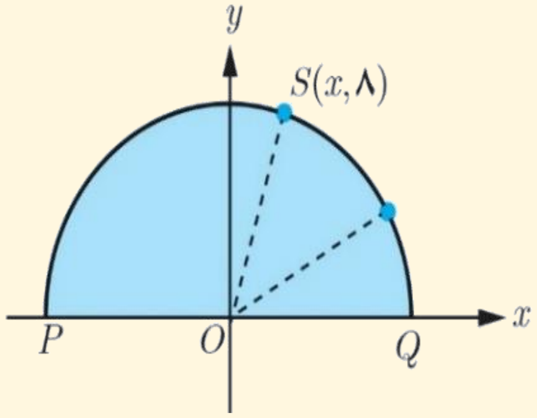
ث) معادله ارتفاع AH رابنویسید.

چ) معادله عمود منصف ضلع BC را بنویسید.

مثال) نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات ونقطهٔ $A(2\ ,4)$ برابر ۵ باشد.

مثال) نقطه‌ای روی نیمساز ربع سوم تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطهٔ $A(2,-1)$ برابر $2\sqrt{2}$ باشد.

مثال) دو نقطهٔ $A(2\ ,0)$ و $B(0\ ,2)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم را بیابید.

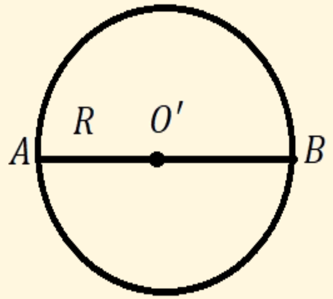


مثال) نقطهٔ $S(x\ ,8)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبرو داده شده است.

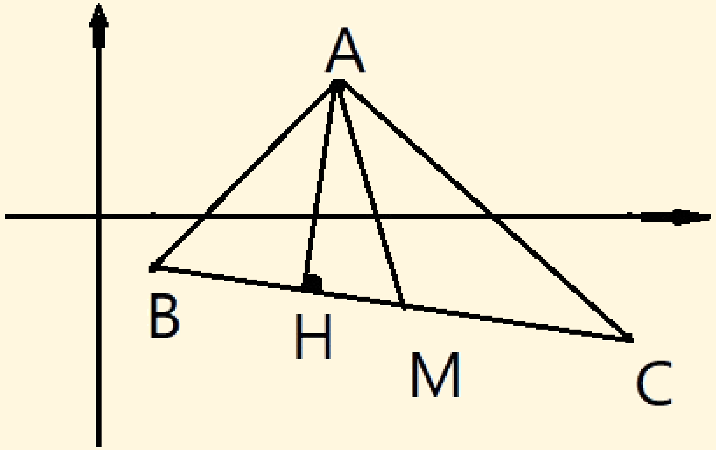
الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خطهای PS و SQ را به‌دست آورید و نشان دهید زاویهٔ $\widehat{PSQ}$ قائمه است.

مثال) نقاط $A(0\,,6)$ و $B(8\,,-8)$ دو سر قطر یک دایره‌اند. فاصلهٔ مرکز این دایره از مبدأ مختصات و محیط و مساحت این دایره را بیابید.



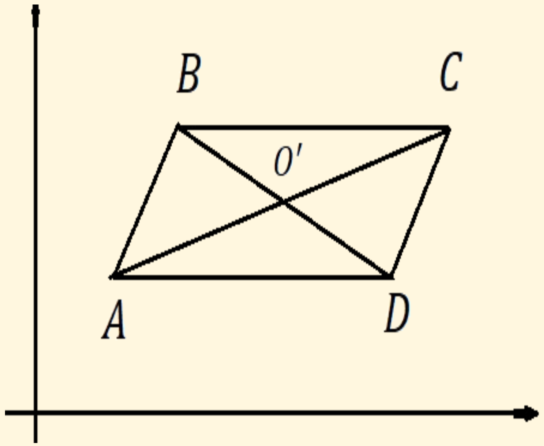
مثال) نقاط $A(4,2)$، $B(1,-1)$ و $C(8,-2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانهٔ AM باشند طول MH را به‌دست آورید



رابطهٔ بین رئوس متوازی‌الاضلاع:

هرگاه AC و BD دو قطر یک متوازی‌الاضلاع بوده (یعنی رئوس A و C روبروی هم و رئوس B و D نیز روبروی هم باشند) و این دو قطر یکدیگر را درنقطه o' قطع کنند در این صورت چون o' هم وسط AC و هم وسط BD است داریم:

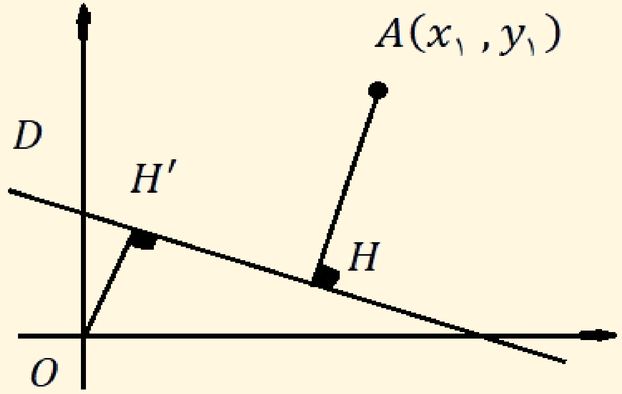
$$\begin{cases} o' = \dfrac{A+C}{2} \\ o' = \dfrac{B+D}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \rightarrow A+C = B+D \rightarrow \boxed{\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}}$$



فاصلهٔ یک نقطه از یک خط:

منظور از فاصلهٔ یک نقطهٔ خارج خط ازیک خط که همان کوتاهترین فاصلهٔ نقطه از خط است برابر با اندازهٔ خط عمودی است که ازنقطه بر خط خارج می‌شود. اگر در شکل زیر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ را از خط D به معادلهٔ ضمنی $ax+by+c=0$ بیابیم. باید مختصات نقطهٔ H (پای عمود) را یافته سپس طول عمود AH را محاسبه کنیم.

برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ H لازم است معادلهٔ خط AH را نوشته و آن را با معادلهٔ خط $D:\ ax+by+c=0$ تلاقی دهیم.توجه داشته باشید شیب خط AH برابرعکس وقرینه شیب خط D می باشد.ودرنهایت واین طول ازدستور $\boxed{AH=d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ به دست می آید .در حالت خاص فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $D:\ ax+by+c=0$ از رابطهٔ $\boxed{OH=d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ محاسبه می شود.



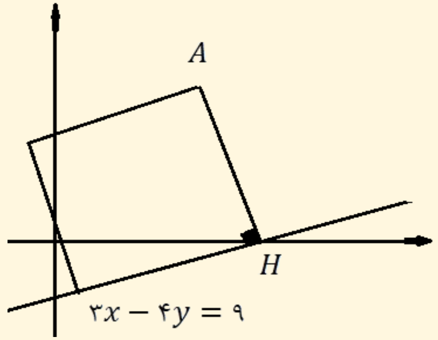
مثال۹) خط $D: 2y + x = 5$ مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ :

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(4\,,-1)$ از این خط

ب) فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط

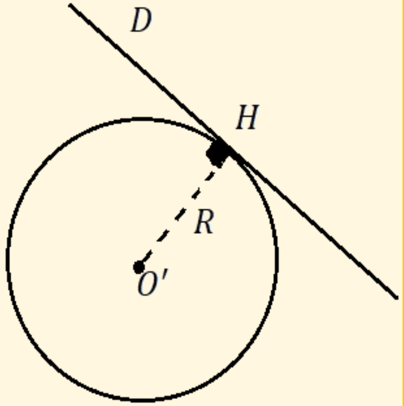
مثال۱۰) فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2\,,-3)$ از خط $3y = 2$ بیابید

مثال) اگر نقطهٔ $A(2\,,3)$ رأس یک مربع ومعادلهٔ یک ضلع مربع $3x-4y=9$ باشد. مساحت مربع چقدر است؟

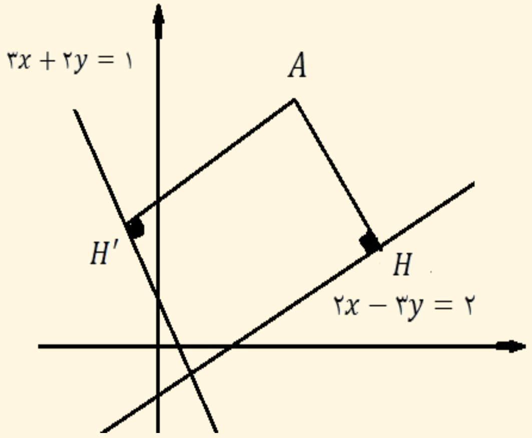


مثال) خط $D:\ 4x+3y=5$ بر دایرهٔ C به مرکز $O'(-1\,,2)$ مماس است. محیط و مساحت دایره چقدر است؟

می‌دانیم خط مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است.

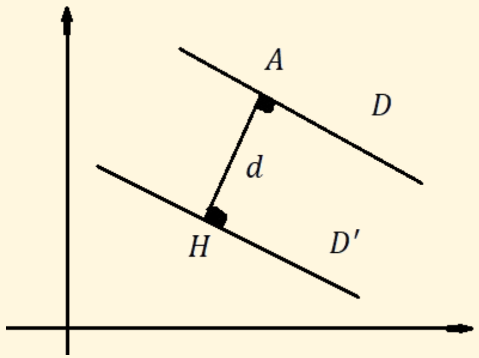


مثال) دو خط $3x+2y=1$ و $2x-3y=2$ معادله‌های دوضلع یک مستطیل ونقطهٔ $A(2\,,5)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟



فاصلهٔ دو خط موازی:

می‌دانیم اگر دو خط D و D' موازی باشند در اینصورت معادلات ضمنی آنها به صورت $D: ax + by + c = 0$ و $D': ax + by + c' = 0$ می‌باشد(گاهی پس از ساده شدن اقلاً یکی از معادلات به این صورت درمی‌آیند). برای یافتن فاصلهٔ بین این دو نقطه کافی است فاصلهٔ نقطهٔ دلخواهی از خط D را از خط D' بیابیم. این فاصله برابر است با:



فاصله نقطهٔ $H(x_1, y_1)$ ازخط $D: ax + by + c = 0$ برابر $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است وچون این نقطه روی خط به معادلهٔ $D': ax + by + c' = 0$ قرار دارد پس درآن صدق می کند

$$ax_1 + by_1 + c' = 0 \rightarrow ax_1 + by_1 = -c' \rightarrow \boxed{d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

مثال) اگر دو ضلع مربعی منطبق بر دو خط $D: y = \frac{3}{4}x + 1$ و $D': 6x - 7 = 8y$ باشند، محیط و مساحت این مربع را بیابید.

مثال) اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(1\,,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

مثال) اگر فاصلهٔ دوخط $8y=6x+k^2$ و $y=\frac{3}{4}x+1$ کمتر $\frac{1}{10}$ باشد،حدود k رابیابد.

مثال) دایره ای به مساحت 9π بر دوخط موازی وغیر منطبق $3x - 4y = 1 \,, 8y + nx = m$ مماس است مقادیر m, n رابیابید.

مثال) اگر دوخط $4x - 3y + 10 = 0$ و $4x - 3y - 30 = 0$ بر دایره ای مماس باشند ومرکز دایره برخط $y + 2x = 0$ واقع باشد مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورید.

مثال) سه ضلع مثلث ABC روی خطوط $y = 2x - 3$ و $2y + x = 4$ و $x = 6$ قرار گرفته اند.

محل تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC ازخط $3x = 4y + a$ به فاصله ۲ است.مقادیر a را بیابید.

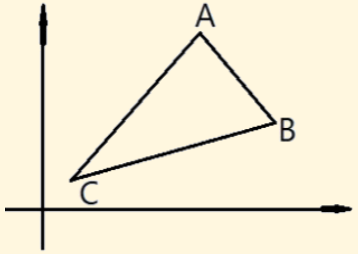
مثال) دو نقطه روی محور طول‌ها وجود دارند که فاصلهٔ آنها از خط $D: 3x + 4y = 13$ برابر ۴ می‌باشد فاصلهٔ بین این دو نقطه را بیابید.

مساحت مثلث: برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC با داشتن رئوس آن به سه روش زیرمی‌توان عمل کرد.

روش اول: طول یکی از اضلاع وارتفاع نظیرآن را یافته از رابطهٔ $\boxed{S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}}$ استفاده کنیم.

روش دوم: اندازهٔ هر سه ضلع a, b و c را یافته با فرض $2P = a + b + c$ از دستور هرون به صورت $\boxed{S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$ استفاده کنیم.که در آن P نصف محیط مثلث است.

روش سوم: از رابطهٔ $\boxed{S = \frac{1}{2}\left|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right|}$ استفاده کنیم

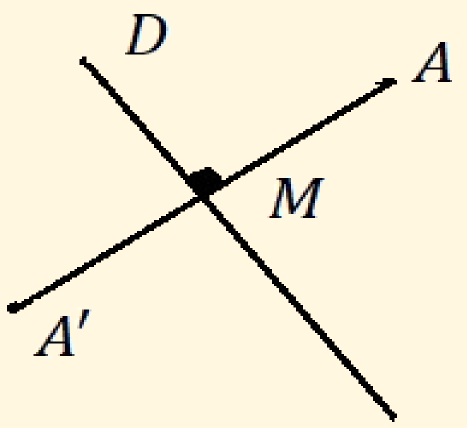


مثال) مساحت مثلث با رئوس $A(2,1)$، $B(3,-1)$ و $C(3,2)$ را بیابید.

مثال) اضلاع مثلثی منطبق برسه خط به معادلات $y=2x-1$ ، $3y+x=4$ و $2y+x=8$ هستند نوع مثلث و مساحت مثلث رابیابید.

مثال) قرینهٔ نقطه $A(-3,2)$ نسبت به خط $\mathrm{d}: x+2y+1=0$ نقطهٔ $B(2m-9\,,2n-2)$ باشد، m و n را بیابید.

مثال) قرینهٔ نقطهٔ $A(2,3)$ نسبت به خط $x+y=3$ رابیابید.



مثال) فاصلهٔ بین دو خط موازی برابر $\frac{2}{5}$ است. اگر معادلهٔ یکی از خطوط موازی $y = \frac{3}{4}x - 1$ باشند. معادلهٔ خط دیگر را بنویسید.

مثال) فاصلهٔ نقطهٔ $A(1\,, -4)$ از خط $6y + 8x = k$ برابر۴ است . مقدار k را بیابید

مثال) معادلهٔ خط مماس بر دایره‌ای به مرکز $C(1,2)$ در نقطهٔ $A(-5,5)$ واقع بر دایره را بنویسید.

مثال) معادلات خطوط نیمساز زاویه بین دوخط $2x+y-2=0$, $x-2y+1=0$ را به دست آورید.

مثال) مثلث ABC با رئوس $A(-1\ ,7)$، $B(-6\ ,-2)$ و $C(3\ ,3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادلۀ عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

ب) طول اضلاع AB و BC را محاسبه می‌کنیم

پایان فصل اول

@yousha6298