



به نام خدا حسابان ۱ (درس دوم از فصل اول) ریاضی ۲ (درس دوم از فصل اول)

معادله درجه ۲ و تابع درجه ۲





درس ۲: معادله درجه دوم

یاد آوری حل معادله درجه دوم: هر معادله به فرم کلی $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $a \neq 0$ است، یک معادله درجه دوم گوییم.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x' = 1 \text{ و } x'' = \frac{c}{a}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 0 & \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{2} \end{cases} \\ x^2 + 5x + 2 = 0 & \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{2}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=a+c} x' = -1 \text{ و } x'' = -\frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

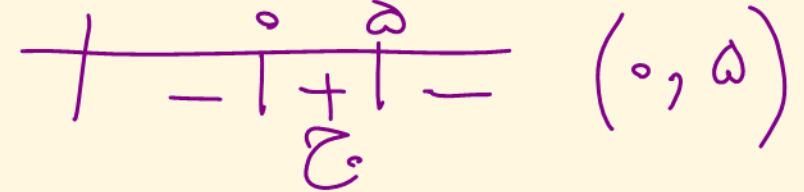
$$2x^2 + (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{b=a+c} x' = -1 \text{ و } x'' = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$



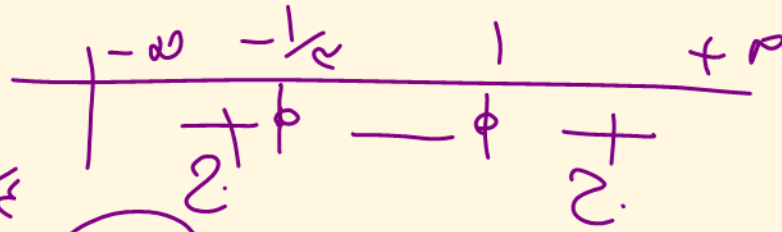
یاد آوری حل نامعادله درجه دو :

$$-x^2 + 5x > 0$$

$$-x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-x + 5) = 0$$

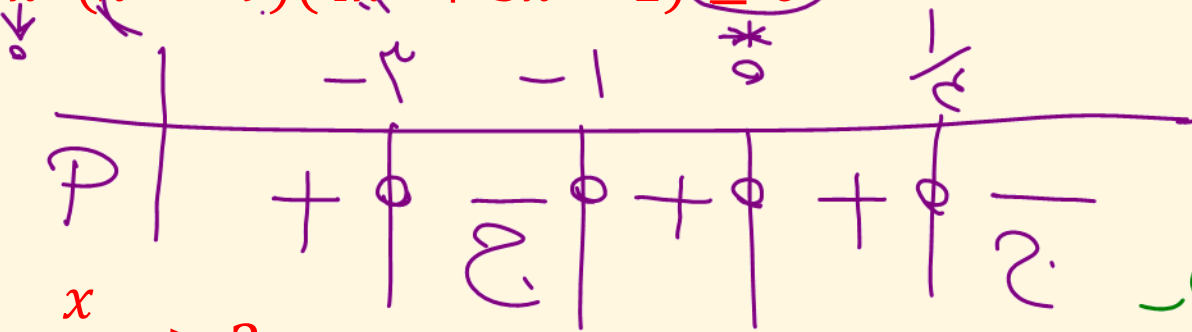


$$3x^2 - 2x - 1 \geq 0$$



$$(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$$

$$x^2(x^2 - 9)(4x^2 + 3x - 1) \leq 0$$

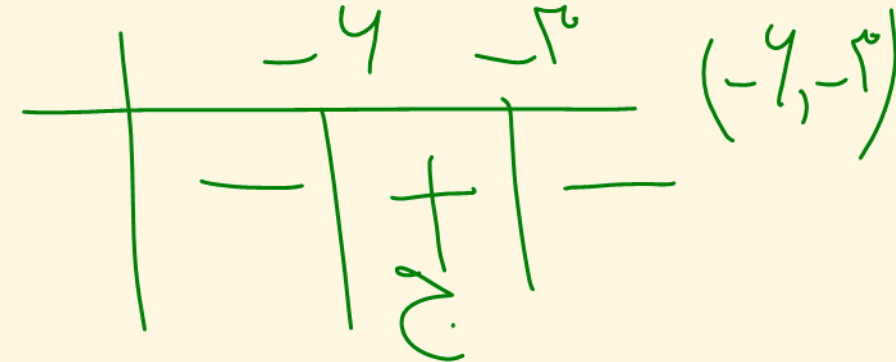


$$0, \pm 3, -1, \frac{1}{4}$$

$$[-3, -1] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$$

$$\frac{x}{x+3} > 2 \rightarrow$$

$$\frac{x}{x+3} > 2 \rightarrow \frac{x - 2x - 4}{x+3} > 0 \rightarrow \frac{-x-4}{x+3} > 0$$





مثال) اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر را بیابید.

$$x = \frac{c}{a} = \frac{v}{۴}$$

$$۴(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0$$

$$۴ + m - 7 = 0 \rightarrow m = 3$$

تست) اگر عدد $x = 1$ ریشه مضاعف معادله $(m-3)x^2 + nx + 4 - m = 0$ باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

$(x-1)^2$

$$\frac{-9}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{9}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{-5}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{2} \text{ (۱)}$$

$$(m-3)x^2 + nx + 4 - m = (m-3)(x-1)^2$$

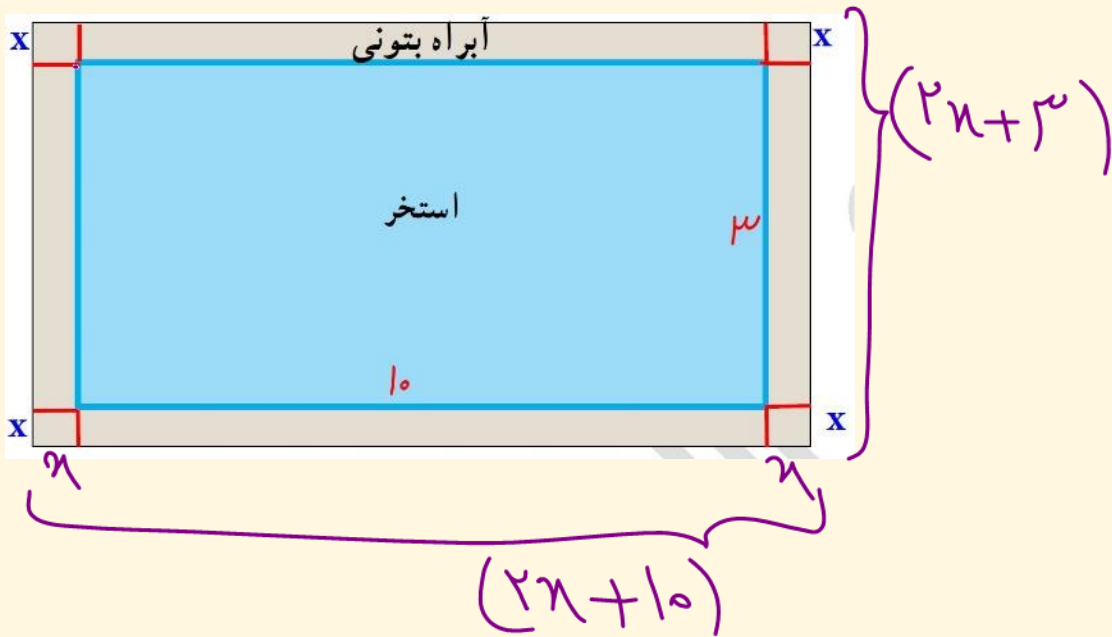
$$(m-3)x^2 + nx + 4 - m = (m-3)x^2 - 2(m-3)x + m-3$$

$$۴ - m = m - 3 \rightarrow 2m = 7 \rightarrow m = \frac{7}{2}$$

$$n = 2\left(\frac{7}{2} - 3\right) = 7 - 4 = 1$$



مثال) یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



$$(2x+10)(2x+3) = 30 + 14$$

$$4x^2 + 26x + 30 = 44$$

$$4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$(2x-1)(2x+14) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \checkmark \\ 2x+14=0 \rightarrow x = -7 \times \end{array} \right\}$$

$$2x+14=0 \rightarrow x = -7 \times$$



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

می‌دانیم معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ دارای دو ریشه

$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است. حال اگر این ریشه‌ها را جمع، ضرب و تفریق کنیم، خواهیم داشت:

جمع ریشه

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \rightarrow \boxed{S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}}$$

ضرب ریشه

$$P = \alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \rightarrow \boxed{P = \alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P \rightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3P \rightarrow \boxed{\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP}$$



$$D = |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \boxed{D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

$$D = |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = \sqrt{S^2 - 2P - 2P} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

$$\rightarrow \boxed{|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P}} \rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = \sqrt{S^2 - 4P} & \alpha > \beta \\ \alpha - \beta = -\sqrt{S^2 - 4P} & \alpha < \beta \end{cases}$$



$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4$$

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 8x + 5 = 0$ باشند. بدون محاسبه ریشه‌ها حاصل

عبارات زیر را بیابید. $(\alpha > \beta)$ $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$ و $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{2} = 4$

الف) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{4^2 - 2 \times \frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{11}{\frac{25}{4}}$

ب) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{S^3 - 3PS}{P}$

پ) $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1)}{(\beta+1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{\alpha\beta + \beta + \alpha + 1} = \frac{S^2 - 2P + S}{P + S + 1}$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ت) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} - 2 =$

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{(\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha})^2} = \sqrt{\alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\sqrt{\alpha\beta(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{PS + 2P\sqrt{P}} =$$

ث) $\alpha^2 - \beta^2 = \cancel{(\alpha + \beta)}(\alpha - \beta) = S\sqrt{S^2 - 4P}$



تست) اگر مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + 2ab - 1 = 0$ به ترتیب برابر 14 و 11 باشند، حاصل $|a - b|$ کدام است؟

(1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 5

$$S = \frac{-b}{a} = 14 \rightarrow a^2 + b^2 + 1 = 14 \rightarrow a^2 + b^2 = 13$$

$$P = \frac{c}{a} = 11 \rightarrow 2ab - 1 = 11 \rightarrow 2ab = 12$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 1 \rightarrow (a - b)^2 = 1 \rightarrow |a - b| = 1$$

$$\frac{3\alpha^2 + 5\alpha\beta + 3\beta^2}{4\alpha\beta^2 + 4\alpha^2\beta}$$

تست) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت کدام است؟

$$\frac{3\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\alpha\beta}{4\alpha\beta(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{3(S^2 - 4P) + 5P}{4P(S)}$$

(2) -3

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = 1 \end{cases}$$



$$S = -2, P = -1$$

تست) اگر $\alpha_1 > \alpha_2$ باشد، در معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ حاصل عبارت $2\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2$ کدام است؟

۴ $17 + 2\sqrt{2}$

۳ $17 - 2\sqrt{2}$

۲ $15 + 2\sqrt{2}$

۱ $15 - 2\sqrt{2}$

$$2\alpha^2 + 3\beta^2 = \frac{2}{5}\alpha^2 - \frac{1}{5}\alpha^2 + \frac{2}{5}\beta^2 + \frac{1}{5}\beta^2 = \frac{1}{5}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{5}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\frac{2}{5}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{5}(\beta^2 - \alpha^2) = \frac{5}{5} \frac{(S^2 - 4P)}{4+2} + \frac{1}{5} S \sqrt{\frac{S^2 - 4P}{4+2}} = 1\omega + \frac{1}{5}(-2)\sqrt{1}$$

تست) اگر در معادله $x^2 - 5mx + 16 = 0$ رابطه $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$ برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

$$S = 5m \quad P = 16$$

$$\alpha^2 = \beta$$

$$\alpha + \beta = 5m$$

۴ $-\frac{1}{2}$

۳ $\frac{1}{2}$

۲ -2

۱ 2

$$\alpha \cdot \beta = 16 \xrightarrow{\alpha^2 = \beta} \alpha \cdot \alpha^2 = 16 \rightarrow \alpha^3 = 16 \rightarrow \alpha = \pm 2 \rightarrow \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\alpha^2 + 5m + 16 = 0 \rightarrow 10m = -20 \rightarrow m = -2$$

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 9x + 2 = 0$ باشند. بدون محاسبه ریشه‌ها حاصل عبارات زیر را بیابید. ($\beta > \alpha$)

$$= 2\alpha^2 + 9\alpha\beta^2 + 7 \text{ الف)}$$

$$\text{ب) } \frac{2\alpha^2 + 2}{\beta} + \frac{9\beta}{\alpha} =$$

$$\text{پ) } 2\alpha^3 + 9\beta^2 + 2\beta$$

$$\text{ت) } 5\alpha^2 + 3\beta^2$$

$$\text{ث) } \sqrt{2\beta^2 + 2} + 3\sqrt{\alpha}$$

$$2\alpha + \beta = 7$$

مثال) اگر بین ریشه‌های معادله $x^2 - (n+2)x + 3 = 0$ رابطه $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -n + 2$ برقرار باشد، مقدار n و ریشه‌های معادله را بیابید.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 7 \\ \alpha + \beta = n + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 7 - n - 2 \rightarrow \alpha = 5 - n \\ 5 - n + \beta = n + 2 \rightarrow \beta = 2n - 3 \end{cases}$$

$$\alpha \cdot \beta = 3 \rightarrow (5 - n)(2n - 3) = 3$$

$$10n - 15 - 2n^2 + 3n = 3 \rightarrow 2n^2 - 13n + 18 = 0$$

$$n^2 - 13n + 54 = 0$$

$$(n - 9)(n - 6) = 0$$

$$n = \frac{9}{1}, n = \frac{6}{1} = 6$$

مثال) مقدار m را چنان بیابید که یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 2m^2x - 8 = 0$ مربع

$$\alpha = B^2 \quad \text{I}$$

$$\alpha + B = 2m^2 \quad \text{II}$$

$$\alpha \cdot B = -8 \quad \text{III}$$

دیگری باشد μ

$$\text{I, III} \rightarrow B^2 \cdot B = -8 \rightarrow B^3 = -8 \rightarrow B = -2$$

$$\text{II} \rightarrow (-2) + (-2) = 2m^2 \rightarrow -4 = 2m^2 \rightarrow m^2 = -2$$

مثال) اگر در معادله $x^2 - 5mx + m + 1 = 0$ چهار برابر یکی از ریشه‌ها، پنج واحد بیشتر از دیگری باشد، ریشه‌ها کدامند؟

$$\begin{cases} \alpha = \omega + B \\ \alpha + B = \omega m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - B = \omega \\ \alpha + B = \omega m \end{cases}$$

$$\alpha = \omega(m+1) \rightarrow \alpha = m+1$$

$$B = \omega m - m - 1 \rightarrow B = \omega m - 1$$

$$\alpha \cdot B = m+1 \rightarrow (m+1)(\omega m - 1) = m+1 \rightarrow \begin{cases} \omega m - 1 = 1 \rightarrow \omega = 2 \\ \omega m - 1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

مثال) به ازای کدام مقدار m ، در معادله درجه دوم $x^2 + mx + m + 7 = 0$ ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی برابر ۱۰ می باشد.

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 = 10 &\rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 10 \rightarrow \\ \alpha + \beta = -m & \\ \alpha \cdot \beta = m + 7 & \\ & \left. \begin{aligned} & (-m)^2 - 2(m+7) = 10 \rightarrow \\ & m^2 - 2m - 14 - 10 = 0 \\ & m^2 - 2m - 24 = 0 \rightarrow (m-6)(m+4) = 0 \\ & \left\{ \begin{aligned} m = -4 &\rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta > 0 \\ m = 6 &\rightarrow x^2 + 4x + 13 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$۲, ۳ \quad \begin{cases} S = \omega \\ P = \gamma \end{cases} \quad x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \omega x + \gamma = 0$$

تشکیل معادله درجه دوم:

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، بدیهی است که این معادله به

صورت $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ می‌باشد که پس از ساده کردن داریم:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

و با فرض $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ معادله مطلوب

به فرم $x^2 - Sx + P = 0$ درمی‌آید. پس برای تشکیل یک معادله درجه دوم

با داشتن ریشه‌های آن، کافی است مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را یافته و در معادله اخیر جایگزین کنیم.

مثال ۱۰ معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر $3 - \sqrt{2}$ و $3 + \sqrt{2}$ باشند.

$$S = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$$

$$P = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

مثال) اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 5x + 1 = 0$ برابر α و β باشند، معادله

درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشند.

$$S = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{25}{9} - \frac{2 \times 1}{3 \times 3}}{\frac{1}{3 \times 3}} = \frac{\frac{25}{9} - \frac{2}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{23}{9} \times \frac{9}{1} = 23$$

$$S = \frac{19}{3}$$

$$P = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0$$

$$3x^2 - 19x + 1 = 0$$

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشند، ریشه‌های

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{5}{4}} = -1$$

$$P = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

کدام معادله $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \\ x^2 + 1x - \frac{4}{5} = 0 \rightarrow 5x^2 + 5x - 4 = 0 \end{array} \right.$$

مثال) معادله درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله $2x^2 + x - 3 = 0$ باشند، راببایید.

مثال) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $3x^2 + 5x - 1 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $\frac{1}{2\alpha+1}$ و $\frac{1}{2\beta+1}$ است

نکته مثال معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض است، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش:

الف) قرینه ریشه‌های این معادله باشد.

$$y = -x \rightarrow x = -y \rightarrow a(-y)^2 + b(-y) + c = 0 \rightarrow \boxed{ay^2 - by + c = 0}$$

ب) عکس ریشه‌های این معادله باشد.

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y} \rightarrow a\left(\frac{1}{y}\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}\right) + c = 0 \rightarrow \boxed{cy^2 + by + a = 0}$$

پ) عکس و قرینه ریشه‌های این معادله باشد.

$$y = \frac{-1}{x} \rightarrow x = \frac{-1}{y} \rightarrow a\left(\frac{-1}{y}\right)^2 + b\left(\frac{-1}{y}\right) + c = 0 \rightarrow \boxed{cy^2 - by + a = 0}$$

ت) k برابر ریشه‌های این معادله باشد.

$$y = kx \rightarrow x = \frac{y}{k} \rightarrow a\left(\frac{y}{k}\right)^2 + b\left(\frac{y}{k}\right) + c = 0 \rightarrow \boxed{ay^2 + bky + ck^2 = 0}$$

(مثال) اگر ریشه‌های معادلات زیرعکس هم باشند مقدار عبارت $m^2 + n^2$ را بیابید.

$$(2n + 1)x^2 - x + m + 1 = 0 \quad \text{و} \quad (m - 1)x^2 - 3x + n = 0$$

$$\rightarrow S = \frac{5}{2}, P = -\frac{1}{2}$$

(مثال) اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 5x + 1 = 0$ برابر α و β باشند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر α^3 و β^3 باشند.

$$\begin{aligned} S &= \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3\alpha\beta S \\ P &= \alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = \end{aligned}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم:

برای بحث در وجود ریشه‌های معادله درجه دوم به علامت Δ و برای تعیین علامت ریشه‌ها به علامت حاصل ضرب و مجموع ریشه‌ها یعنی $P = \frac{c}{a}$ و $S = \frac{-b}{a}$ به صورت زیر توجه می‌کنیم:

الف) $\frac{c}{a} = 0 \rightarrow x' = 0$ و $x'' = \frac{-b}{a}$ ب) $\frac{c}{a} < 0 \rightarrow$ معادله دو ریشه مختلف‌العلامه دارد. $b^2 - 4ac$

بحث معنی ندارد. \rightarrow معادله ریشه ندارد. $\Delta < 0$

$\frac{c}{a} > 0$ (پ) \rightarrow $\Delta = 0 \rightarrow x' = x'' = \frac{-b}{2a} \rightarrow$ $\begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ معادله ریشه مضاعف مثبت دارد. $\rightarrow S$
 $\frac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ معادله ریشه مضاعف منفی دارد. $\rightarrow S$

$\Delta > 0 \rightarrow$ $\begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ هر دو ریشه مثبت است.
 $\frac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ هر دو ریشه منفی است.

مثال) به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله زیر دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$$

$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{2m-3}{m+1} < 0$

$m \in \mathbb{Z} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}$

مثال) حدود m را طوری بیابید که معادله دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

$$(1 - m)x^2 - 6x + 3 = 0$$

$\Delta > 0 \rightarrow 36 - 12(1-m) > 0 \rightarrow 2 - (1-m) > 0 \rightarrow 1 + m > 0 \rightarrow m > -1$

$S > 0 \rightarrow \frac{b}{a} > 0 \rightarrow \frac{6}{1-m} > 0 \rightarrow 1-m > 0 \rightarrow m < 1$

$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{3}{1-m} > 0 \rightarrow 1-m > 0 \rightarrow m < 1$

$m < 1$

یادآوری نمودار توابع درجه دوم در حالت کلی:

در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ که آن را سهمی نیز می‌نامند، چون

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{با فرض } x_s = \frac{-b}{2a} \text{ و } y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} \text{ معادلهٔ سهمی به}$$

صورت $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ در می‌آید که در آن نقطهٔ $S(x_s, y_s)$ را راس سهمی گوییم

و برای رسم آن کافی است راس نمودار تابع $y = ax^2$ یعنی مبدا مختصات را به نقطهٔ S انتقال دهیم. اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای می‌نیمم و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای ماکزیمم است.

رسم سهمی : علاوه بر روش انتقال به روش زیر نیز می‌توان نمودار این توابع را رسم کرد:

ابتدا مختصات راس سهمی یعنی نقطهٔ $S \left(\frac{-b}{2a}, f \left(\frac{-b}{2a} \right) \right)$ را به دست می‌آوریم و چون خط $x = \frac{-b}{2a}$

محور تقارن آن است، مختصات دو نقطهٔ دیگر در طرفین راس و به و به فاصلهٔ مساوی از آن را تعیین می‌کنیم، بدیهی است به دلیل تقارن تابع، عرض این دو نقطه برابر خواهد شد. برای

رسم دقیق‌تر، مختصات نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز در صورت وجود به

دست می‌آوریم، بدیهی است که این نمودار حتماً محور عرض‌ها را قطع می‌کند اما اگر معادلهٔ

$f(x) = 0$ فاقد ریشه باشد، با محور طوها نقطه مشترکی ندارد.

مثال) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

الف) $f(x) = -x^2 + 3$

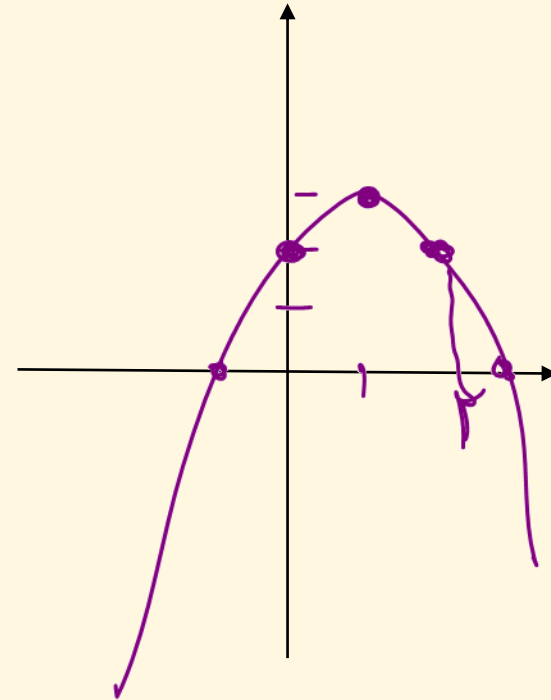
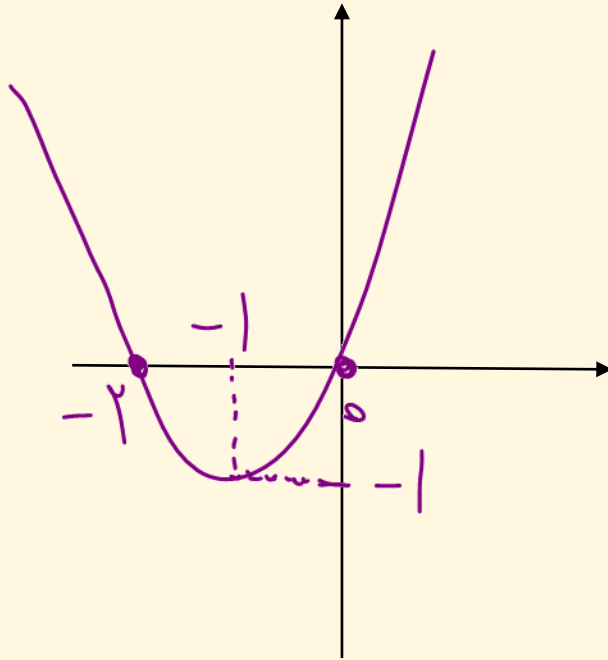
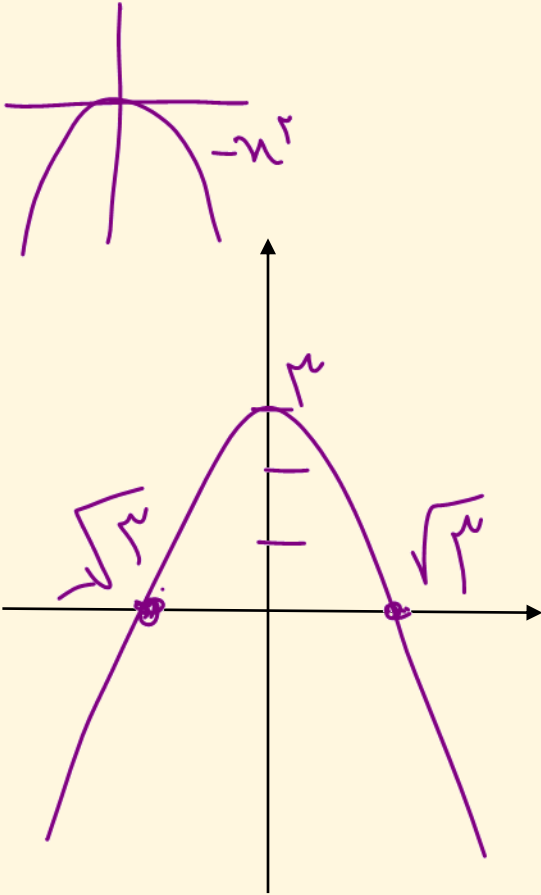
ب) $f(x) = x^2 + 2x$

پ) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

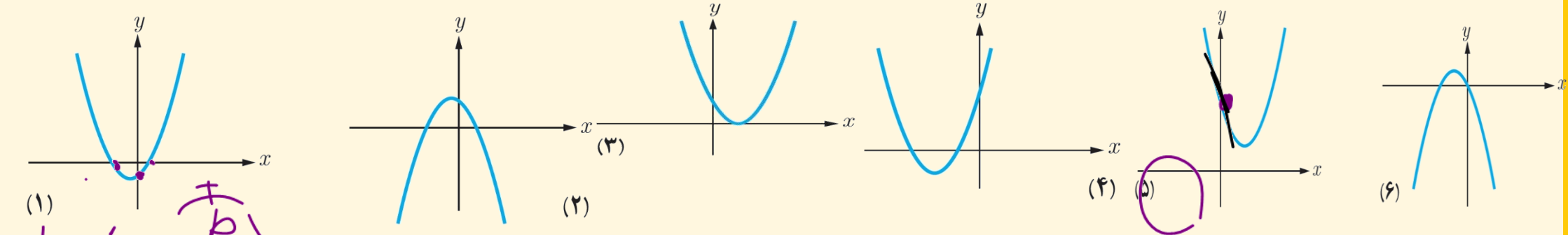
$x_s = \frac{-b}{2a}$
 $y_s =$

$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0$
 ↓ ↓
 0 -2

x	0	1	2
y	2	3	2

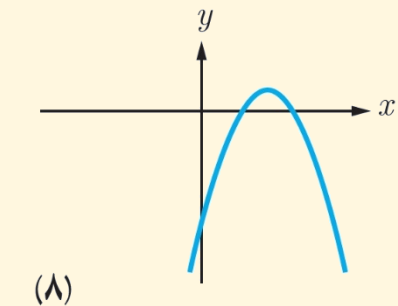
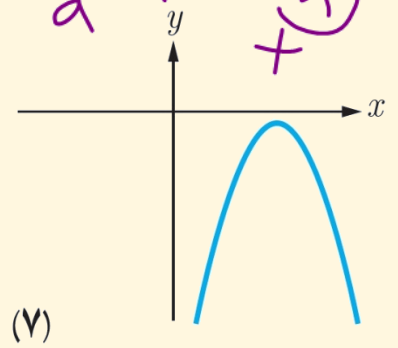


مثال) هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادله کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. در هر مورد، علامت ضرایب a, b, c و تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



(۱)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{+b}{a} \\ \frac{-b}{a} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\}$$



علامت c	علامت b	علامت a	علامت Δ	تعداد و علامت صفرهای تابع f	
-	+	+	+	دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.	1
+	-	-	+	دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.	2
+	-	+	0	ریشه مضاعف مثبت دارد.	3
+	+	+	+	دو ریشه منفی دارد.	4
+	-	+	-	ریشه حقیقی ندارد.	5
0	-	-	+	یک ریشه صفر و یک ریشه منفی دارد.	6
-	+	-	-	ریشه حقیقی ندارد.	7
-	+	-	+	دو ریشه مثبت دارد.	8

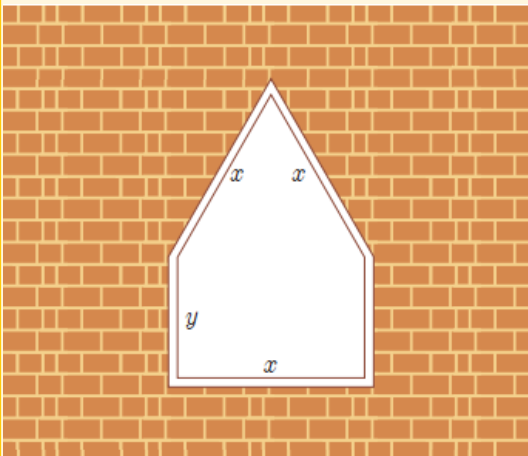
تست) به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است؟

- ۱) هیچ مقدار ۲) یک مقدار ۳) دو مقدار ۴) بی‌شمار مقدار

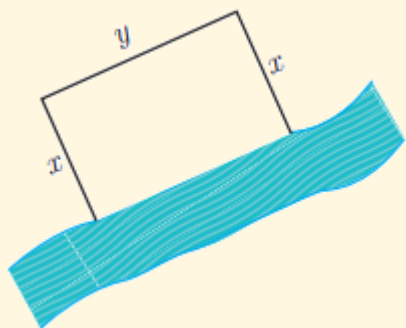
تست) به ازای کدام مقادیر m ، معادله $(1 - m)x^2 - 6x + 3 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

- ۱) $m < 1$ ۲) $m \geq -2$ ۳) $-2 \leq m < 1$ ۴) $m \leq -2$

مثال) یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴۳ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

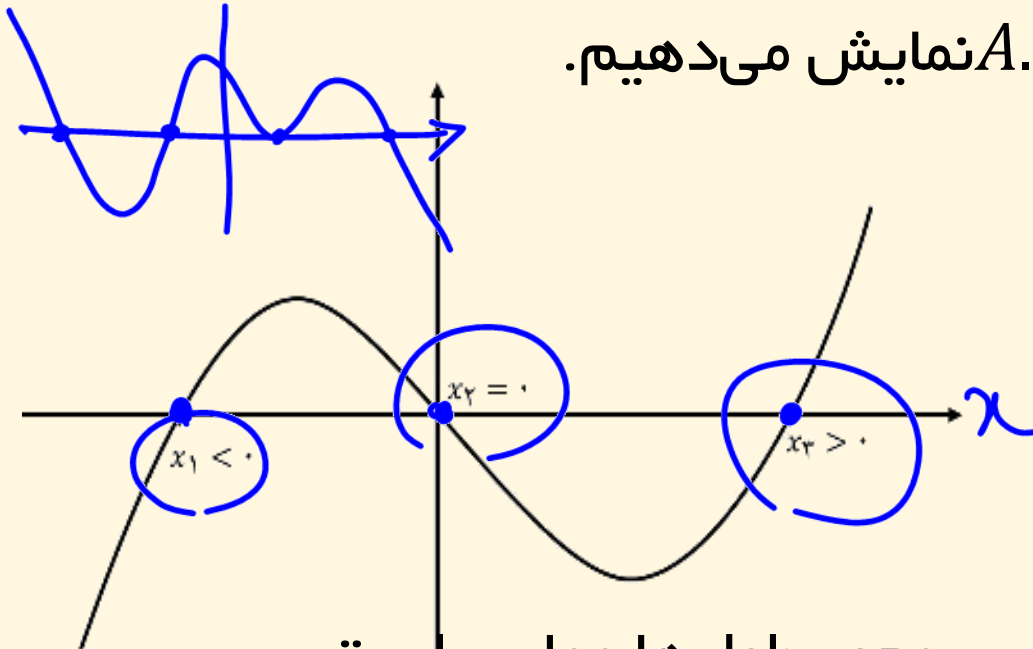


مثال) قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد



صفرهای تابع:

برای هر تابع f جوابهای معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست. مجموعه صفرهای تابع $y = f(x)$ و یا ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را با نماد $A.S$ (Answer Set) نمایش می‌دهیم.



مثلاً اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، در این صورت معادله $f(x) = 0$ دارای یک ریشه منفی (x_1) ، یک ریشه صفر (x_2) و یک ریشه مثبت (x_3) می‌باشد.

دقت کنید که در ریشه‌های مضاعف، نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است.

(مثال) صفرهای توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = x^3 - 4x \rightarrow f(x) = 0$

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

ب) $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$

$$2x^3 + x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

پ) $h(x) = x^4 - 10x^2 + 16 \rightarrow x^4 - 10x^2 + 16 = 0$

$$t^2 - 10t + 16 = 0 \rightarrow (t - 2)(t - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = 8 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

مثال **صفرهای تابع** $f(x) = \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$ را بیابید. $\frac{x^2}{3} - 2 = t$

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ t = \frac{c}{a} = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm \sqrt{24} \end{cases}$$

ریشه‌های صفر

مثال ۲۲ مجموع ریشه‌های معادله $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0$ را بیابید

$$(x+1)(x+7)(x+3)(x+5) + 15 = 0 \rightarrow (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 = 0$$

$$(t+7)(t+15) + 15 = 0 \rightarrow t^2 + 22t + 105 + 15 = 0 \rightarrow t^2 + 22t + 120 = 0$$

$$t^2 + 22t + 120 = 0 \rightarrow (t+12)(t+10) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -12 \rightarrow x^2 + 8x = -12 \\ t = -10 \rightarrow x^2 + 8x = -10 \end{cases}$$

نکته) اگر $x = \alpha$ یکی از صفرهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$ یا یکی از ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشد، برای یافتن سایر صفرها، چون $x - \alpha$ یکی از عوامل چندجمله‌ای $f(x)$ است، کافی است چندجمله‌ای $f(x)$ را بر دوجمله‌ای $x - \alpha$ تقسیم کرده و عامل دیگر $f(x)$ را بیابیم، اگر خارج قسمت این تقسیم را $Q(x)$ بنامیم، داریم: $f(x) = (x - \alpha)Q(x)$ سپس از معادله $Q(x) = 0$ سایر ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم.

مثال) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 4$ برابر 2 باشد، سپس سایر صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 + kx^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow 4k = -4 \rightarrow k = -1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

نکته تابع درجه ۲ در حالت کلی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد که برای به دست

آوردن پارمتر های a, b, c از نکات زیر نیز میتوان کمک گرفت

$$y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \quad x_s = -\frac{b}{2a} \text{ طول رأس سهمی}$$

اگر سه نقطه عادی به صورت $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ باشند:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + AB \text{ معادله خط } AB$$

اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند. ضابطه تابع و طول راس سهمی

به صورت زیر می باشد

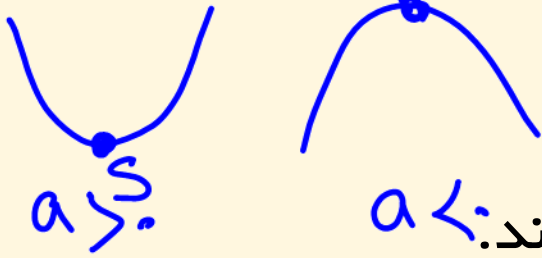
$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\text{طول راس سهمی} = x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

اگر نقطه (x_s, y_s) راس تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند. ضابطه تابع بصورت زیر می باشد.

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

می باشد که برای به دست



$$-\frac{\Delta}{4a}$$

تست) اگر اعداد $\frac{1}{2}$ و $-\frac{2}{3}$ صفرهای یک تابع درجه دوم بوده و مقدار ماکزیمم این تابع برابر $\frac{49}{72}$ باشد، مقدار این تابع به ازای $x = 1$ کدام است؟

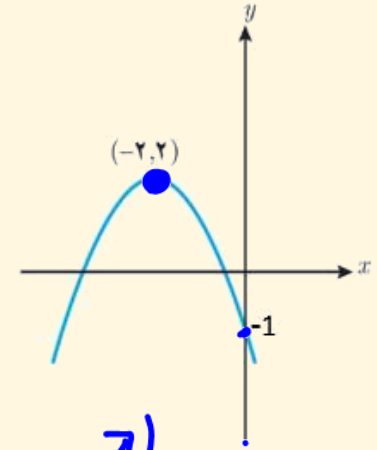
- (۱) -2 (۲) 2 (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

مثال) هریک از سهمی های زیر، نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. مجموع و حاصلضرب صفرهای تابع و مقادیر c, b, a را به دست آورید.

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \xrightarrow{S(-2, 2)} f(x) = a(x + 2)^2 + 2$$

$$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \rightarrow -1 = a(0 + 2)^2 + 2 \rightarrow -3 = 4a \rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

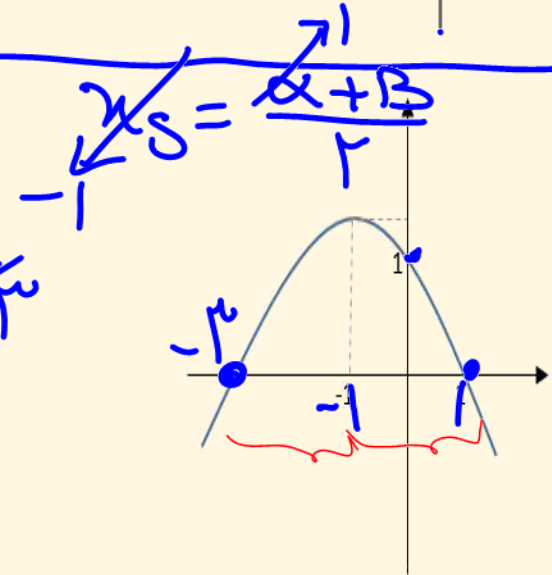
$$f(x) = -\frac{3}{4}(x + 2)^2 + 2 \rightarrow$$



$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) \rightarrow f(x) = a(x + 3)(x - 1)$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow 1 = a(0 + 3)(0 - 1) \rightarrow -3a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 1)$$

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسینی

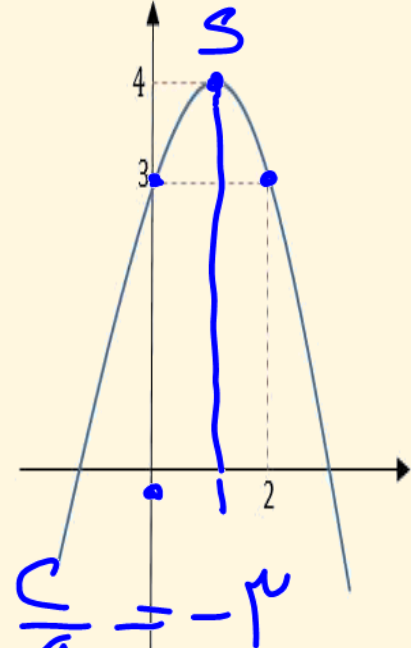
مثال) حاصل ضرب و حاصل جمع صفر های تابع درجه دوم زیر را بیابید.

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \xrightarrow{(1,4)} f(x) = a(x-1)^2 + 4 \quad S(1,4)$$

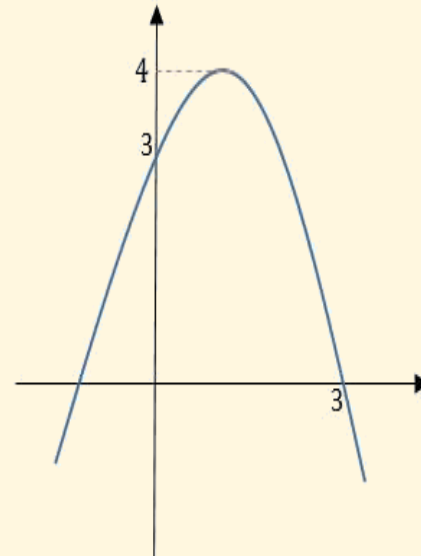
$$\begin{matrix} | \\ \circ \\ \hline \end{matrix} \xrightarrow{x} x^2 = a(0-1)^2 + 4 \rightarrow -1 = a$$

$$f(x) = -1(x-1)^2 + 4 = -(x^2 - 2x + 1) + 4$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \rightarrow S = -\frac{b}{a} = 1 \text{ و } P = \frac{c}{a} = -3$$



مثال) حاصل ضرب و حاصل جمع صفر های تابع درجه دوم زیر را بیابید. (روش اول)



تست) نمودار تابع درجه دوم $f(x) = mx^2 + 4x + 2m - 4$ محورهای مختصات را در سه نقطه قطع می کند و این سه نقطه تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند. مجموع مقادیر ممکن برای

m کدام است؟ $ca = -1$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

تست) راس سهمی و صفرهای تابع $f(x) = x^2 + bx + b$ تشکیل یک مثلث قائم الزاویه

می دهند. حاصلضرب مقادیر ممکن برای b کدام است. $\Delta = 4$

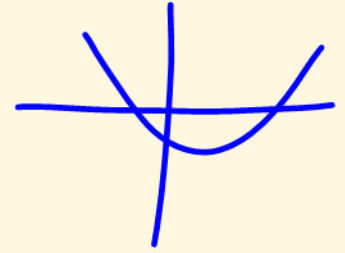
(۱) -۴ (۲) ۴ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) $-۲\sqrt{۳}$

مثال) اگر نمودار تابع $f(x) = (2m + 3)x^2 - 3mx + 3m - 5$ از هر چهار ناحیه

گذشته و دارای می‌نیمم باشد، حدود m را بیابید

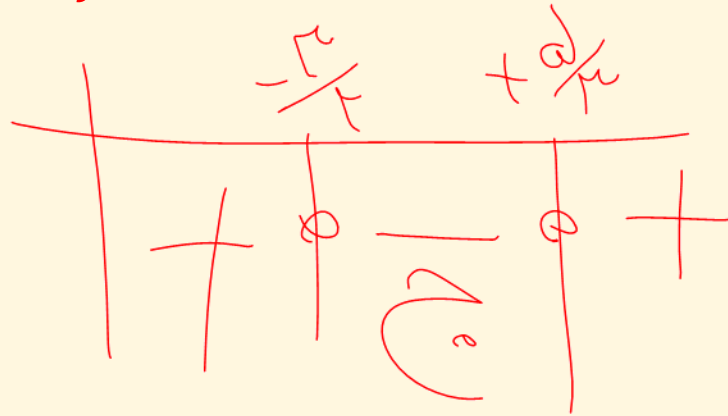
$$\begin{cases} a > 0 \rightarrow 2m + 3 > 0 \rightarrow m > -\frac{3}{2} \\ \frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{3m - 5}{2m + 3} < 0 \rightarrow 3m - 5 < 0 \rightarrow m < \frac{5}{3} \end{cases}$$

$\rightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{5}{3}$



مثال ۲۹) به ازای چند مقدار از $k \in \mathbb{N}$ بین ریشه‌های تابع زیر قرار می‌گیرد.

$$f(x) = -x^2 + 5x - 2^k$$



$$\frac{3m - 5}{2m + 3} < 0$$

$\frac{5}{3}$

$-\frac{3}{2}$

مثال) اگر نمودار تابع $f(x) = mx^2 - 4mx + 2 - m$ فقط از ناحیه سوم نگذرد، حدود

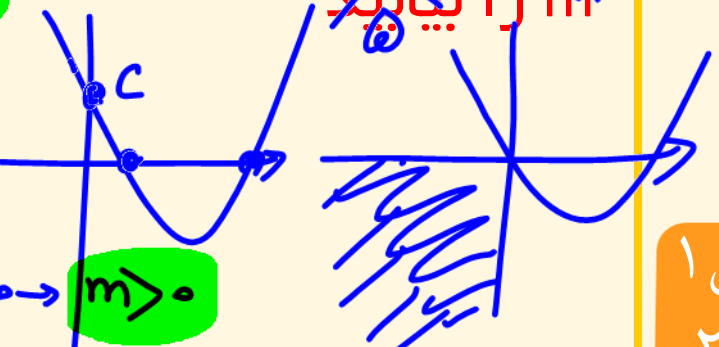
$$\Delta \geq 0 \rightarrow 16m^2 - 4m(2-m) \geq 0 \rightarrow 2m^2 - 8m \geq 0 \rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$a > 0 \rightarrow m > 0$$

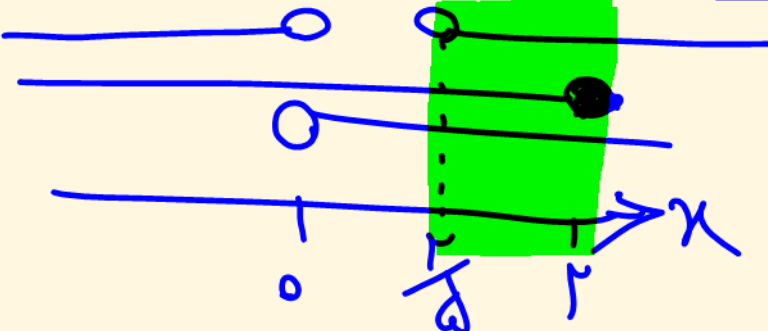
$$P \geq 0 \rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \rightarrow c \geq 0 \rightarrow 2-m \geq 0 \rightarrow m \leq 2$$

$$S \geq 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -b > 0 \rightarrow b < 0 \rightarrow -4m < 0 \rightarrow m > 0$$

۱۱ را بیابید



مثال ۱) حاصل ضرب ریشه های معادله $(x^2 + 3x)^2 - 18(x^2 + 3x) + 72 = 0$ را بیابید.



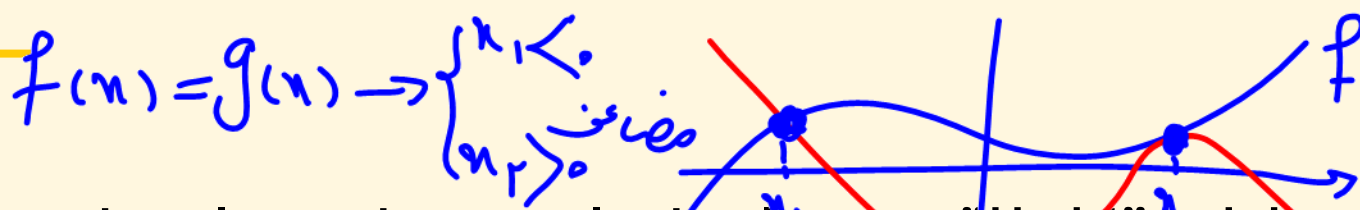
$$x^2 + 3x = A \rightarrow A^2 - 18A + 72 = 0$$

$$(A-6)(A-12) = 0 \rightarrow \begin{cases} A=6 \\ A=12 \end{cases}$$

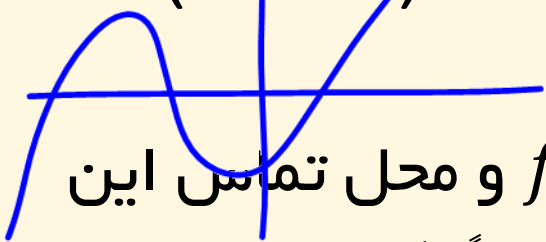
$$x^2 + 3x = 6 \rightarrow x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow P = -6$$

$$x^2 + 3x = 12 \rightarrow x^2 + 3x - 12 = 0 \rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow P = -12$$

$$P_1 \cdot P_2 = -6x - 12 = 72$$

حل معادلات به روش هندسی :

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جوابهای معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله را، که از طریق آن **تعداد جوابها** و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جوابها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

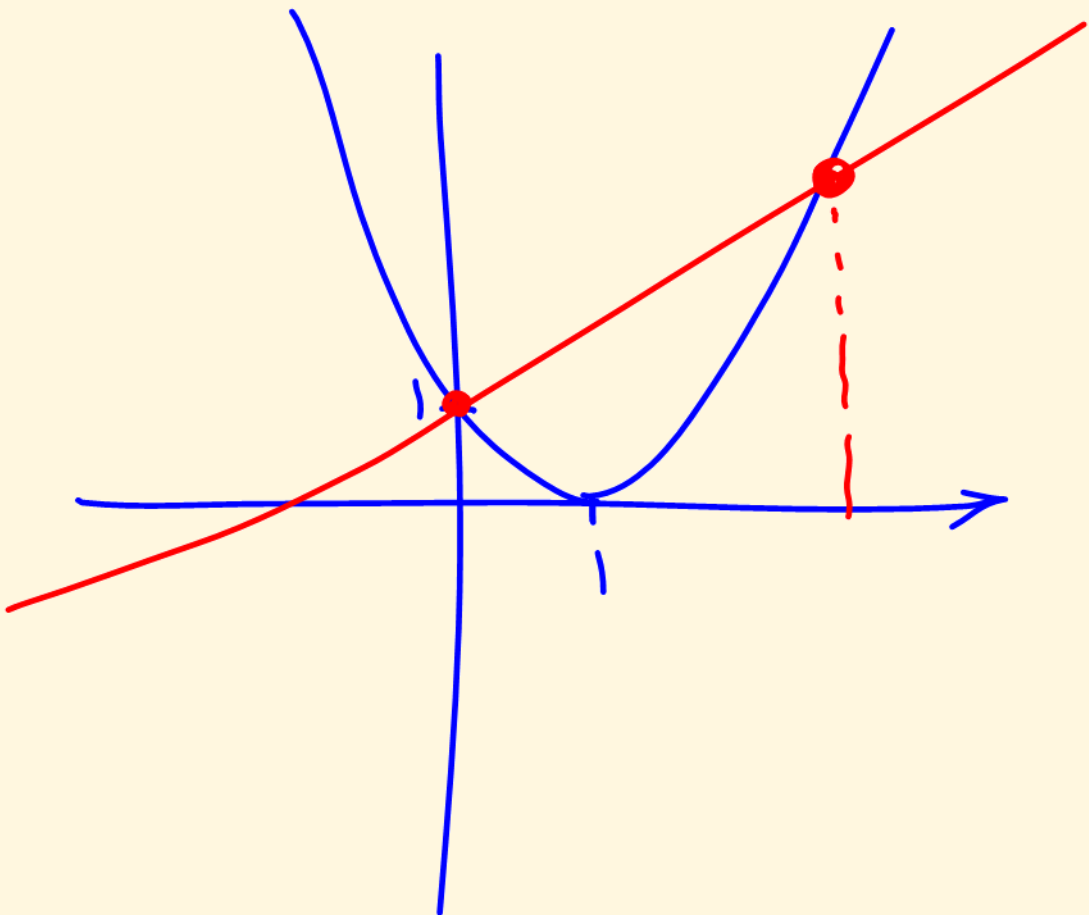


نکته مهم: محل تقاطع این دو تابع ریشه ساده معادله $f(x) = 0$ و محل تماس این دو تابع، ریشه مضاعف (و یا شبه مضاعف معادله) خواهد بود. ضمناً اگر محل تلاقی یا تماس در سمت راست محور عرضها واقع باشد، این ریشه مثبت و اگر در سمت چپ محور عرضها باشد، این ریشه منفی و اگر در مبدا مختصات باشد، این ریشه صفر می‌باشد. دقت کنید استفاده از روش هندسی، در مسائلی مفیدتر است که تعداد و علامت ریشهها را بخواهند.

مثال) تعداد جواب های معادله های زیر را مشخص کنید.

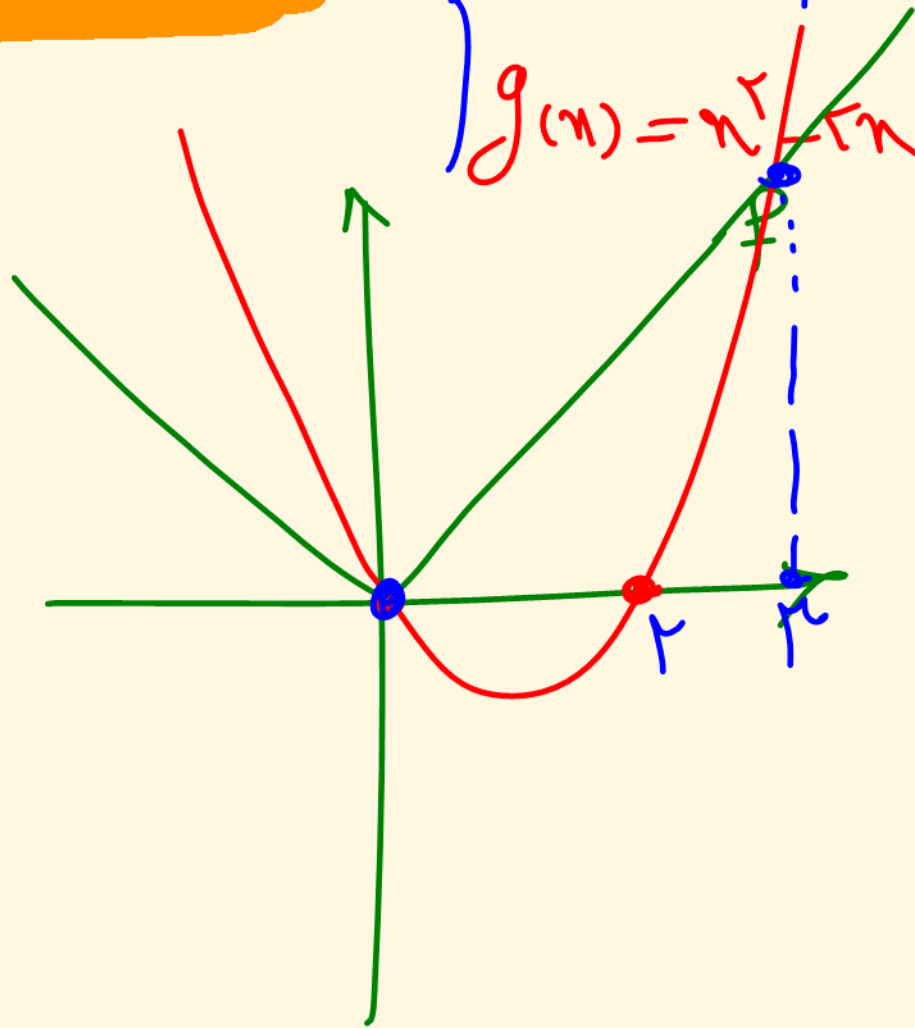
$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \\ g(x) = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

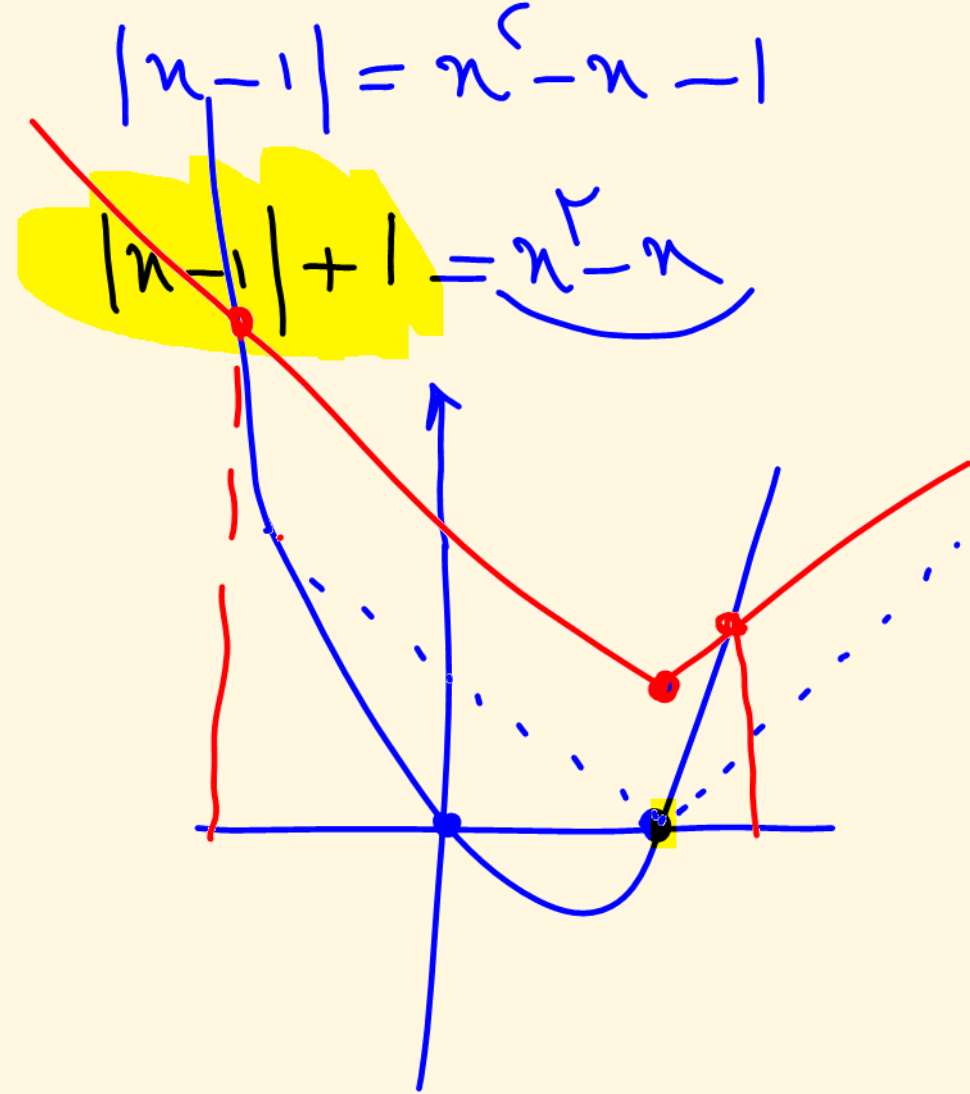
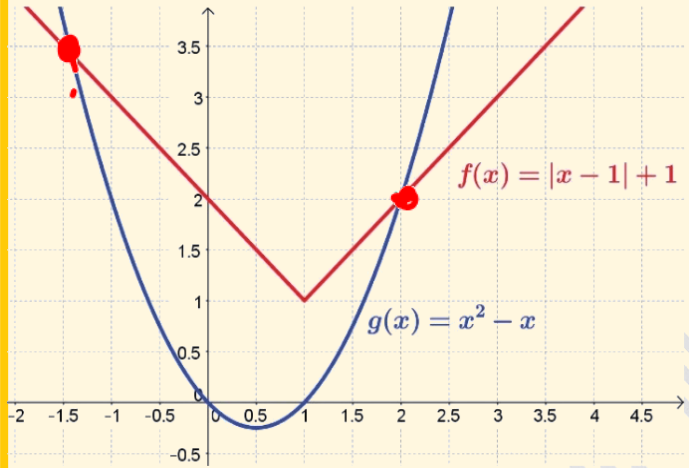


$$|x| = x^2 - 2x$$

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x^2 - 2x \end{cases}$$



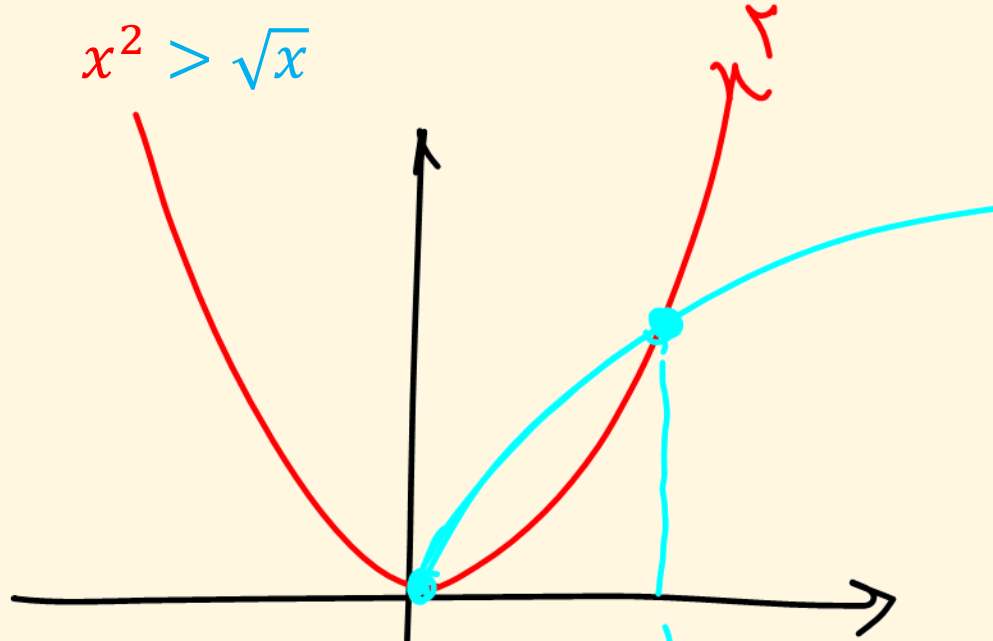
مثال) تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x - 1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی بیابید.



حل نا معادلات به روش هندسی :

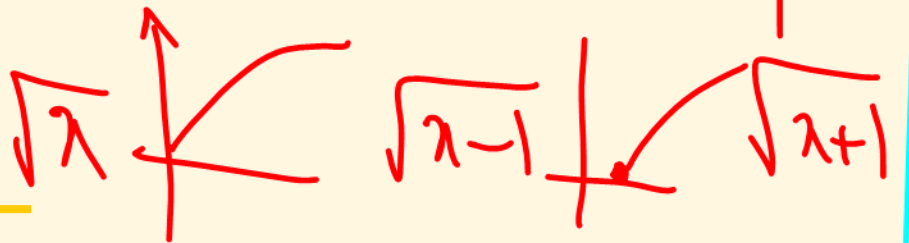
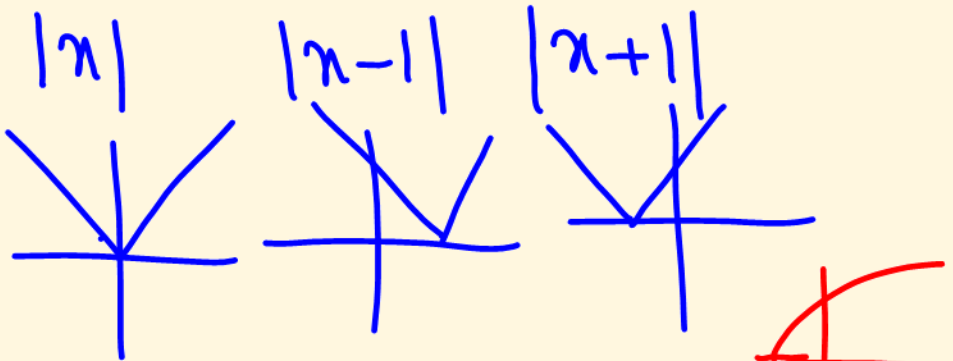
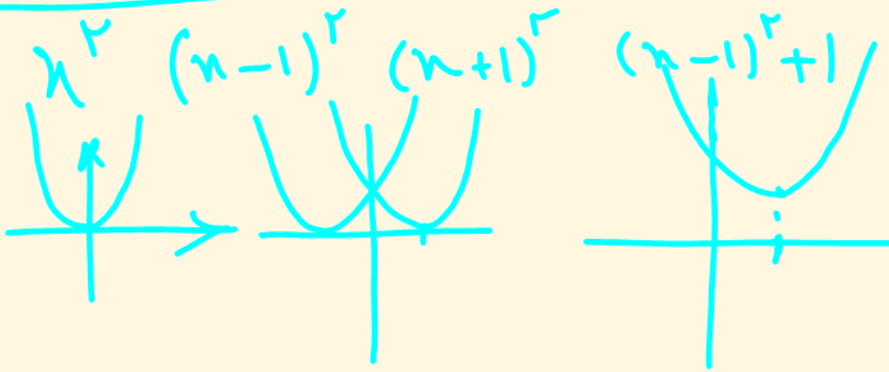
$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^2 > \sqrt{x}$$



- ① $x^2 < \sqrt{x} \rightarrow 0 < x < 1$
- ② $x^2 \geq \sqrt{x} \rightarrow 1 \leq x$

$$|x| \geq x^2 - 2x$$

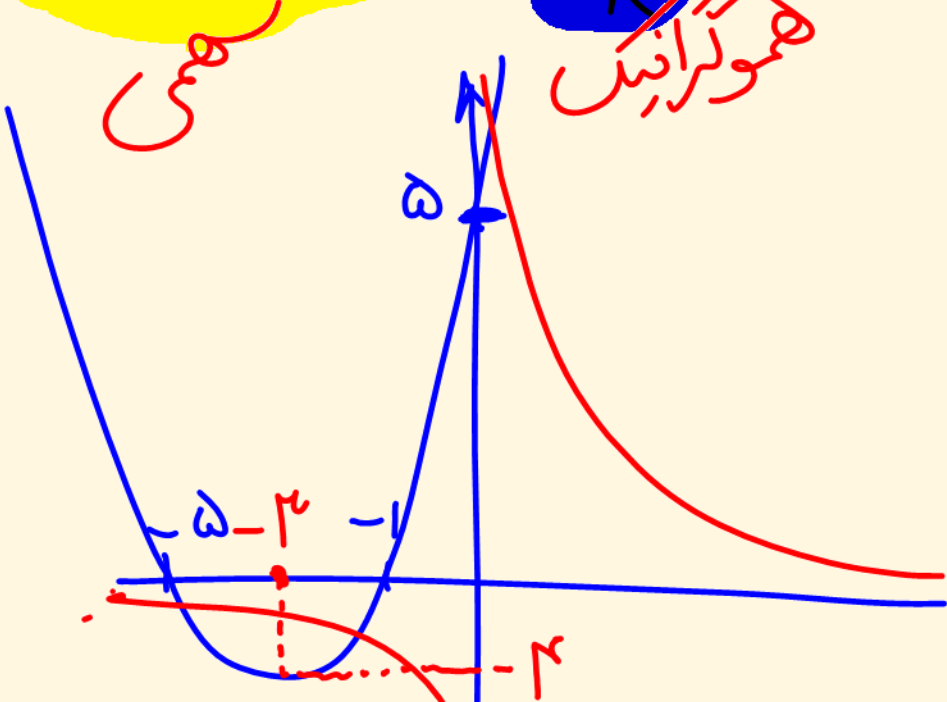


$$x^3 + 6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 1$$

$$x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{x}$$

همولگرافین

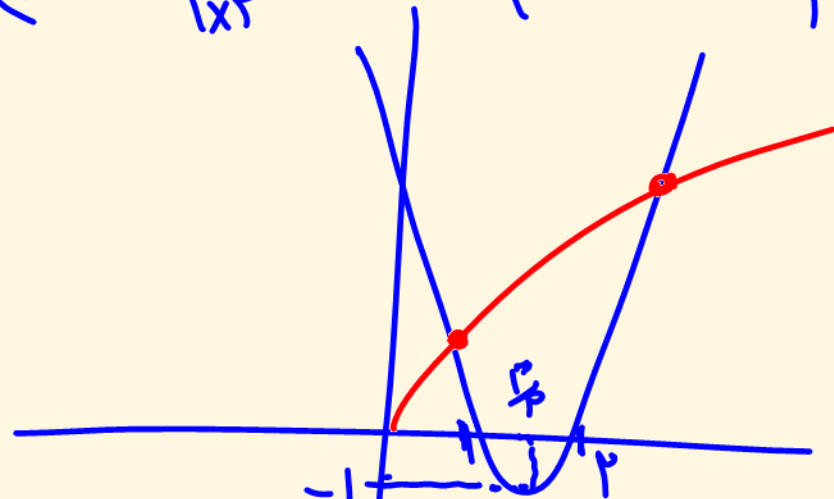


$$x^2 + 4x + 5 = (x+5)(x+1)$$

$$x^2 - 3x - \sqrt{x} + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9x}{4x^2} + 2 = -\frac{9}{4x} + 2 = \frac{1}{x}$$



$$S \mid \begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

$$\sqrt{|x|} > |x| - 6$$

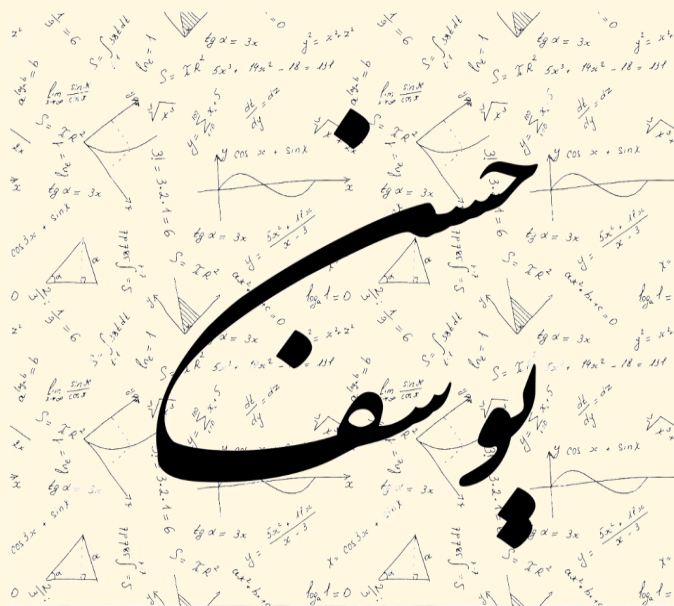
$$x^2 - 5x - \sqrt{x} - 6 < 0$$

به نام خدا

حسابان ۱ (درس سوم از فصل اول)

ریاضی ۲ (درس سوم از فصل اول)

معادلات گویا و گنگ



درس ۳: معادلات شامل عبارات گویا

$$\frac{n-3}{n-2} + \frac{n+5}{n-4} = \frac{n-1}{n^2-4n+4}$$

هر معادله شامل عبارات گویا را یک معادله گویا می‌گوییم.
برای حل این معادلات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) در صورت امکان دامنه تعریف معادله را تعیین می‌کنیم (مخرج هیچ یک از کسرها نباید صفر باشد).

۲) مخرج کسرها را در صورت امکان به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و طرفین معادله را در «ک.م.م.» مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا به یک معادله چند جمله‌ای برسیم.

۳) از حل این معادله، ریشه‌ها را یافته و آن‌ها را با دامنه تعریف مقایسه می‌کنیم تا ریشه قابل قبول به دست آید.

نکات مهم:

۱) اگر تعیین دامنه تعریف به راحتی امکان‌پذیر نباشد، جواب‌ها را در مخرج‌ها امتحان می‌کنیم تا هیچ مخرجی را صفر نکنند.

۲) بعضی از این معادلات با تغییر متغیر مناسب حل می‌شوند.

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

م.ک.م = $x(x+1)$

$x \neq 0, x \neq -1$

$$x(x+1) \frac{6}{x} = x(x+1) \cdot 2 + x(x+1) \frac{x-3}{x+1}$$

$$4x + 6 = 2x^2 + 2x + x^2 - 3x \rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\frac{x-2}{x+1} \rightarrow$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$(x-9)(x+2) = 0$$

$$x = 9 \quad x = -2$$

$$x = 9 \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{x-4}{x-2}$$

م.ک.م = $x(x-2)$
 $x \neq 0, x \neq 2$

$$x(x-2) \frac{5}{x} - x(x-2) \frac{4}{x(x-2)} = x(x-2) \frac{x-4}{x-2}$$

$$5x - 4 = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$(x-9)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=2 \end{cases}$$

مثال) اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+a} = \frac{8}{x^2+2x-3}$ برابر 6- باشد ریشه‌های دیگر را در صورت وجود بیابید.

مثال) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را تنهایی انجام دهند؟

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی و تجربی ■ پایه یازدهم

مثال) فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

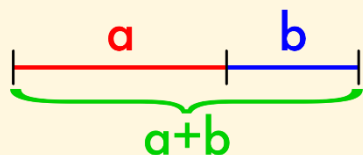
مثال) در یک مغازه ماهی های تزئینی ، ماهی های آب شور در محلول های آب نمک با غلظت ۷ درصدی نگهداری می شوند. یک کارگرمبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴درصدی ساخته است اگر در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار باشد همان رابه محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را به طور تقریبی باید تبخیر کند تا این محلول رابه غلظت مورد نظر رساند؟

نسبت طلایی: این نسبت عددی گنگ است که با حرف یونانی فی نمایش داده می‌شود.

مقدار دقیق آن برابر $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ و مقدار تقریبی آن برابر $\varphi \cong 1/61803398$ است

زیرا این نسبت زمانی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر برابر نسبت مجموع

دو بخش به بخش بزرگتر باشد. پس با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \rightarrow a^2 = ab + b^2 \rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \rightarrow a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

نسبت طلایی یکی از زیبایی‌های دنیای ریاضی است که رد آن را در خیلی جاهای طبیعت می‌توان مشاهده کرد، از نسبت طول اندام‌های انسان گرفته تا چشم‌نوازترین آثار معماری و حتی رشد مارپیچ دانه‌های گل آفتابگردان. بسیاری از هنرمندان معتقدند شکل‌هایی که در آن‌ها نسبت طلایی رعایت شده است، چشم‌نوازترین شکل‌های ممکن را تشکیل می‌دهند.

مثال) اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

$$\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L}$$

نکته: اگر در یک زمین مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم:

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

**مثال) اگر مساحت یک مستطیل که طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است برابر
۱۰ باشد محیط مستطیل چند است؟**

معادلات شامل عبارات گنگ:

هر معادله که در آن، حداقل یک مجهول زیر رادیکال باشد را یک معادله گنگ یا اصم گوئیم. برای حل این معادلات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) در صورت امکان بهتر است بین تعداد رادیکال‌ها در طرفین معادله، توازن ایجاد می‌کنیم.

۲) دامنه تعریف معادله را در صورت امکان تعیین می‌کنیم.

۳) طرفین معادله را با توجه به فرجه‌ها به توان n می‌رسانیم. (اگر فرجه‌ها برابر نباشند، طرفین را به توان «ک.م.م» فرجه‌ها می‌رسانیم)

۴) معادله جدید را تا جایی ساده می‌کنیم که به یک معادله چندجمله‌ای برسیم.

۵) از حل معادله چندجمله‌ای، ریشه‌ها را یافته و با دامنه تعریف مقایسه می‌کنیم تا ریشه خارجی وارد مسئله نگردد.

۶) در بعضی معادلات گنگ، ممکن است پس از به توان رساندن طرفین، به معادله گنگ دیگری برسیم، در این صورت باید دامنه تعریف معادله جدید را یافته و با دامنه اولیه اشتراک بگیریم. بدیهی است که جواب‌هایی قابل قبول‌اند که در اشتراک این دو دامنه واقع باشند.

$$\sqrt{5x - 1} + 3 = 0$$

$$x + \sqrt{5x + 10} = 8$$

پویش
جہادی

دیپستان
ماندگار
البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

پایہ یازدهم ■ رشته ریاضی و تجربی

$$17 + \sqrt{169 - x^2} = x \rightarrow$$

$$\sqrt{169 - x^2} - x = 0 \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{1 - 3x} = \sqrt{1 + x}$$

پویش
جهادی

دبیرستان
ماندگار
البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی و تجربی ■ پایه یازدهم

$$\sqrt{3x + 1} = 4 - \sqrt{x + 3}$$

$$\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x - 1} + 2 \rightarrow$$

پویش
جهادی

دبیرستان
ماندگار
البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

رشته ریاضی و تجربی ■ پایه یازدهم

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 9} = x - 1$$

$$2x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$$

$$\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 3} = 4$$

$$\sqrt{x + 5} + \sqrt{3 - x} = 4$$

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x \quad \rightarrow$$

$$x - \sqrt{2 - x} \geq 0$$

تست) مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{5 - x^2} \geq 2x$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

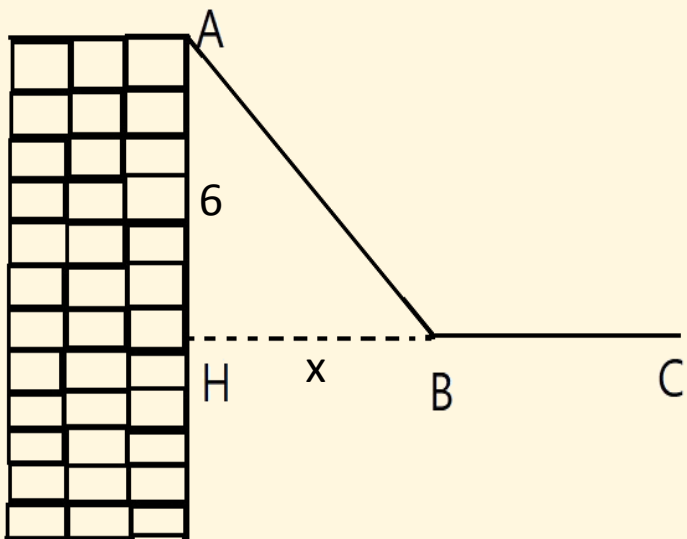
۲ (۲)

۱ (۱)

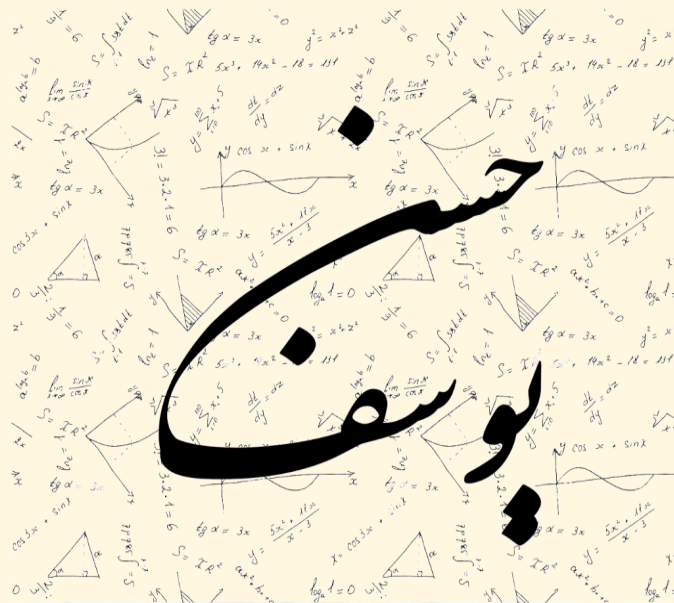
مثال) یک بدلکار سینما از ساختمانی با کم کردن ارتفاعش به اندازه ۶ متر از نقطه A به نقطه B و سپس از نقطه B تا نقطه C روی طناب به صورت افقی راه می‌رود. اگر فاصله نقطه C تا ساختمان ۱۲ متر باشد، چنانچه بدلکار برای طی کردن هر متر از فواصل اریب و افقی به ترتیب به میزان ۹۸ و ۷۰ کیلوکالری انرژی مصرف نماید و او در کل برای طی مسیر مورد نظر به اندازه ۱۲۶۰ کیلوکالری انرژی مصرف کرده باشد.

الف) فاصله نقطه B از پای ساختمان را بیابید.

ب) اگر بدلکار مستقیماً از A به C برود، چقدر کالری مصرف خواهد کرد؟



به نام خدا حسابان ۱ درس چهارم از فصل اول قدر مطلق



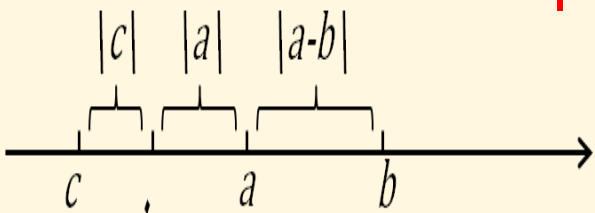
درس ۴: قدر مطلق و ویژگی‌های آن

یادآوری:

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید. همانطور که می‌دانید اگر $u \in R$ در این صورت قدر مطلق u را با نماد $|u|$ نمایش داده به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u > 0 \\ 0 & ; u = 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |u| = \begin{cases} u & ; u > 0 \\ -u & ; u \leq 0 \end{cases}$$

نکته) اگر a و $b \in R$ ، منظور از **فاصله a تا b** ، عدد $|a - b|$ است.



فاصله نقطه متناظر با عدد a روی محور تا مبدا مختصات را $|a|$ می‌نامند

نکته) اگر u یک متغیر حقیقی و n عددی طبیعی باشد، همواره داریم:

$$\text{الف) } \sqrt[2n]{u^{2n}} = |u|$$

$$\text{ب) } \sqrt[2n+1]{u^{2n+1}} = u$$

مثال) حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$\text{الف) } |-5 - (-3)|$$

$$\text{ب) } |\sqrt{3} - \sqrt{5}|$$

$$\text{پ) } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

$$|x - 2| \text{ ث)}$$

$$|2 - x| - |x + 3| \text{ ح)}$$

$$|x^2 - 1| \text{ خ)}$$

رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق:

برای رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق، معمولاً از روش تعیین علامت و تبدیل تابع به یک تابع چندضابطه‌ای استفاده می‌کنیم.

مثال) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \text{الف}$$

$$\text{ح) } y = |x - 1| + |x + 2|$$

$$\text{چ) } y = |x + 3| - |x - 2|$$

$$\text{پ) } y = |x + 1| - |x - 2|$$

$$\text{ب) } y = |x + 1| + |x - 2|$$

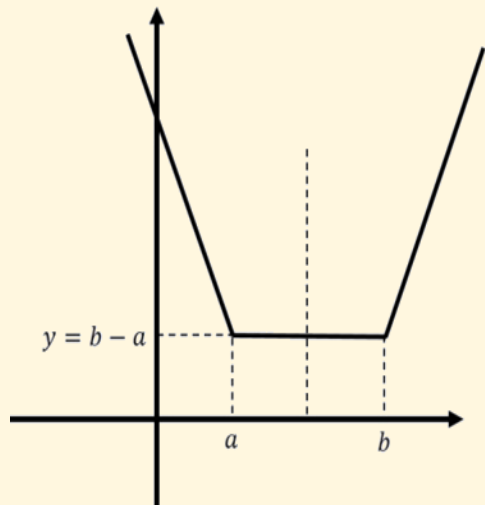
نکته) نمودار توابع به فرم $y = |x - a| + |x - b|$ که در آن $a < b$ است، تشکیل شده از دو نیم خط مایل و یک پاره خط افقی بین آنها (تابع گلدانی) و داریم:

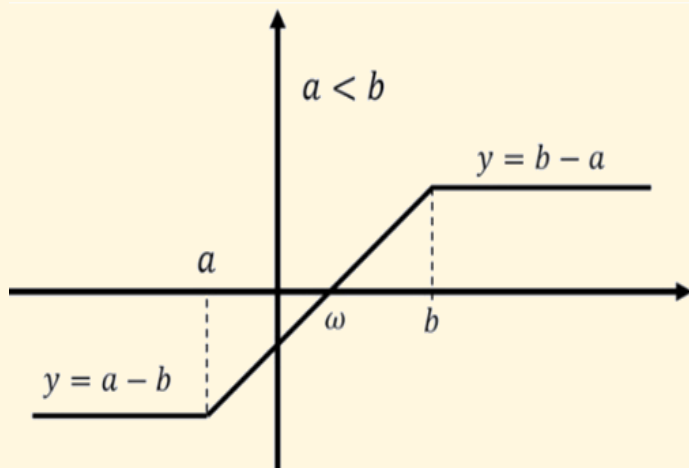
الف) در این توابع خط $x = \frac{a+b}{2}$ محورتقارن است.

ب) برد این توابع عبارتست از: $R_f = [b - a, +\infty)$

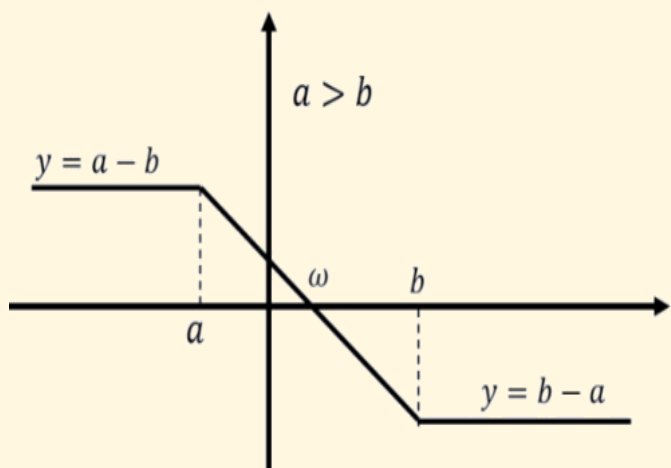
پ) اگر $a = -b$ باشد نمودار این تابع نسبت به محور عرضها متقارن

خواهد بود. مانند: $y = |x + 2| + |x - 2|$





نکته) نمودار توابع بفرم $y = |x - a| - |x - b|$ ، تشکیل شده از دو نیم خط افقی و یک پاره خط مایل بین آنها (سرسره ای یا آبشاری) به یکی از شکل‌های روبرو است.



در این توابع داریم:

الف) نقطه $\omega \left(\frac{a+b}{2}, 0 \right)$ مرکز تقارن است.

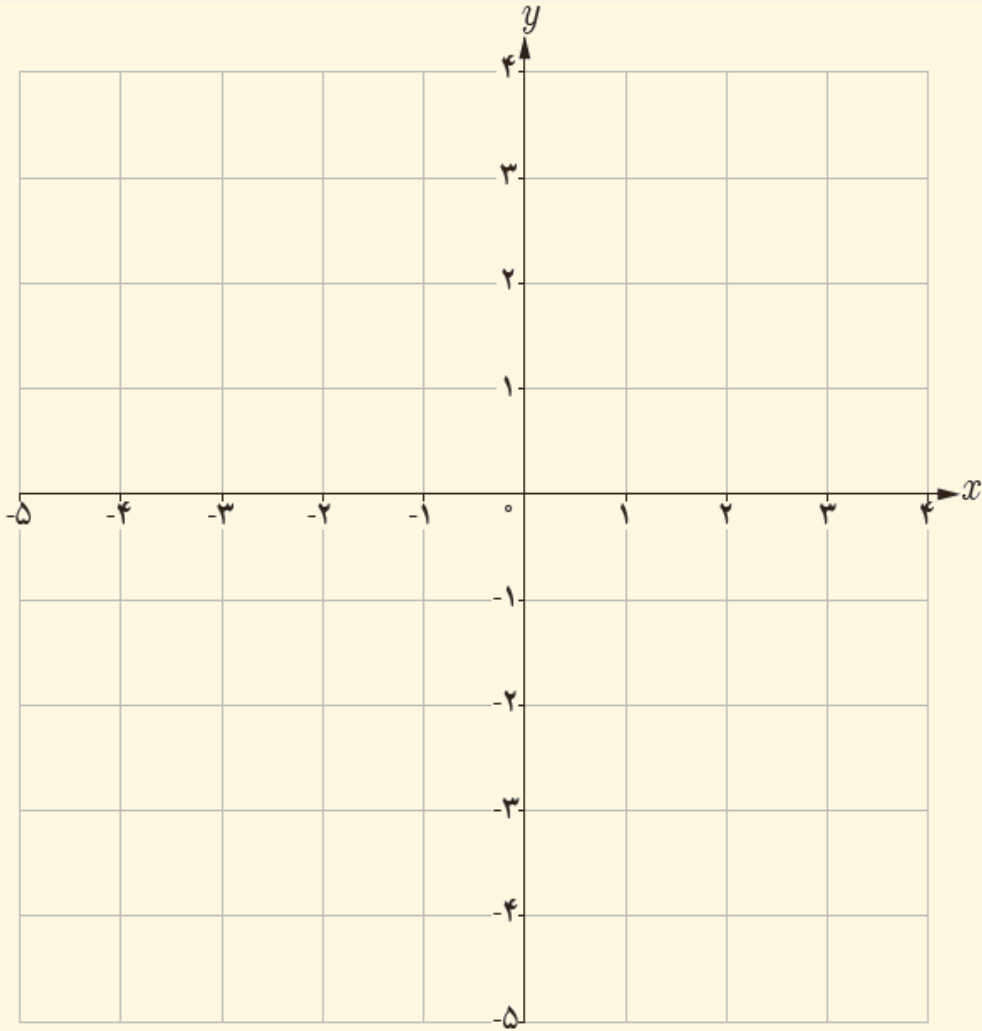
ب) برد آنها عبارتست از: $R_f = [-|a - b|, |a - b|]$

پ) اگر $a = -b$ باشد مبدأ مختصات مرکز تقارن آنها

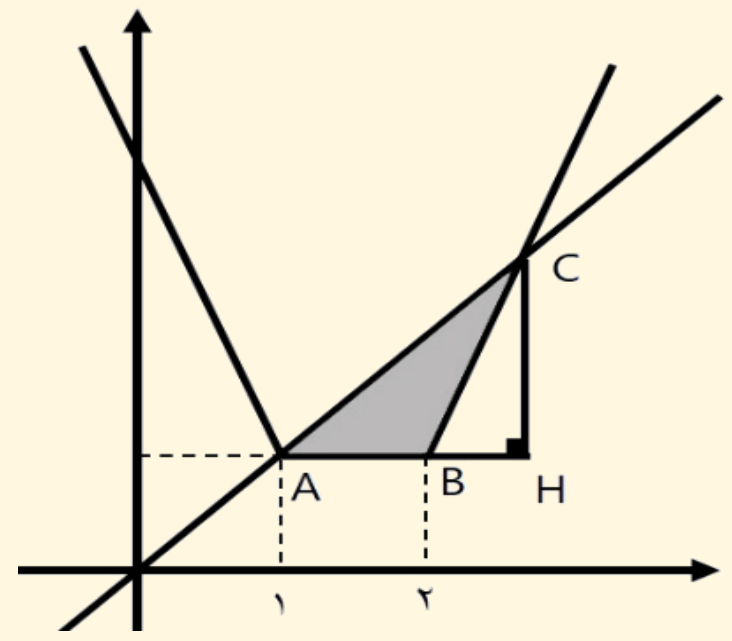
خواهد بود. مانند: $y = |x + 2| - |x - 2|$

$$ج) y = |2x - 1| + |x + 2|$$

$$\text{خ) } y = \sqrt[3]{x^3} \sqrt{x^2} - x^2 + 1 =$$



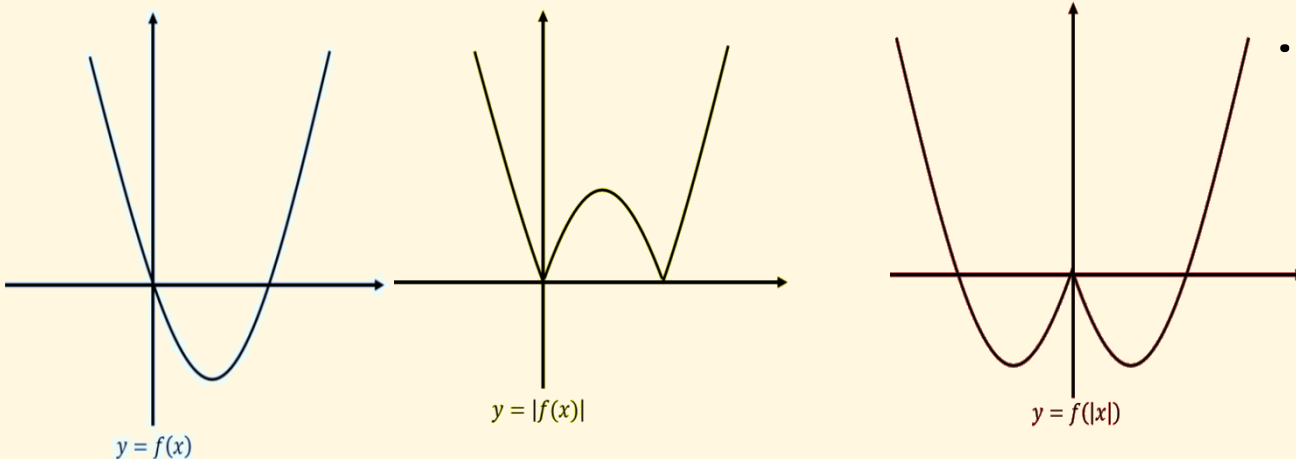
مثال) سطح بین تابع $y = |x - 2| + |x - 1|$ و خط $y = x$ را بیابید.



حالات خاص رسم نمودار تابع شامل قدر مطلق:

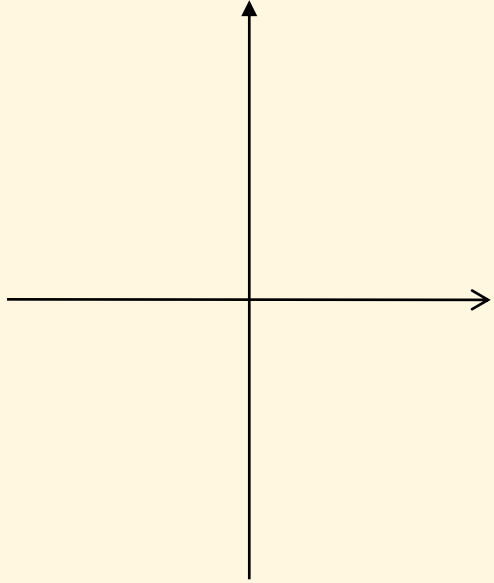
(۱) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده، سپس بخشی از نمودار را که زیر محور طولها واقع شده حذف کرده، قرینه آن را نسبت به محور طولها رسم کنیم.

(۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کرده، سپس بخشی از نمودار را که در سمت چپ محور عرضها واقع شده حذف کرده، قرینه باقیمانده را نسبت به محور عرضها رسم کنیم. دقت کنید که نمودار تابع $y = f(|x|)$ نسبت به محور عرضها متقارن است.

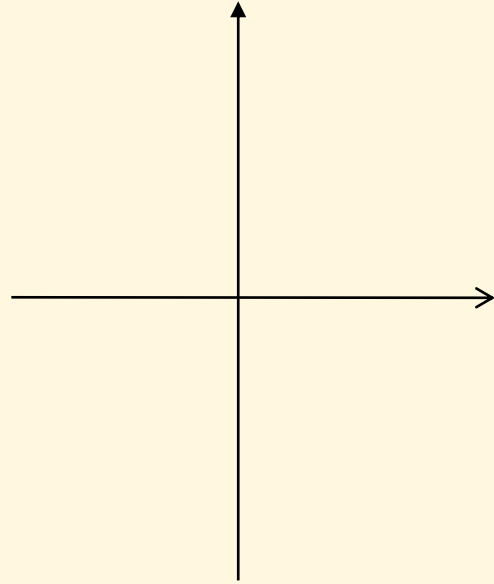


مثال ۴) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } f(x) = |x^2 - 4|$$

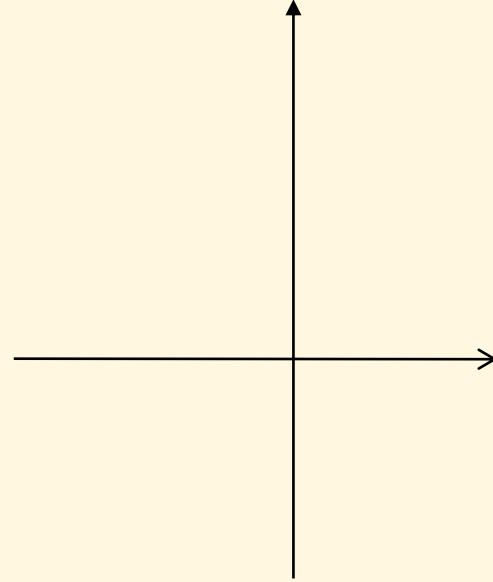


$$y = x^2 - 4$$

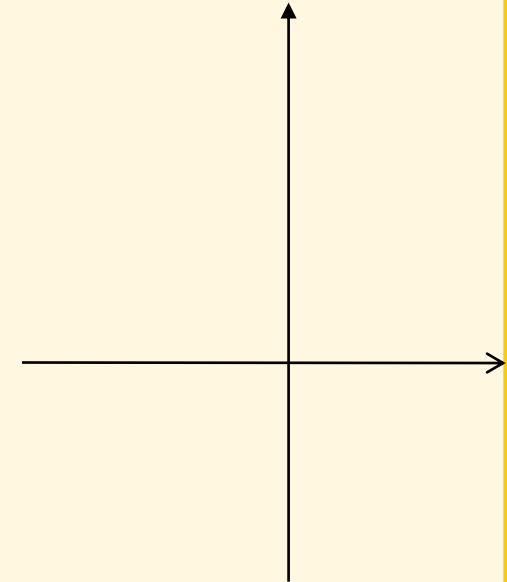


$$y = |x^2 - 4|$$

$$\text{ب) } f(x) = |x^2 + 2x|$$

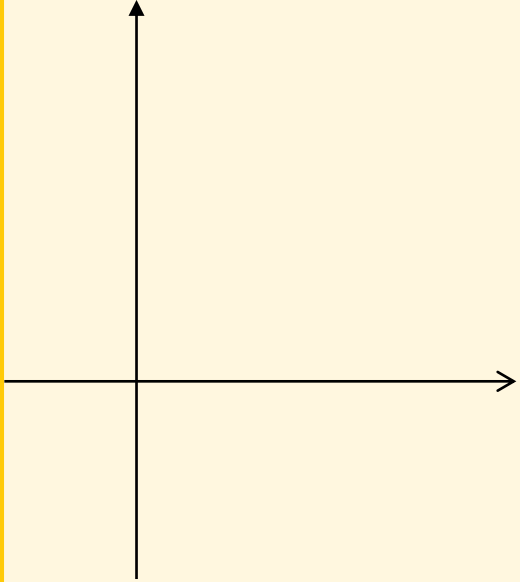


$$y = x^2 + 2x$$

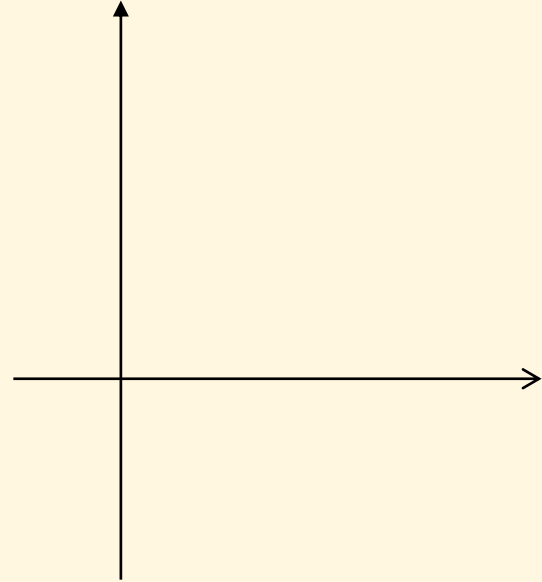


$$y = |x^2 + 2x|$$

$$\text{پ) } f(x) = |-x^2 + 4x - 3|$$

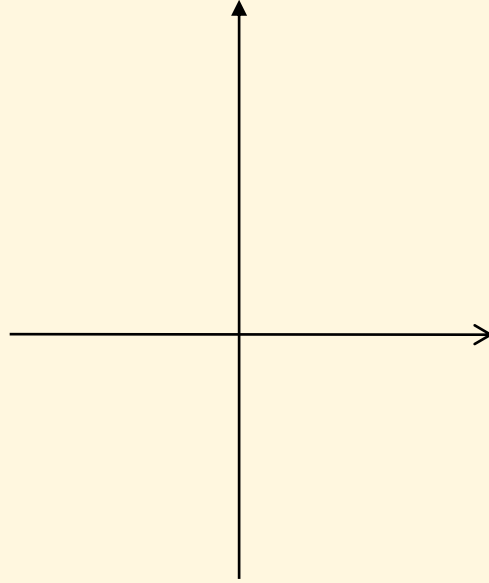


$$y = -x^2 + 4x - 3$$

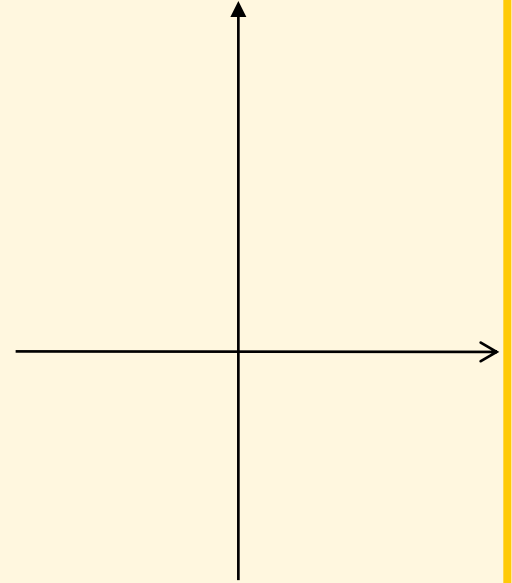


$$y = |-x^2 + 4x - 3|$$

$$\text{ت) } f(x) = ||x| - 1|$$

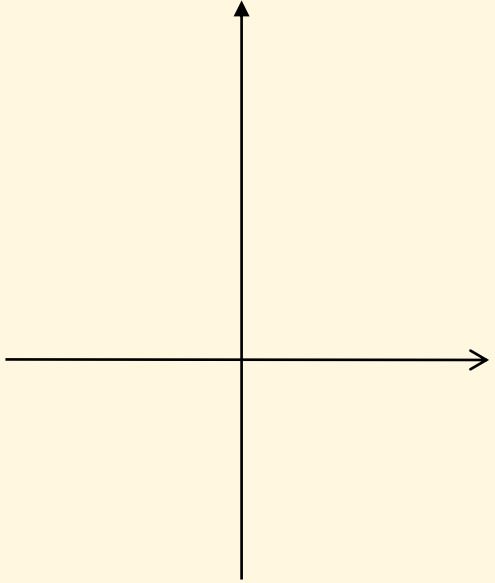


$$y = |x| - 1$$

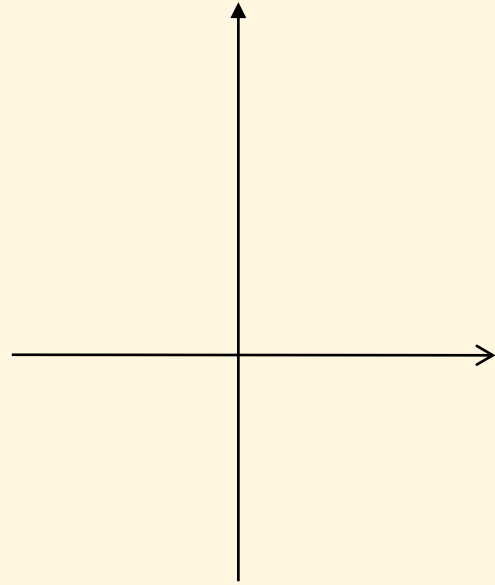


$$y = ||x| - 1|$$

$$\text{ث) } f(x) = (|x| - 1)^2$$

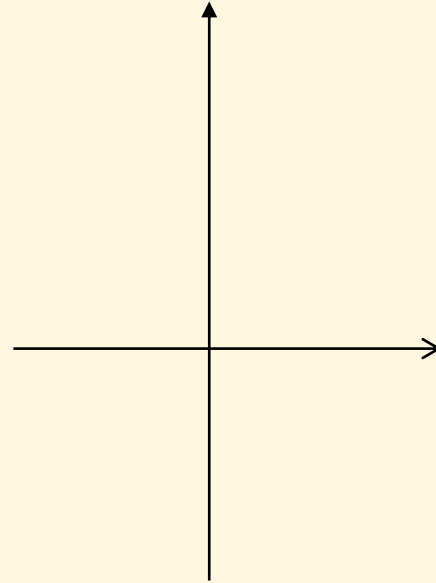


$$y = (x - 1)^2$$

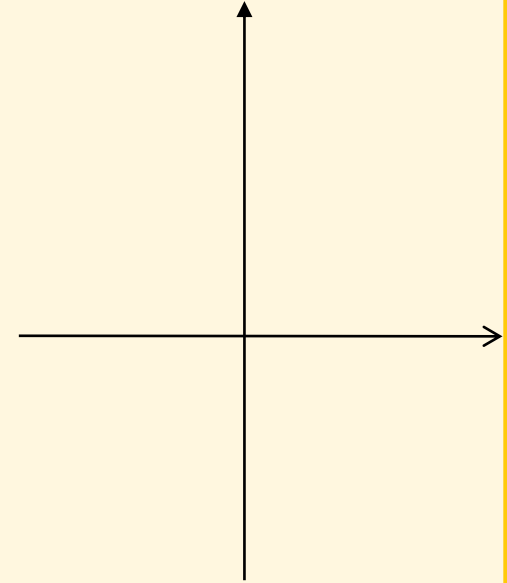


$$y = (|x| - 1)^2$$

$$\text{ح) } f(x) = x^2 - 3|x|$$



$$y = x^2 - 3x$$



$$y = |x|^2 - 3|x|$$

خواص کلی قدر مطلق در تساوی‌ها :

شماره	ویژگی	مثال
1	$ u^{2n} = u^{2n}$	$ (x + 1)^2 = (x + 1)^2$
2	$ u^{2n+1} = u ^{2n+1}$	$ (2x - 1)^3 = 2x - 1 ^3$
3	$ -u = u $	$ x - y = y - x $
4	$ u = u \Leftrightarrow u \geq 0$	$ 2x + 6 = 2x + 6 \rightarrow 2x + 6 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$
5	$ u = -u \Leftrightarrow u \leq 0$	$ x - 2 = 2 - x \rightarrow x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 2$

ادامه خواص کلی قدرمطلق در تساوی ها:

شماره	ویژگی	مثال
6	$ u + v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$	$ x - 1 + y + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$
7	$ u = a \Leftrightarrow u = \pm a$	$ x - 2 = 5 \rightarrow x - 2 = \pm 5 \rightarrow x = -3, 7$
8	$ u = v \Leftrightarrow u = \pm v$	$ 2x - 1 = x \rightarrow 2x - 1 = \pm x \rightarrow x = \frac{1}{3}, 1$
9	$ uv = u v $	$ x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = x - 1 x - 2 $
10	$\left \frac{u}{v} \right = \frac{ u }{ v }$	$ \tan x = \left \frac{\sin x}{\cos x} \right = \frac{ \sin x }{ \cos x }$

حل معادلات شامل قدر مطلق: حالت اول:

$$|f(x)| = a \rightarrow f(x) = \pm a$$

$$|x^2 + 3x + 2| = 6$$

$$||2x - 1| - 7| = 4$$

حالت دوم:

$$|f(x)| = f(x) \rightarrow f(x) \geq 0$$

$$|x^2 - 3x| = x^2 - 3x \rightarrow$$

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4 \rightarrow$$

$$|f(x)| = -f(x) \rightarrow f(x) \leq 0$$

$$|x^2 - 4x - 5| = 4x + 5 - x^2$$

$$|x^2 - 4| = 4 - x^2 \rightarrow$$

حالت سوم:

$$|f(x)| = |g(x)| \rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

$$|x^2 - 3x| = |x^2 - 2x + 3|$$

$$|x - 1||x + 2| = |x + 6|$$

حالت چهارم:

پویش
جهادی

دبیرستان
ماندگار
البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

پایه یازدهم ■ رشته ریاضی و تجربی

حالت پنجم:

$$|f(x)| = g(x) \xrightarrow{g(x) \geq 0} f(x) = \pm g(x)$$

$$|f(x)| = g(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = g(x) \\ f(x) \leq 0 \rightarrow -f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \rightarrow$$

$$\frac{2 - x}{|x - 3|} = 1$$

$$|x - 1| = x^2 - x - 1$$

$$|x^2 - x - 1| = x - 1$$

پویش
جهادی

دیپستان
ماندگار
البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

پایه یازدهم ■ رشته ریاضی تجربی

حالت ششم:

$$|f(x)| + |g(x)| = 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$|3x^2 - 5x + 2| + |x^3 + x^2 - 2x| = 0 \rightarrow$$

$$|x^2 - 3x + 2| + |x^3 - 3x^2 + 2| = 0 \rightarrow$$

$$x^2 - |x| - 2 = 0$$

$$|2x - 1| - |x| = 7$$

مثال ۵) اگر تفاضل جواب های معادله $|x + 1| + |x - 2| = k$ برابر 7 باشد k را بیابید.

مثال) اگر خط $y = k$ نمودار تابع $y = |x + 1| + |3 - x|$ را در دو نقطه قطع کند یک ذوزنقه به مساحت $\frac{9}{2}$ تشکیل می‌شود پارامتر k را بیابید.

مثال) حدود k را طوری بیابید که معادله $|2x - x^2| = 1 - 2k$

الف) جواب نداشته باشد.

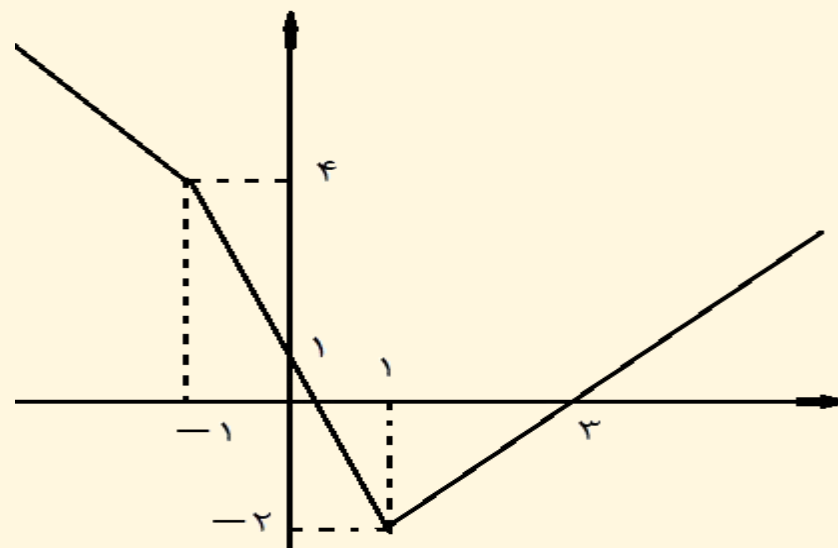
ب) فقط دو جواب داشته باشد

پ) سه جواب داشته باشد.

ت) چهار جواب داشته باشد.

مثال) در تعداد و علامت ریشه‌های معادله زیر بر حسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = m \rightarrow 2|x - 1| - |x + 1| = m$$



- ۱) اگر $m < -2$ باشد معادله ریشه ندارد.
- ۲) اگر $m = -2$ باشد معادله یک ریشه مثبت برابر $x = 1$ دارد.
- ۳) اگر $-2 < m < 1$ باشد معادله دو ریشه مثبت دارد.
- ۴) اگر $m = 1$ باشد معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه صفر دارد.
- ۵) اگر $m > 1$ باشد، معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد

مثال اگر $f(x) = x^2 + 2x$ باشد. نمودار تابع $g(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ را رسم کنید.

خواص کلی قدر مطلق در نامساوی ها:

شماره	ویژگی	مثال
1	$- u \leq u \leq u $	و $- 3 \leq 3 \leq 3 $ $- 2x - 1 \leq 2x - 1 \leq 2x - 1 $
2	$ u \leq a \Leftrightarrow -a \leq u \leq a$	$ 3x \leq 6 \rightarrow -6 \leq 3x \leq 6 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$
3	$ u \geq a \Leftrightarrow u \leq -a$ یا $u \geq a$	$ 2x \geq 4 \rightarrow 2x \leq -4$ یا $2x \geq 4 \rightarrow x \leq -2$ یا $x \geq 2$
4	$ u + v \leq u + v $	$ 3x + 2y \leq 3 x + 2 y $
5	$a \leq u \leq b \Leftrightarrow$ $-b \leq u \leq -a$ یا $a \leq u \leq b$	$2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -2$ یا $2 \leq x \leq 5$

حل نامعادلات شامل قدر مطلق:

برای اینکار همانند درس معادلات، چنانچه بتوان از خواص اخیر استفاده کرد نامعادله را حل می‌کنیم در غیر اینصورت لازم است از روش تعیین علامت استفاده کنیم.

$$|3x - 5| < 3$$

$$|x^2 - 5x| \geq 6$$

$$|x^2 - 5x| \leq 6$$

$$1 \leq |2x + 1| \leq 7$$

$$||x - 2| - 3| < 4$$

$$\left| \frac{x+1}{2-x} \right| \geq 2$$

$$6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \rightarrow$$

$$|x + 1| + |x - 2| < 5$$

$$|x^2 - 2| \geq |2 - 3x|$$

پویش
جهادی

دیپستان
ماندگار
البرز

حسابان ۱
ریاضی ۲

فصل یک استاد حسنی

پایه یازدهم ■ رشته ریاضی تجربی

$$|2x - 3| > x$$

$$|2x + 1| - |2 - x| > 5x -$$

مثال اگر در بازه (a,b) نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار $y = 2x + |x|$ باشد. طول نقطه وسط این بازه را بیابید.

$$|u + v| \leq |u| + |v| \text{ نامساوی مثلثی} \rightarrow \begin{cases} |u + v| = |u| + |v| \Leftrightarrow uv \geq 0 \\ |u + v| < |u| + |v| \Leftrightarrow uv < 0 \end{cases}$$

مثال) مجموعه جواب معادله $|x^2 + x - 5| = |x^2 - 1| + |x - 4|$ را بیابید.

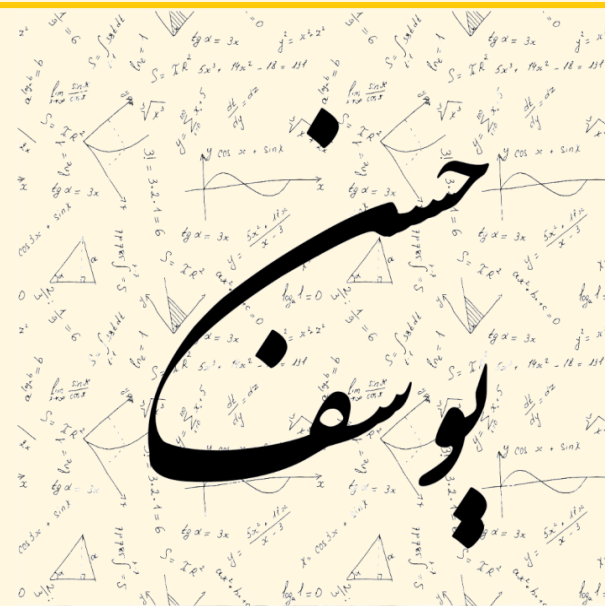
مثال) مجموعه جواب نامعادله $|2x - 3| < |x - 1| + |x - 2|$ را بیابید

به نام خدا

حسابان ۱ (درس پنجم از فصل اول)

ریاضی ۲ (درس اول از فصل اول)

هندسه تحلیلی

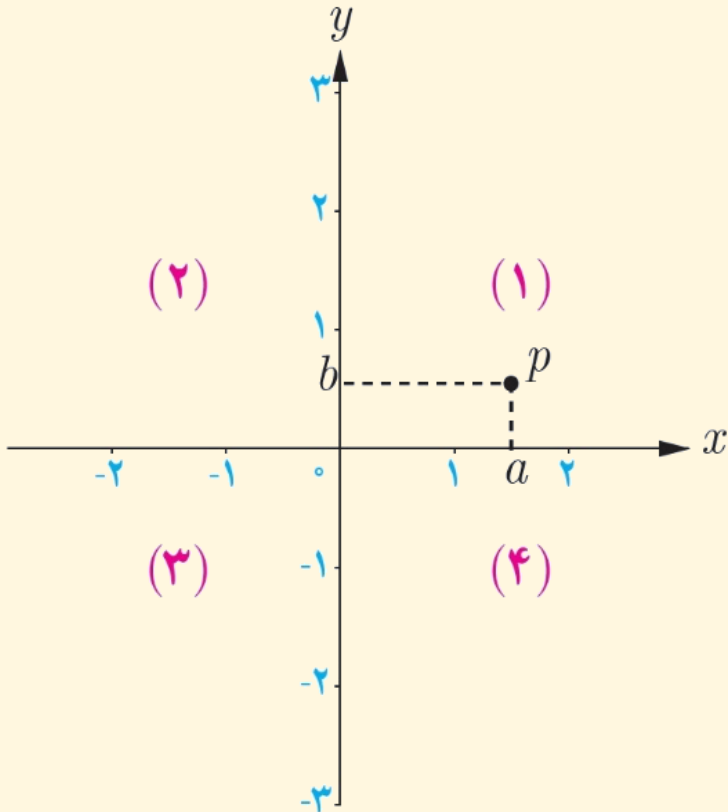


درس ۵: آشنایی با هندسه تحلیلی

یادآوری:

در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

به هر نقطه P در صفحه مختصات یک زوج مرتب (a, b) نظیر می‌شود به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه p را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم. در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم



مثال) حدود m را چنان بیابید که نقطه $P(m^2 - 4m + 3, |m + 1| - 2)$

الف) در ربع اول واقع باشد.

ب) در ربع چهارم واقع باشد.

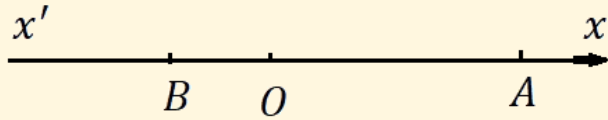
پ) روی محور طول‌ها باشد.

ت) روی محور عرض‌ها باشد.

ث) مجموع طول و عرض آن برابر ۲ باشد

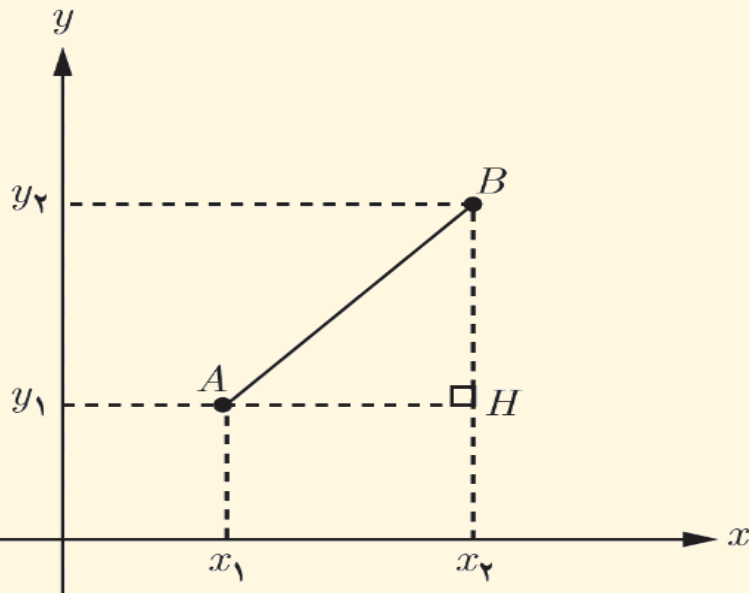
فاصله بین دو نقطه:

برای محاسبه فاصله بین دو نقطه، دو حالت در نظر می‌گیریم.
الف) زمانی که هر دو نقطه روی محور طول‌ها (یا عرض‌ها) باشند.
از دستور زیر به دست می‌آید.



$$|AB| = |x_B - x_A| \quad |AB| = |y_B - y_A|$$

ب) زمانی که اقلای یکی از دو نقطه روی محورهای مختصات واقع نباشد در این صورت به طور



کلی برای محاسبه فاصله بین دو نقطه A و B از دستور زیر

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
 استفاده می‌کنیم.

در حالت خاص، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات از دستور

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$
 به دست می‌آید.

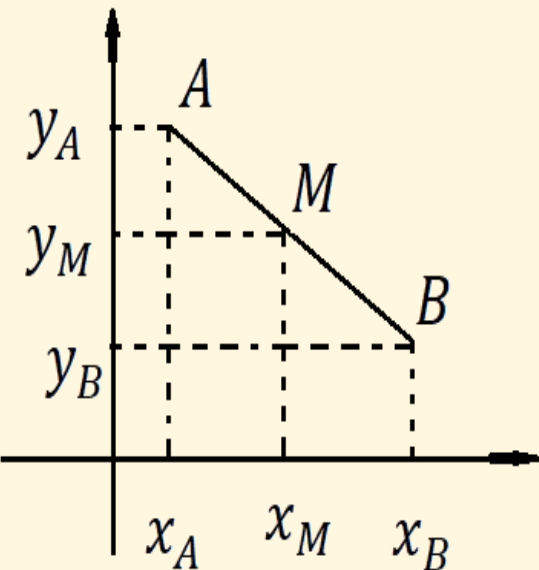
مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط:

زمانی که هر دو نقطه روی محور طول‌ها (یا عرض‌ها) باشند.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

حال فرض کنید که این دو نقطه روی یک خط مایل به صورت مقابل باشد در این صورت اگر نقطهٔ M وسط دو نقطهٔ A و B باشد



$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

معادله خط: معادله خط گذرنده از دو نقطه A و B با شیب $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال) نقاط $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC در صفحه مختصات هستند
الف) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

ب) نشان دهید مثلث قائم الزاویه است.

پ) شیب دو خط AC و AB را به دست آورید.

ت) معادله میانه CM را بنویسید.

ث) معادله ارتفاع AH را بنویسید.

ج) معادله عمود منصف ضلع BC را بنویسید.

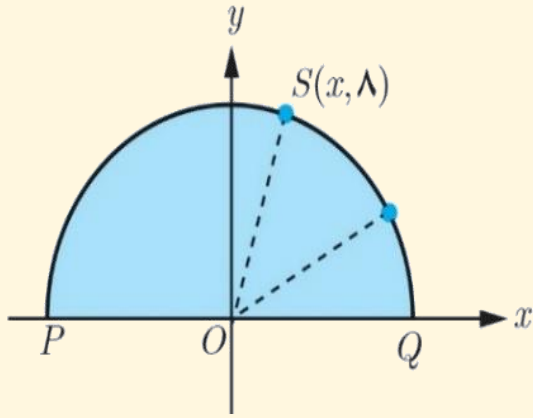
مثال) نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

مثال) نقطه‌ای روی نیمساز ربع سوم تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, -1)$ برابر $2\sqrt{2}$ باشد.

مثال) دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(0, 2)$ دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم را بیابید.

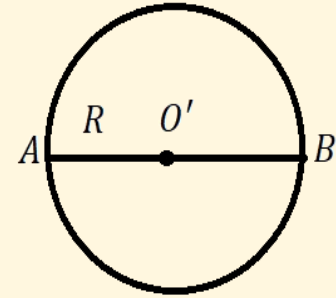
مثال) نقطه $S(x, \Lambda)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبرو داده شده است.

الف) مقدار x را به دست آورید.

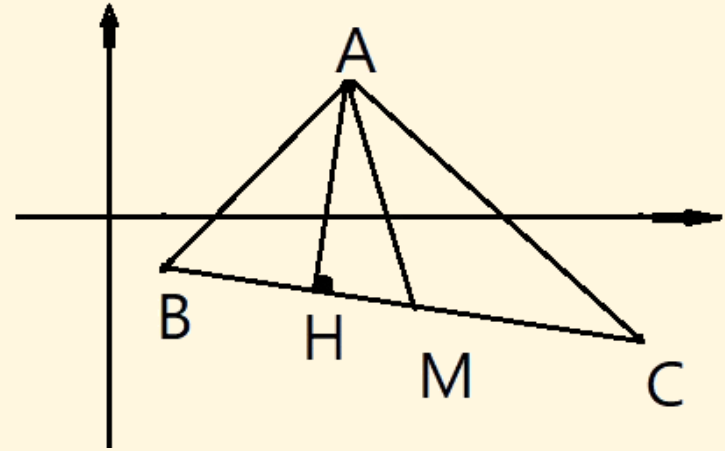


ب) شیب خطهای PS و SQ را به دست آورید و نشان دهید زاویه \widehat{PSQ} قائمه است.

مثال نقاط $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ دو سر قطر یک دایره‌اند. فاصله مرکز این دایره از مبدأ مختصات و محیط و مساحت این دایره را بیابید.



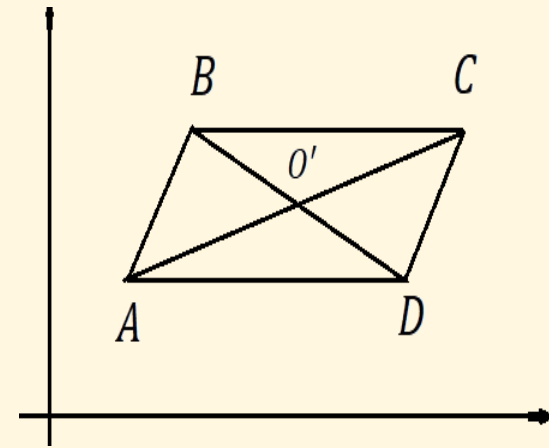
مثال) نقاط $A(4, 2)$, $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به دست آورید



رابطه بین رئوس متوازی الاضلاع:

هرگاه AC و BD دو قطر یک متوازی الاضلاع بوده (یعنی رئوس A و C روبروی هم و رئوس B و D نیز روبروی هم باشند) و این دو قطر یکدیگر را در نقطه O' قطع کنند در این صورت چون O' هم وسط AC و هم وسط BD است داریم:

$$\begin{cases} O' = \frac{A + C}{2} \\ O' = \frac{B + D}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2} \rightarrow A + C = B + D \rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



فاصله یک نقطه از یک خط:

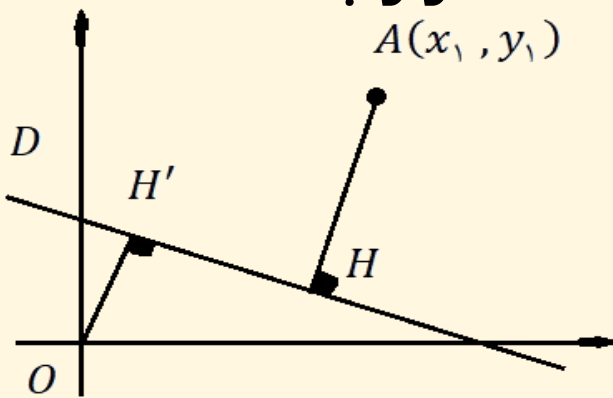
منظور از فاصله یک نقطه خارج خط از یک خط که همان کوتاهترین فاصله نقطه از خط است برابر با اندازه خط عمودی است که از نقطه بر خط خارج می‌شود. اگر در شکل زیر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ را از خط D به معادله ضمنی $ax + by + c = 0$ بیابیم. باید مختصات نقطه H (پای عمود) را یافته سپس طول عمود AH را محاسبه کنیم.

برای به دست آوردن مختصات نقطه H لازم است معادله خط AH را نوشته و آن را با معادله خط $D: ax + by + c = 0$ تلاقی دهیم. توجه داشته باشید شیب خط AH برابری عکس و قرینه

شیب خط D می‌باشد. و در نهایت و این طول از دستور $AH = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست

می‌آید. در حالت خاص فاصله مبدأ مختصات از خط $D: ax + by + c = 0$ از رابطه

محاسبه می‌شود. $OH = d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



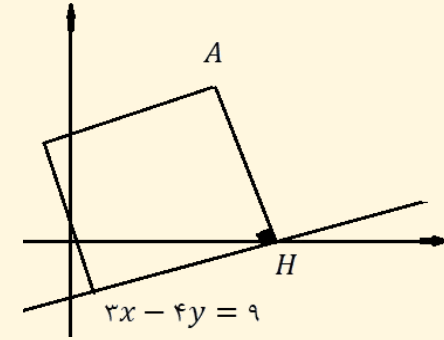
مثال ۹) خط $D: 2y + x = 5$ مفروض است. مطلوب است محاسبه:

الف) فاصله نقطه $A(4, -1)$ از این خط

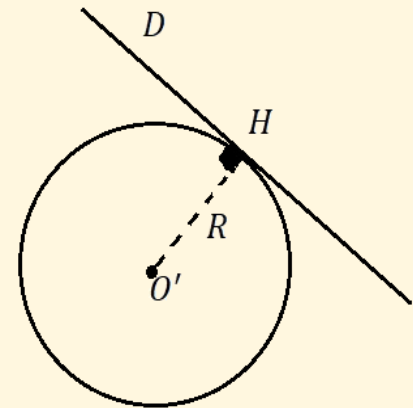
ب) فاصله مبدأ مختصات از این خط

مثال ۱۰) فاصله نقطه $A(-2, -3)$ از خط $3y = 2$ بیابید

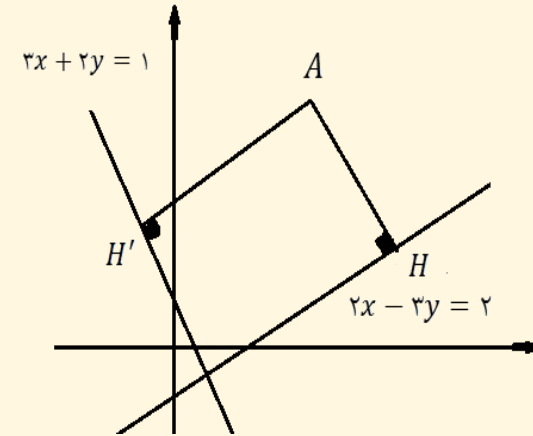
مثال) اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد. مساحت مربع چقدر است؟



مثال) خط $D: 4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O'(-1, 2)$ مماس است. محیط و مساحت می‌دانیم خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

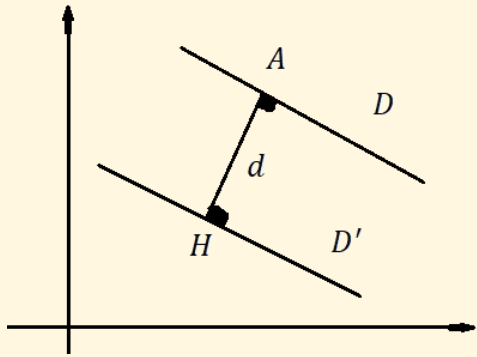


مثال) دو خط $2x - 3y = 2$ و $3x + 2y = 1$ معادله‌های دوضلع یک مستطیل ونقطه $A(2, 5)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟



فاصله دو خط موازی:

می‌دانیم اگر دو خط D و D' موازی باشند در اینصورت معادلات ضمنی آنها به صورت $D: ax + by + c = 0$ و $D': ax + by + c' = 0$ می‌باشد (گاهی پس از ساده شدن اقلاباً یکی از معادلات به این صورت درمی‌آیند). برای یافتن فاصله بین این دو نقطه کافی است فاصله نقطه دلخواهی از خط D را از خط D' بیابیم. این فاصله برابر است با:



فاصله نقطه $H(x_1, y_1)$ از خط $D: ax + by + c = 0$ برابر $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است و چون این نقطه روی خط به معادله $D': ax + by + c' = 0$ قرار دارد پس در آن صدق می‌کند

$$ax_1 + by_1 + c' = 0 \rightarrow ax_1 + by_1 = -c' \rightarrow \boxed{d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

مثال) اگر دو ضلع مربعی منطبق بر دو خط $D: y = \frac{3}{4}x + 1$ و $D': 6x - 7 = 8y$ باشند، محیط و مساحت این مربع را بیابید.



مثال) اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

مثال) اگر فاصله دو خط $8y = 6x + k^2$ و $y = \frac{3}{4}x + 1$ کمتر $\frac{1}{10}$ باشد، حدود k را بیابد.



مثال) دایره ای به مساحت 9π بر دوخط موازی و غیر منطبق $8y + nx = m$, $3x - 4y = 1$ مماس است مقادیر m , n را بیابید.



مثال) اگر دو خط $4x - 3y + 10 = 0$ و $4x - 3y - 30 = 0$ بر دایره ای مماس باشند و مرکز دایره بر خط $y + 2x = 0$ واقع باشد مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورید.



مثال) سه ضلع مثلث ABC روی خطوط $y = 2x - 3$ و $2y + x = 4$ و $x = 6$ قرار گرفته اند. محل تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC از خط $3x = 4y + a$ به فاصله ۲ است. مقادیر a را بیابید.



مثال) دو نقطه روی محور طولها وجود دارند که فاصله آنها از خط $D: 3x + 4y = 13$ برابر ۴ می‌باشد فاصله بین این دو نقطه را بیابید.

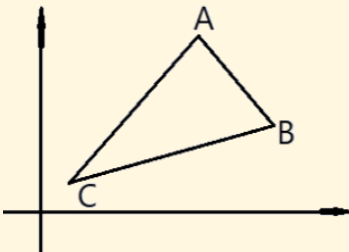


مساحت مثلث: برای محاسبه مساحت مثلث ABC با داشتن رئوس آن به سه روش زیر می‌توان عمل کرد.

روش اول: طول یکی از اضلاع و ارتفاع نظیر آن را یافته از رابطه $S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$ استفاده کنیم.

روش دوم: اندازه هر سه ضلع a, b, c را یافته با فرض $2P = a + b + c$ از دستور هرون به صورت $S = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)}$ استفاده کنیم. که در آن P نصف محیط مثلث است.

روش سوم: از رابطه $S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$ استفاده کنیم





مثال) مساحت مثلث با رئوس $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ و $C(3, 2)$ را بیابید.

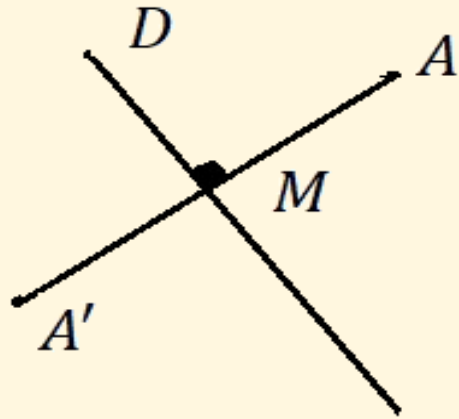
مثال) اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات $y = 2x - 1$, $3y + x = 4$ و $2y + x = 8$ هستند نوع مثلث و مساحت مثلث را بیابید.



مثال) قرینه نقطه $A(-3, 2)$ نسبت به خط $d: x + 2y + 1 = 0$ نقطه $B(2m - 9, 2n - 2)$ باشد، m و n را بیابید.



مثال) قرینه نقطه $A(2, 3)$ نسبت به خط $x + y = 3$ را بیابید.





مثال) فاصله بین دو خط موازی برابر $\frac{2}{5}$ است. اگر معادله یکی از خطوط موازی $y = \frac{3}{4}x - 1$ باشند. معادله خط دیگر را بنویسید.

مثال) فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $6y + 8x = k$ برابر ۴ است. مقدار k را بیابید



مثال) معادله خط مماس بر دایره‌ای به مرکز $C(1,2)$ در نقطه $A(-5,5)$ واقع بر دایره را بنویسید.

مثال) معادلات خطوط نیمساز زاویه بین دو خط $2x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ را به دست آورید.



مثال) مثلث ABC با رئوس $A(-1, 7)$, $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

ب) طول اضلاع AB و BC را محاسبه می‌کنیم



پایان فصل اول

@yousha6298

