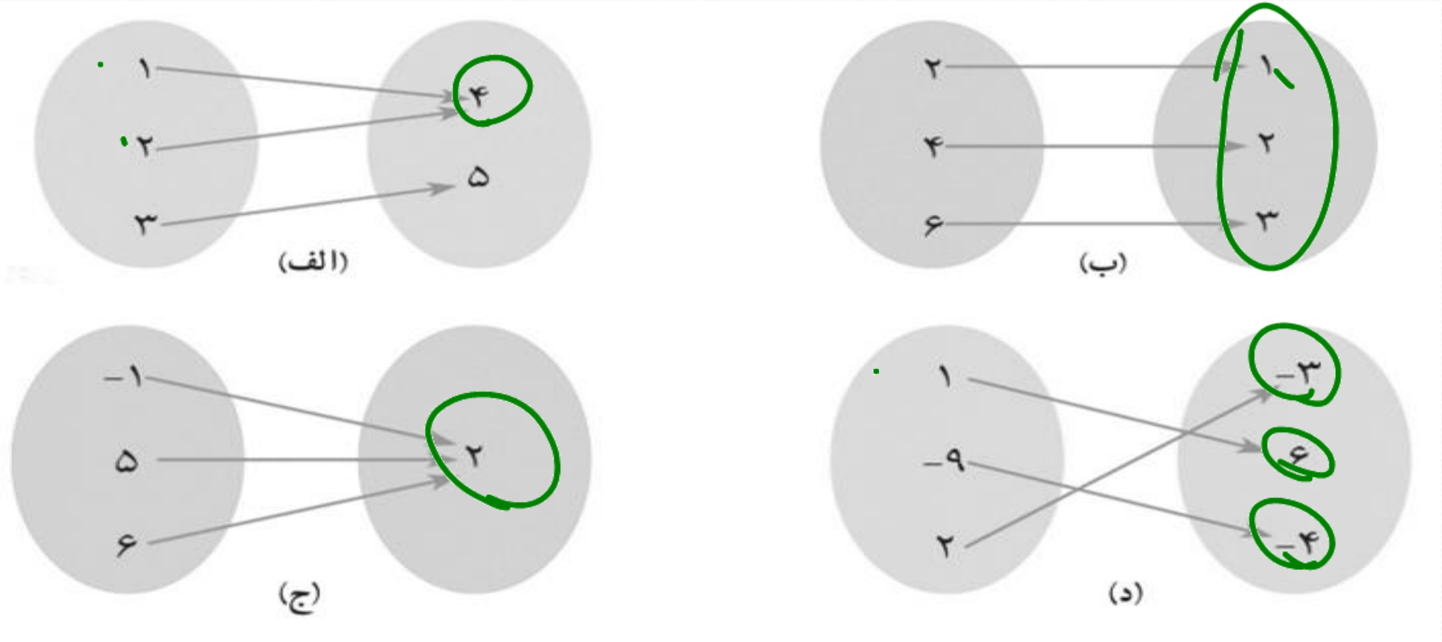
درس ۳: وارون تابع

توابع یک‌به‌یک: تابع یک‌به‌یک است هرگاه به هر عنصر در برد، دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود.

مثلاً در نمودارهای ون زیر، توابع «ب» و «د» یک به یک بوده، اما توابع «الف» و «ج» یک‌به‌یک نیستند.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵
(الف)
۲ ۴ ۶ ۱ ۲ ۳
(ب)
۱- ۵ ۶ ۲
(ج)
۱ ۹- ۲ ۳- ۶ ۴-
(د)

شرط یک‌به‌یک بودن توابعی که دامنه تعریف آنها متناهی است، آن است که تعداد اعضای دامنه و برد برابر باشند.

اگر توابع بالا را به کمک مجموعه زوج‌های مرتب نشان دهیم، داریم:

الف) $f = \{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$

ب) $g = \{(۲,۱),(۴,۲),(۶,۳)\}$

ج) $h = \{(-۱,۲),(۵,۲),(۶,۲)\}$

د) $k = \{(۱,۶),(-۹,-۴),(۲,-۳)\}$

همانگونه که در نمایش زوج مرتبی این توابع می‌بینید، در تابع غیر یک‌به‌یک f داریم: $f(۱) = ۴$ و $f(۲) = ۴$ و در تابع غیر یک‌به‌یک h داریم: $h(-۱) = ۲$ و $h(۵) = ۲$ و $h(۶) = ۲$ یعنی در این دو تابع حداقل دو زوج مرتب با مولفه‌های اول نابرابر و مولفه‌های دوم یکسان وجود دارند. در حالیکه در توابع یک‌به‌یک g و k هیچ دو زوج مرتبی با مولفه‌های اول یکسان وجود ندارد.

پس می‌توان گفت:

تابع f به شرطی یک‌به‌یک است که هر دو عضو متمایز x_1, x_2 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_1)$ و $f(x_2)$ در برد نظیر شوند. به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

$$\text{تابع } f \text{ یک به یک است} \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in D_f \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2\right)$$

تعریف جبری تابع یک به یک

مثلاً برای بررسی یک‌به‌یک بودن تابع با ضابطه $f(x) = ۲ - ۳x$ چون $D_f = R$ است پس $\forall x_۱ , x_۲ \in R$ داریم:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \rightarrow ۲ - ۳x_۱ = ۲ - ۳x_۲ \rightarrow -۳x_۱ = -۳x_۲ \rightarrow x_۱ = x_۲$$

$\rightarrow$. تابع f یک‌به‌یک است

مثال۱) تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد. (فرد و روز تولد)

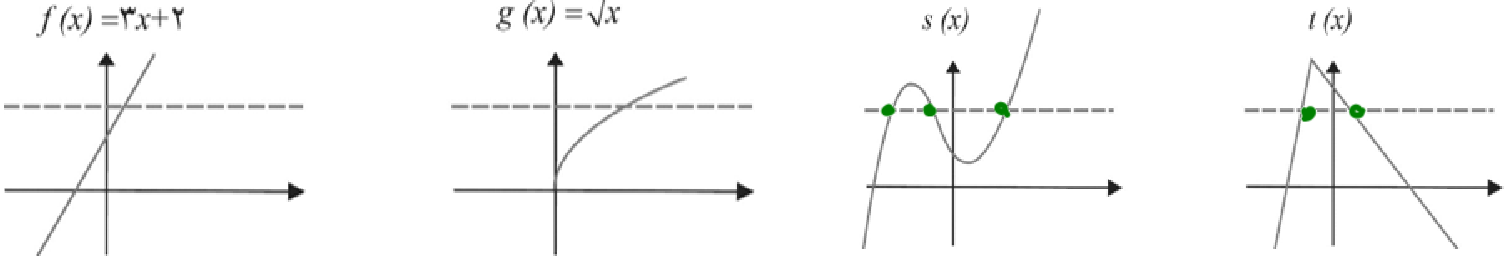
مثال۲) تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک باشد. (فرد و کد ملی)

بررسی یک به یک بودن توابع به کمک نمودار آنها:

از تعریف تابع یک‌به‌یک نتیجه می‌گیریم که:

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، f در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. بررسی یک به یک بودن تابع به کمک نمودار را، آزمون خط افقی گوییم.

در شکل‌های زیر، توابع f و g یک به یک هستند، زیرا هر خط افقی، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، اما توابع s و t یک به یک نیستند، زیرا حداقل یک خط افقی وجود دارد که نمودار آنها را در بیش از یک نقطه قطع کند.



مدرس: افخمی

مثال ۵) به کمک مثال نقض نشان دهید توابع زیر یک‌به‌یک نیستند.

$f(0)=f(-4)=5$ ولی $0 \neq -4$

الف) $f(x) = x^۲ + ۴x + ۵$

$x^2+4x+5=5$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0$

$x=-4$

ب) $g(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$

$x^3+3x^2+1=1$

$x^3+3x^2=0$

$x^2(x+3)=0$

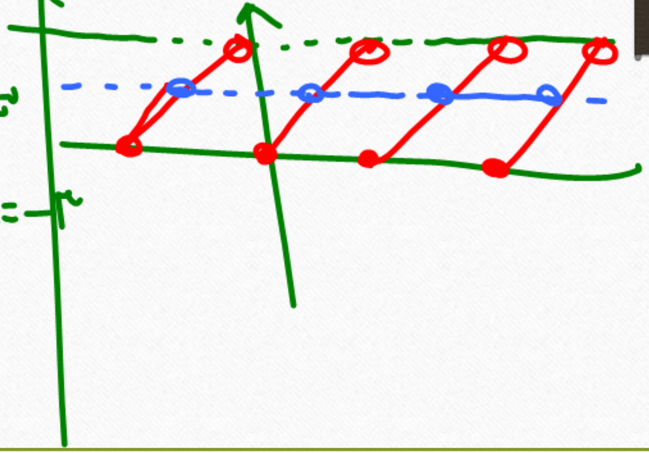
$x=0$

$x=-3$

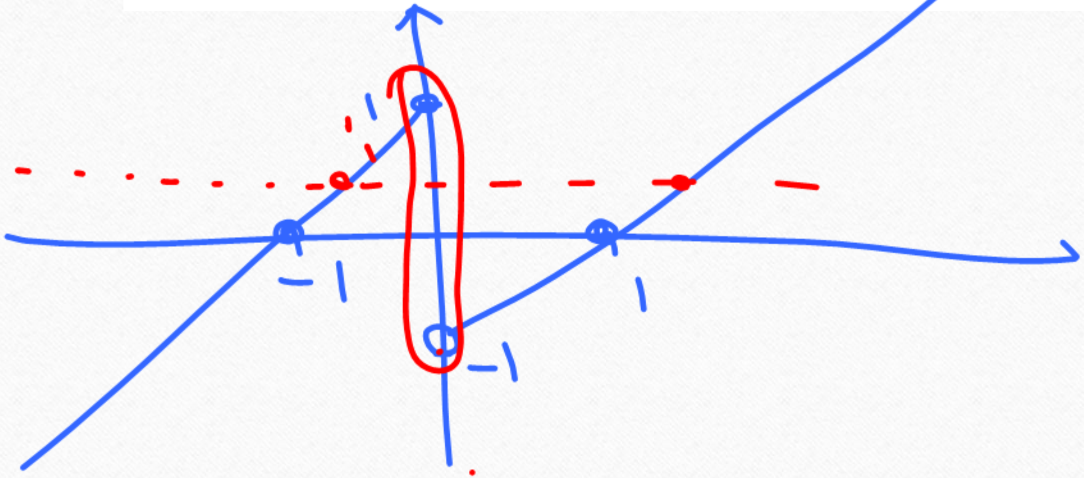
$(0,1)$ و $(-3,1)$

پ) $h(x) = x - [x]$

شانه اره‌ای (چمن دندانه)

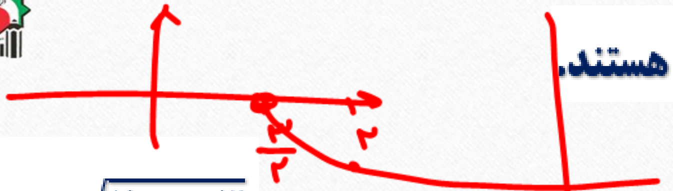


مثال) به روش مناسب، در یک‌به‌یک بودن تابع $f(x)=\begin{cases} x+1\ ; x\le 0 \\ x-1\ ; x>0 \end{cases}$ تحقیق کنید.



مثال) نشان دهید توابع زیر یک‌به‌یک هستند.

الف) $f(x) = -\sqrt{۲x - ۳}$



$f(x_1) = f(x_2)$

$\to -\sqrt{2x_1 - 3} = -\sqrt{2x_2 - 3}$

توان ۲ $\to 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$\to 2x_1 = 2x_2 \to x_1 = x_2$

پ) $h(x) = \sqrt[۵]{۲x^۳ - ۴}$

$h(x_1) = h(x_2) \to$

$\sqrt[5]{2x_1^3 - 4} = \sqrt[5]{2x_2^3 - 4} \to$

$2x_1^3 - \cancel{4} = 2x_2^3 - \cancel{4} \to$

$2x_1^3 = 2x_2^3 \to x_1^3 = x_2^3 \to x_1 = x_2$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ هموگرافیک

ت) $k(x)=\frac{x+6}{3x-4}$

$k(x_1)=k(x_2)\to$

$\frac{x_1+6}{3x_1-4}=\frac{x_2+6}{3x_2-4}\to$

$(x_1+6)(3x_2-4)=(3x_1-4)(x_2+6)$

$\cancel{3x_1x_2}-4x_1+18x_2\cancel{-24}=\cancel{3x_1x_2}+18x_1-4x_2\cancel{-24}$

$22x_2=22x_1\to x_1=x_2$

یک به یک

ث) $t(x)=x+[x]$

(۱) $0\le x<1 \to [x]=0 \to t(x)=x$

(۲) $1\le x<2 \to [x]=1 \to t(x)=x+1$

(۳) $2\le x<3 \to [x]=2 \to t(x)=x+2$

توابعی که در حالت کلی یک‌به‌یک نیستند:

۱) توابع ثابت و یا توابعی که بخشی از آنها ثابت است. مانند: $f(x) = -۲$ یا $g(x) = \begin{cases} x \,;\, x \le ۰ \\ ۳ \,;\, x > ۰ \end{cases}$

ثابت

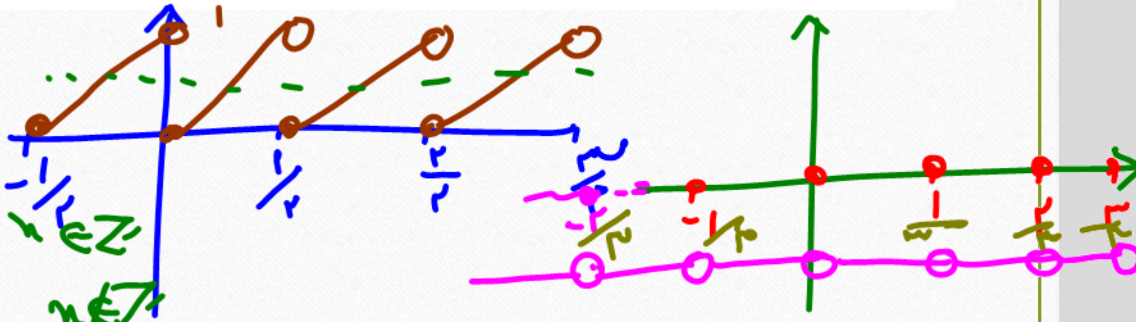
۲) توابع به فرم کلی: $f(x) = ax - [ax]$ و $h(x) = [ax] + [-ax]$.

۳) توابع به فرم $f(x) = [g(x)]$ و $f(x) = |g(x)|$. مانند: $f(x) = [۲x - ۱]$ یا $g(x) = |x^۲ - ۳x|$

$h(x) = 2x - [2x]$

$h(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

$k(x) = [3x] + [-3x]$



۴) کلیه توابعی که دارای محور تقارن قائم هستند. مانند تابع $f(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۱$ که در آن خط قائم $x = ۱$ محور تقارن تابع است.

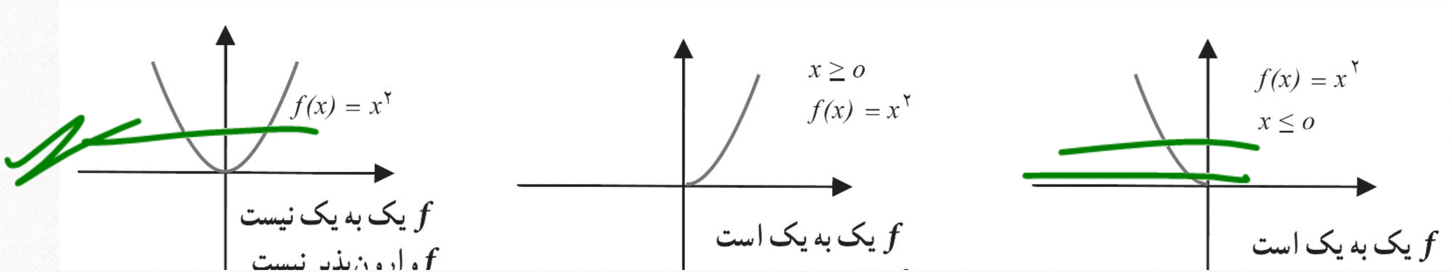
$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{6} = 1$

$(1,-2)$

یک به یک کردن توابع غیر یک‌به‌یک به کمک تحدید تابع:

محدود کردن دامنهٔ تعریف یک تابع را تحدید تابع می‌نامند. عمل تحدید از روی تابع داده شده، تابع جدیدی می‌سازد و ممکن است تابع جدید خواصی داشته باشد که تابع قبلی نداشته باشد.

مثلاً تابع $f(x) = x^۲$ روی دامنه‌ش یعنی R ، یک‌به‌یک نیست. اما اگر همین دامنه را به بازه $(۰ , +\infty]$ یا $[-\infty , ۰)$ محدود کنیم. در این صورت با توابع جدیدی سروکار داریم که تحدید یافته این تابع بوده و یک‌به‌یک هستند. برای درک مطلب به نمودارهای تابع اصلی و توابع تحدید یافته به صورت زیر توجه کنید.

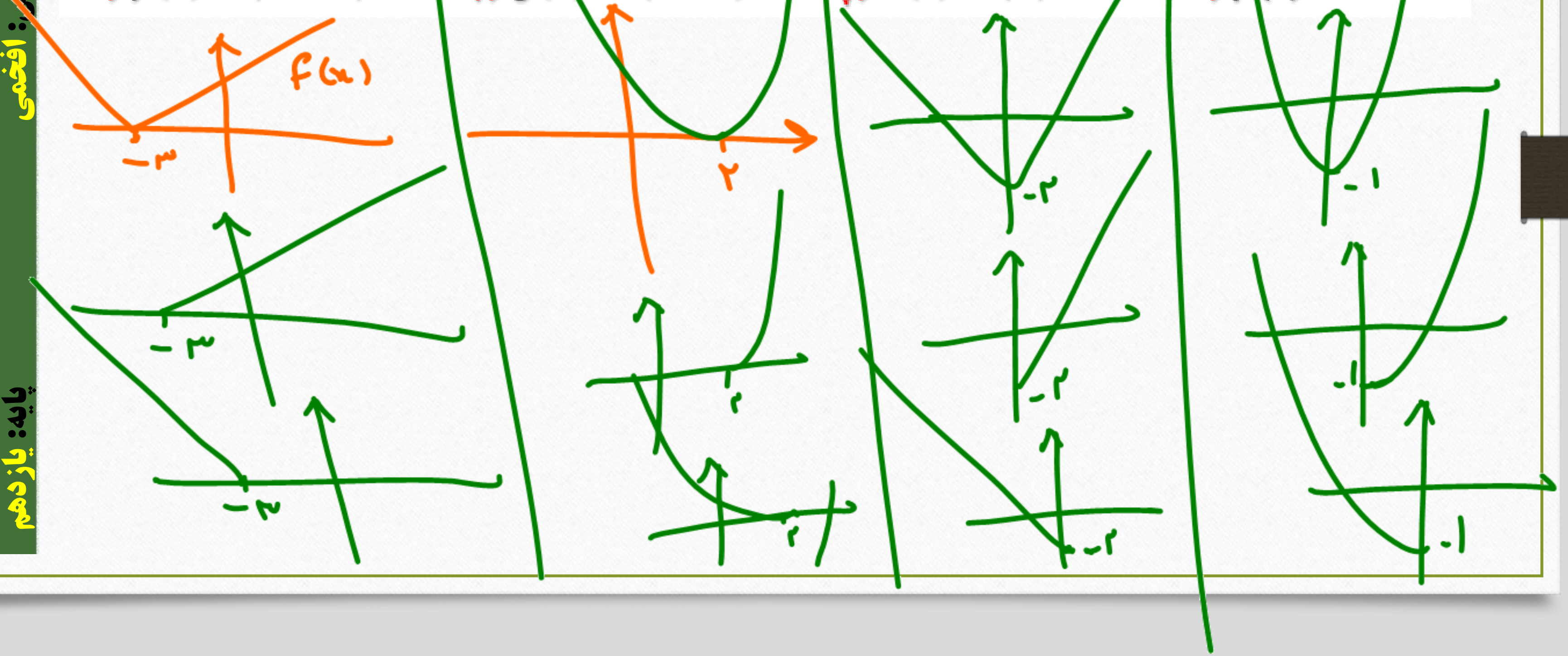


نکتهٔ مهم: تحدید کردن یک تابع غیر یک‌به‌یک همواره منجر به تولید یک تابع یک به یک نمی‌شود. مثلاً اگر همین تابع اخیر را با دامنه $(-\infty , 1]$ تحدید کنیم، تابع جدید یک‌به‌یک نیست. پس در انتخاب دامنهٔ جدید باید دقت لازم را به کار ببرید.

مدرس: افخمی

پایه: یازدهم

الف) $f(x)=|x+3|$ ب) $g(x)=(x-2)^2$ پ) $h(x)=|x|-2$ ت) $p(x)=x^2-1$



وارون یک تابع:

اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب رابطه به‌دست می‌آید، وارون آن رابطه می‌نامیم. از طرفی چون یک تابع f رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه‌های اول یکسان نباشد، پس وارون (یا معکوس) این تابع نیز که آن را با g نمایش می‌دهیم نیز به همین ترتیب به دست می‌آید.

هست ۱−۱

۱−۱

مثال) وارون توابع $f_۱ = \{(۲,۱),(۴,۲),(۶,۳)\}$ و $f_۲ = \{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$ و دامنه و برد هر کدام را یافته و با هم مقایسه کنید.

$f_1^{-1}: \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$

$f_2^{-1}: \{(4,1),(4,2),(5,3)\}$

تعریف: اگر $f:A \longrightarrow B$ و $f = \{(x,y) | x \in A , y \in B\}$ یک تابع باشد در این صورت برای این تابع، رابطهٔ $g:B \to A$ و $g = \{(y,x) | x \in A , y \in B\}$، موجود است که آن را وارون (یا معکوس) تابع f می‌گوییم.

اگر خود g یک تابع باشد، در این صورت آن را تابع وارون (یا تابع معکوس) تابع f گفته و با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم.

در این صورت اصطلاحاً می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر (یا معکوس‌پذیر) است. این وضعیت زمانی رخ می‌دهد که تابع f یک‌به‌یک باشد، پس: «تابع f وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر یک‌به‌یک باشد.»

در واقع تابع $f:A \longrightarrow B$ مقدار x را به y نسبت می‌دهد در حالی که تابع $f^{-1}:B \to A$ مقدار y را به x نسبت می‌دهد.

از نظر مقدار، دو تابع f و f^{-1} وارون یکدیگرند، هرگاه: $\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$

$y = f(x)$ f^{-1} $f^{-1}(y) = x$

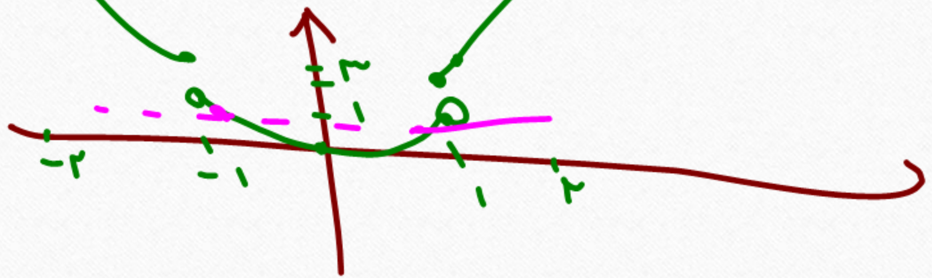
f (تابع) دارد

مثال) در مورد وارون‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ; x\le -1 \\ x^2 & ; -1<x<1 \\ x+1 & ; x\ge 1 \end{cases}$ تحقیق کنید.

$f(-1)=3$

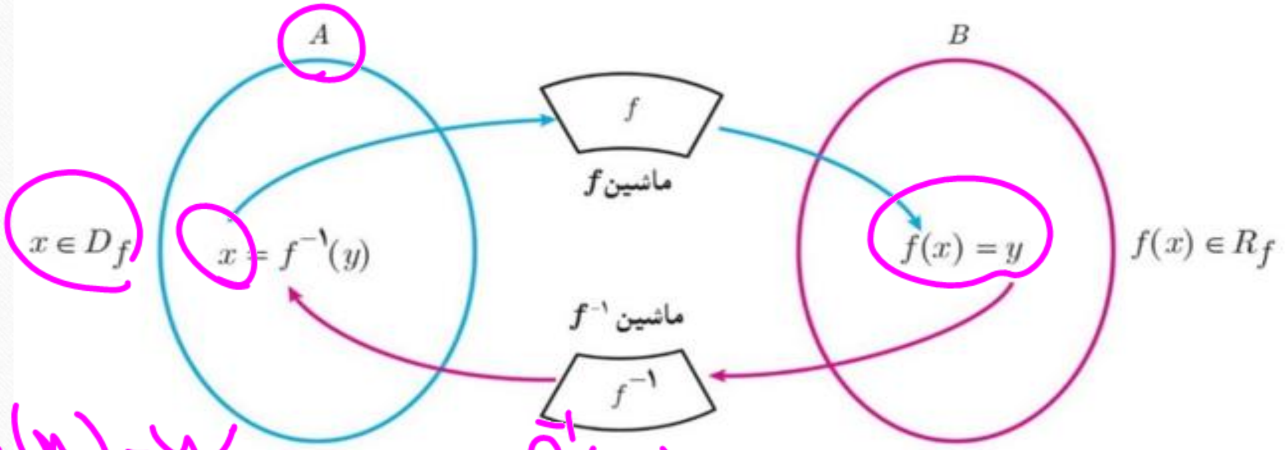
$f(2)=3$

f یک به یک نیست و لذا وارون پذیر نیست



نمودار کارکرد یک تابع و وارونش:

اگر f تابعی یک‌به‌یک و f^{-1} وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد.



$f(x)=y \longleftarrow f^{-1}(y)=x$

نکات مهم: از تعریف وارون تابع و ماشین بالا، نتایج مهم زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

نکته ۱) $\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$ پس اگر نقطه $A(a\,,b)$ متعلق به تابع f باشد، آنگاه نقطه $A'(b\,,a)$ متعلق به تابع f^{-1} می‌باشد. در این صورت دو نقطه A و A' را متناظر هم گوییم. و لذا داریم:

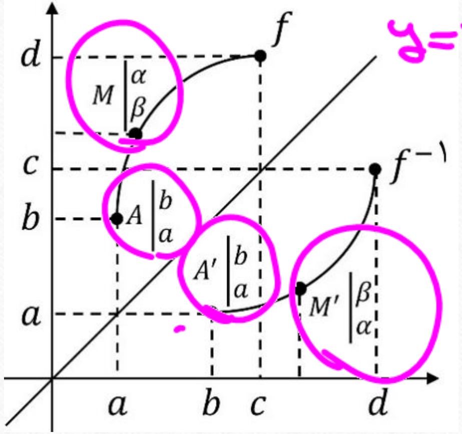
$$\boxed{A(a\,,b) \in f \Leftrightarrow A'(b\,,a) \in f^{-1} \qquad \text{یا} \qquad f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a}$$

دقت کنید که اگر تابع f وارون‌پذیر بوده و مقدار b را داشته باشیم، به دلیل یک‌به‌یک بودن آن، از معادله $f(a) = b$ برای a فقط یک مقدار به دست می‌آید.

اصلا تک به تک نیست و بنابراین وارون پذیر نیست.

مثال) آیا تابع $f(x) = \frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x) = \frac{۵}{۲}$ است؟

دقت کنید که بطور کلی توابع ثابت و یا توابعی که قسمتی از آنها ثابت است هیچگاه وارون‌پذیر نیستند.



نکته ۲) نمودار یک تابع و وارونش نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم یعنی خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگرند. زیرا دو نقطهٔ دلخواه و متناظر $A(a , b)$ و $A'(b , a)$ نسبت به این خط قرینه هم هستند.

نتایج مهم:

نتیجهٔ ۱) اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم به راحتی می‌توانیم نمودار وارون آن را رسم کنیم. برای این کار کافی است که قرینهٔ نمودار داده شده را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم.

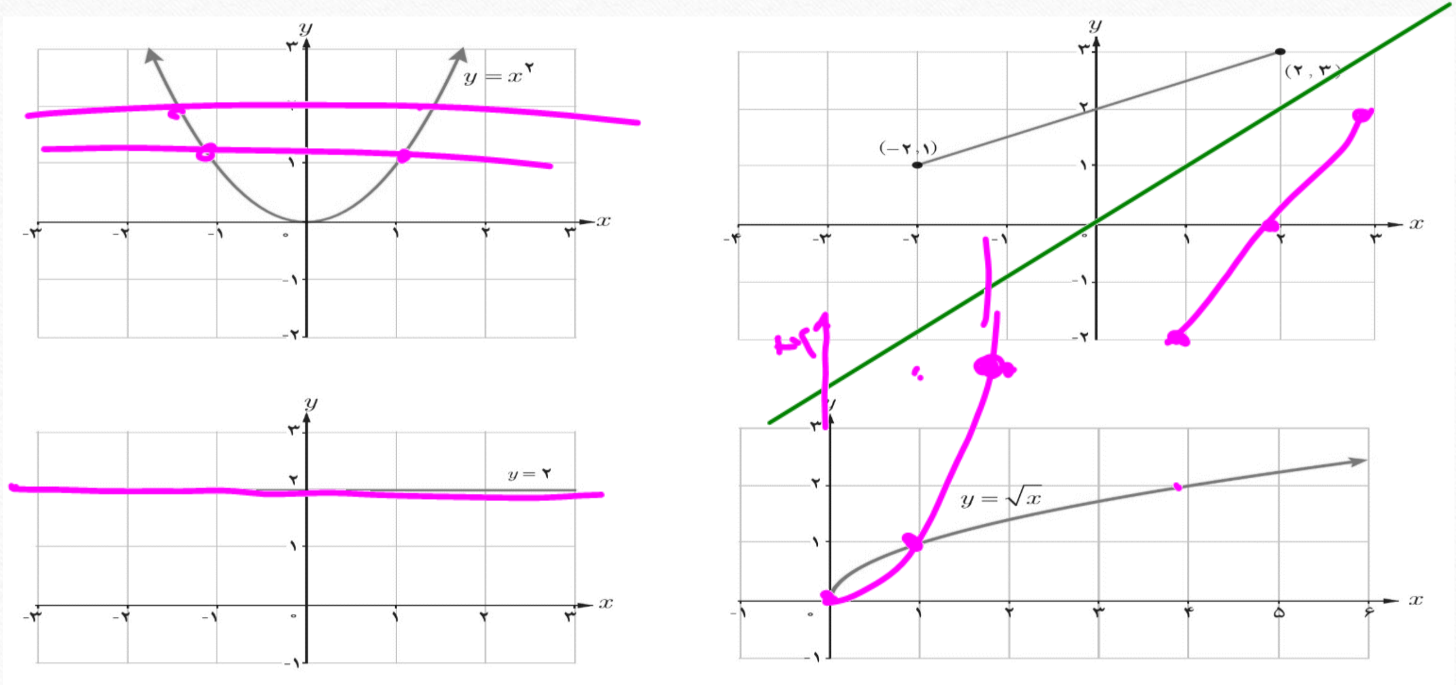
مثال) نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک‌به‌یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

درس: ریاضی ۲ و حسابان ۱

مبحث: تابع

مدرس: افخمی

پایه: یازدهم



نتیجهٔ ۲) برای دو تابع f و f^{-1} همواره داریم: $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$.

مثال) اگر در تابع خطی f داشته باشیم: $f(۲) = ۱۱$ و عرض از مبدأ نمودار آن ۷ باشد، ضابطه تابع و وارون آن را بیابید.

$f(۲)=۱۱$

$m=\frac{۱۱-۷}{۲-۰}=۲ \to y=۲x+۷$

$f(0)=۷$

وارون یعنی جای x و y

$y=۲x+۷ \to ۲x=y-۷ \to x=\frac{y-۷}{۲}$

$f^{-1}(x)=\frac{x-۷}{۲}$

محاسبهٔ وارون یک تابع:

در حالت کلی برای پیدا کردن وارون تابع $y = f(x)$، ابتدا یک به یک بودن تابع را بررسی می‌کنیم، اگر تابع یک‌به‌یک نباشد می‌گوییم وارون‌پذیر نیست و اگر تابع یک‌به‌یک باشد در معادلهٔ تابع به جای $f(x)$ مقدار y را قرار داده و x را بر حسب y پیدا می کنیم(x را تنها می کنیم). در مرحله آخر با تبدیل y به x ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست آوریم.

مثال) اگر $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ باشد، در وارون‌پذیری این تابع تحقیق کرده، در صورت وجود ضابطهٔ وارون آن را یافته و نمودارهای آنها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + \cancel{3} = -\frac{1}{2}x_2 + \cancel{3} \longrightarrow -\cancel{\frac{1}{2}}x_1 = -\cancel{\frac{1}{2}}x_2 \longrightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک و لذا وارون پذیر است

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{y-3}{-\frac{1}{2}} = x \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = -2(x-3)$$

مثال) دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید. سپس در معادلهٔ $y=\sqrt{x-2}$ ضابطهٔ f^{-1} را نوشته و نمودار آن را نیز رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

$y=\sqrt{x-2}$

$x-2=y^2$

$x=y^2+2$

$f^{-1}(x)=x^2+2 \quad x\geq 0$

$D_f:[2,+\infty)$

$R_f:[0,+\infty)$

مثال) در معکوس‌پذیری توابع زیر تحقیق کرده و ضابطهٔ تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند به دست آورید.

الف) $f(x) = -\sqrt{۲x - ۳}$

پ) $h(x) = \sqrt[۵]{۲x^۳ - ۴}$

$f(x_1) = f(x_2) \to -\sqrt{2x_1-3} = -\sqrt{2x_2-3}$

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \to 2x_1 = 2x_2 \to x_1 = x_2$

$y = -\sqrt{2x-3} \to y^2 = 2x-3 \to \frac{y^2+3}{2} = x \to f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$

$h(x_1) = h(x_2) \to \sqrt[5]{2x_1^3-4} = \sqrt[5]{2x_2^3-4} \to 2x_1^3-4 = 2x_2^3-4 \to x_1 = x_2$

$y = \sqrt[5]{2x^3-4} \to y^5 = 2x^3-4$

$y^5+4 = 2x^3 \to x^3 = \frac{y^5+4}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{y^5+4}{2}}$

$h^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x^5+4}{2}}$

ت) $k(x)=\frac{x+۶}{۳x-۴}$

$\frac{y}{1}=\frac{x+6}{3x-4}$

$3xy-4y=x+6$

$3xy-x=4y+6$

$x(3y-1)=4y+6 \longrightarrow x=\frac{4y+6}{3y-1}$

تنها

$f^{-1}(x)=\frac{4x+6}{3x-1}$

برابر $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

$y^{-1}=\frac{-dx+b}{cx-a}$

نکته: وارون تابع

$f(x)=\frac{5x+6}{3x-2}$ $f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3x-5}$

وارون توابع چندضابطه‌ای:

کافی است پس از اثبات یک‌به‌یک بودن این توابع، وارون هر ضابطه را محاسبه کنیم. در این توابع در تعیین برد هر ضابطه احتیاط کنید، زیرا این بردها، دامنهٔ ضوابط تابع معکوس خواهند بود، مثلاً اگر تابع دو ضابطه‌ای f وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & ; x\in D_g \\ h(x) & ; x\in D_h \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x) & ; x\in R_g \\ h^{-1}(x) & ; x\in R_h \end{cases}$$

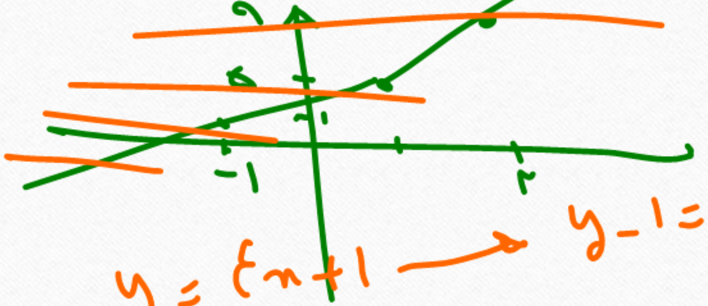
مثال) ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = ۳x + ۲ + |x - ۱|$ را در صورت وجود بیابید.

$x \geq 1 \longrightarrow 4x \geq 4 \longrightarrow 4x+1 \geq 5$

$-x+1$

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & x \geq 1 \\ 2x+3 & x < 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4} & x \geq 5 \\ \frac{x-3}{2} & x < 5 \end{cases}$$



$y = 4x+1 \longrightarrow y-1 = 4x \longrightarrow x = \frac{y-1}{4} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$

$y = 2x+3 \longrightarrow x = \frac{y-3}{2}$

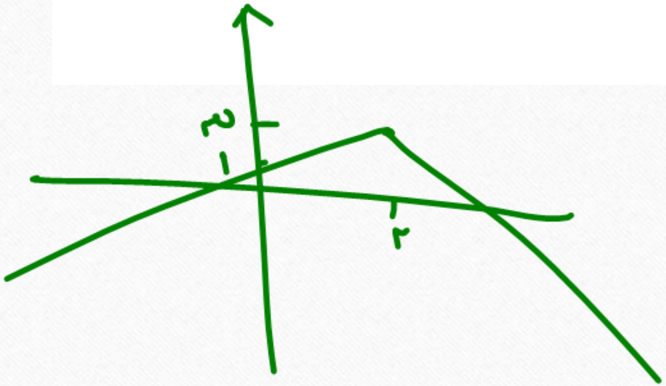
وارون‌پذیر کردن توابع وارون‌ناپذیر به کمک تحدید تابع:

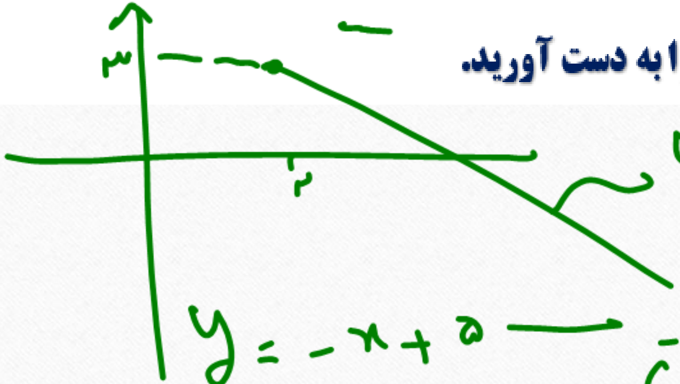
چون شرط وارون‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است، پس با یک‌به‌یک کردن توابع غیر یک‌به‌یک به کمک تحدید تابع، می‌توان توابع وارون‌ناپذیر را به توابع وارون‌پذیر تبدیل کرد. مثلاً توابعی مانند $f(x) = ax^2 + bx + c$ که دارای محور تقارن قائم به معادله $x = \frac{-b}{2a}$ هستند را می‌توان با محدود کردن دامنه به بازه $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ به تابعی وارون‌پذیر تبدیل کرد.

$x = -\frac{b}{2a}$

$-x+2$

مثال) نشان دهید تابع $f(x) = -|x-2| + 3$ یک‌به‌یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک‌به‌یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.





$y = -x+5$

$y = -x+5 \longrightarrow f^{-1}(x) = 5 - x \quad x \leq 3$

$x = 5 - y \longrightarrow$

مثال) نشان دهید تابع $f(x) = x^{۲} + ۱۰x + ۲۳$ یک‌به‌یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک‌به‌یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

$x_s = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۱۰}{۲} = -۵$

$① \; x \geq -۵ \longrightarrow f(x) = x^{۲} + ۱۰x + ۲۳ = x^{۲} + ۱۰x + ۲۵ - ۲۵ + ۲۳$

$\to f(x) = (x+۵)^{۲} - ۲ \to y = (x+۵)^{۲} - ۲ \to (x+۵)^{۲} = y+۲$

$\to (x+۵) = \pm\sqrt{y+۲} \to x = -۵ + \sqrt{y+۲}$

$\to f^{-۱}(x) = -۵ + \sqrt{x+۲}$

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

الف) $f(x)=(x+5)^2 \quad , \quad x\geq -5$

ب) $f(x)=-|x-1|+1 \quad , \quad x\geq 2$

پ) $f(x)=(x-3)^2$

ت) $f(x)=\sqrt{x+2}-3$

الف) $y=(x+5)^2 \longrightarrow x+5=\pm\sqrt{y} \longrightarrow x=-5\pm\sqrt{y} \longrightarrow x=-5+\sqrt{y}$

$f^{-1}(x)=-5+\sqrt{x}$

-5

ب) $f(x)=-x+2 \longrightarrow x=2-y \longrightarrow f^{-1}(x)=2-x$

$y=\sqrt{x+2}-3$

$y+3=\sqrt{x+2} \longrightarrow (y+3)^2=x+2$

$x=(y+3)^2-2 \longrightarrow f^{-1}(x)=(x+3)^2-2$

X 1 -1 3 -2 -3

پویش علمی جهاد

درس ۴: اعمال جبری روی توابع

مقدمه: همان‌گونه که اعمال جبری (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) در مورد دو عدد حقیقی و یا دو چندجمله‌ای و بطور کلی دو عبارت جبری انجام‌پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است.

ورودی

تعریف: به طور کلی اگر f و g دو تابع باشند، توابع $f+g$ ،$f-g$ ،$f.g$ و $\frac{f}{g}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad ; \quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad ; \quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \quad ; \quad D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|\,g(x)=۰\}$$

مدرس: افخمی

پایه: یازدهم

نتیجه: دامنهٔ تعریف تابعی که از چهار عمل اصلی روی دو تابع تشکیل شده است برابر است با اشتراک دامنه‌های تعریف آنها، فقط در حالت تقسیم، ریشه‌های مخرج نیز از این اشتراک حذف می‌شوند.

نکته: از تعریف اخیر نتیجه می‌شود که دامنهٔ تعریف تابع $y = f^n(x)$ همان دامنهٔ تعریف تابع $y = f(x)$ است. مثلاً

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد، چون $D_f = [۰, +\infty)$، پس برای تابع $g(x) = f^۲(x) = x$ داریم: $D_g = [۰, +\infty)$.

$f(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad D_f: x \geq 0$

$f(x) = (\sqrt{x})^2 \qquad g(x) = x$

$$(2f+1)(x) = 2f(x)+1 = 2\sqrt{x}+1 \quad ; \quad x \geq 0$$

مثال ۱) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ ضوابط توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ ، $\frac{g}{f}$ ، f^3 و g^2 و $2f+1$ و دامنه‌های آنها را بیابید.

$D_f : x \geq 0 \qquad D_g : x \leq 1 \qquad [0,1]$

(۱) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x}+\sqrt{1-x} \; ; x \in [0,1]$

(۲) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x}-\sqrt{1-x} \; ; x \in [0,1]$

(۳) $(f.g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{1-x}\right) \; ; x \in [0,1]$

(۴) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \; ; x \in [0,1)$

(۵) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \; ; x \in (0,1]$

(۶) $f^3(x) = (\sqrt{x})^3 \; ; [0, +\infty)$

(۷) $g^2(x) = (\sqrt{1-x})^2 \qquad x \leq 1$

مدرس: افخمی

مثال) اگر $f(x)=x^{2}-9$ و $g(x)=x+3$، ضابطهٔ تابع $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{2}-9}{x+3}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{x+3}}=x-3\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-3\}$$

مثال) توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

$$f=\left\{(-4,13),(-1,7),(0,5),\left(\frac{5}{2},0\right),(3,-5)\right\}$$

$$g=\{(-4,-7),(-2,-5),(0,-3),(3,0),(5,2),(9,6)\}$$

$$D_f \cap D_g : \{-4, 0, 3\}$$

$$f+g=\{(-4,6),(0,2),(3,-5)\}$$

$$f-g=\{(-4,20),(0,8),(3,-5)\}$$

$$f.g=\{(-4,-91),(0,-15),(3,0)\}$$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(-4,\frac{-13}{7}\right),\left(0,\frac{-5}{3}\right),\cancel{\left(3,\frac{-5}{0}\right)}\right\}$$

$$D_{f/g}=\{-4,0\}$$

مثال) کدام یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - x}$

$x \geq 0$

$x \geq 1$

$\cap : [1, +\infty) = D_f$

$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0$ یا $x = 1$

$D_g : (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

$D_f \neq D_g \xrightarrow{\text{چون}} f \neq g$

ب) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۳-x}}$ و $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{۳-x}}$

$x-1\geq 0 \longrightarrow x\geq 1$

و

$3-x>0 \longrightarrow x<3$

$\cap : [1,3) = D_f$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\dfrac{x-1}{3-x}\geq 0$

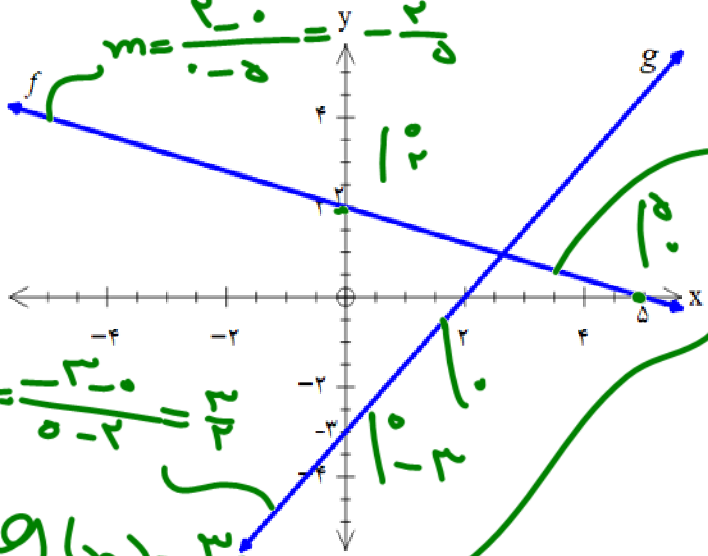
	1		3	
	−	+	−	

$D_g=[1,3)$

شرط اول تساوی دو تابع برقرار است.

$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}=f(x)$

مثال) نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطهٔ توابع مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت آنها را بیابید.



$m=\frac{2-0}{0-5}=-\frac{2}{5}$

$\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}5\\0\end{vmatrix}$

$f(x)=-\frac{2}{5}x+2$

$m=\frac{-3-0}{0-2}=\frac{3}{2}$

$\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}0\\-3\end{vmatrix}$

$g(x)=\frac{3}{2}x-3$

$D_{f\pm g,\ f\times g}=\mathbb{R}$

$f(x)\pm g(x),\ f(x)\times g(x)=\left(-\frac{2}{5}x+2\right)\pm\times\left(\frac{3}{2}x-3\right)$

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-\frac{2}{5}x+2}{\frac{3}{2}x-3}$

$D_{f/g}=\mathbb{R}-\{2\}$

مدرس: افخمی

پایه: یازدهم

مثال) اگر $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ باشد، دامنه و ضابطهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f \pm g$ ب) $f \cdot g$ پ) $\frac{f}{g}$ ت) $\frac{g}{f}$ ث) $g-2$ ج) $\frac{3}{f}$ چ) $4f-g^2$ ح) $\sqrt{f} \cdot g$

$$\sqrt{f} \times g = \sqrt{\frac{2x+1}{x^2-4}} \times \sqrt{x-1}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4} \geq 0$$

$-2 \quad -\frac{1}{2} \quad 2$

$- \quad + \quad - \quad +$

ن.ت ن.ت

$x-1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1$

$-2 \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 2$

$D: (2, +\infty)$

مدرس: افخمی

مثال) اگر توابع f و g به صورت زیر باشند، توابع $2f-3g$ و $3f\cdot g$ و $\frac{f^2-1}{2g}$ و $\frac{g^2}{-2f}$ و $\frac{2f-1}{2g+10}$ را حساب کنید.

$f=\{(-1,-3),(0,5),(1,4),(2,-1)\}$ و $g=\{(-2,3),(-1,0),(0,-5),(1,7)\}$

$D_f \cap D_g=\{-1,0,1\}$

① $2f-3g=\{(-1,-6-0),(0,10+15),(1,8-21)\}=\{(-1,-6),(0,25),(1,-13)\}$

② $3f\cdot g=\{(-1,0),(0,-75),(1,84)\}$

③ $\frac{f^2-1}{2g}=\{\cancel{(-1,\frac{8}{0})},(0,\frac{24}{-10}),(1,\frac{15}{14})\}$

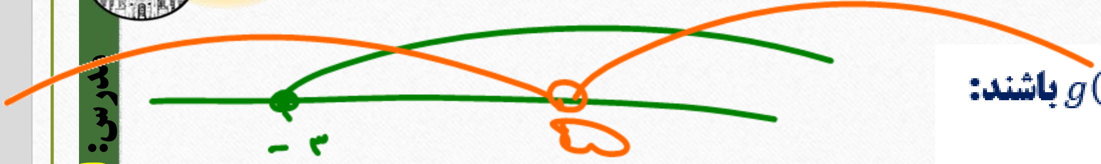
④ $\frac{2f-1}{2g+1}=\{(-1,\frac{-7}{1}),(0,\frac{9}{-9}),(1,\frac{7}{15})\}$

مدرس: افخمی

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$ و $g(x)=\frac{x+3}{x-5}$ باشند:

الف: دامنه $\frac{f}{g}$ را بیابید.

ب: مقدار $(2f+3g)(1)$ را محاسبه کنید.



$D_f: x\geq -3$ $\qquad$ $D_g: \mathbb{R}-\{5\}$

الف) $D_{f/g}=(-3,5)\cup(5,+\infty)$

ب) $(2f+3g)(1)=2\underbrace{f(1)}_{2}+3\underbrace{g(1)}_{-1}=1$

ترکیب توابع:

f, g

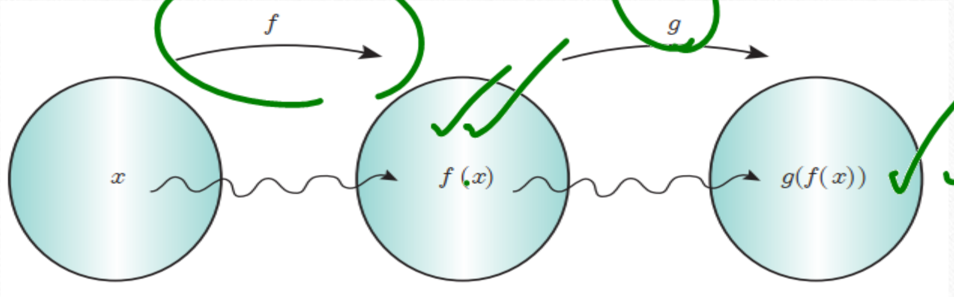
مقدمه: علاوه بر ساختن توابع به کمک اعمال جبری، به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان توابع جدیدی ساخت.

$R_f \subseteq D_g$

تعریف:

فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد f زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ g باشد، در این صورت gof تابعی است که دامنهٔ آن همان دامنهٔ f است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم:

$$\boxed{(gof)(x) = g\big(f(x)\big)}$$



توجه: برای محاسبه $g(f(x))$ باید در تابع $g(x)$ به جای متغیر x ،متغیر $f(x)$ را قرار دهیم.

توجه: برای پیدا کردن $f(g(x))$ باید در تابع $f(x)$ به جای متغیر x ،متغیر $g(x)$ را قرار دهیم.

توجه: برای محاسبه $fof(x)$ باید در تابع $f(x)$، به جای متغیر x، $f(x)$ را قرار دهیم.

$$\boxed{D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال) با توجه به توابع f و g به صورت زیر توابع fog و gof را در صورت وجود بیابید.

$$f=\{(11,7),(-2,4),(3,-5),(2,-5)\} \quad و \quad g=\{(2,11),(4,-2),(6,3),(3,2)\}$$

fog:

$2 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{f} 7$

$4 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} 4$

$6 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} -5$

$3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -5$

$fog:\{(2,7),(4,4),(6,-5),(3,-5)$

gof:

$11 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} \times$

$-2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} -2$

$3 \xrightarrow{f} -5 \xrightarrow{g} \times$

$2 \xrightarrow{f} -5 \xrightarrow{g} \times$

$gof:\{(-2,-2)\}$ ✓

$f \circ f(x) = f(f(x)) = \dfrac{2f(x)-1}{f(x)+1} = \dfrac{\dfrac{2(2x-1)}{x+1} - 1}{\dfrac{2x-1}{x+1}+1}$

مثال) اگر $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ دامنه و ضابطهٔ توابع fog، gof، fof و gogرا بیابید.

① $D_{fog}: \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 3 \mid \underbrace{\dfrac{x+2}{x-3} \neq -1}_{\text{این را دارم}}\}$

$x+2 \neq -x+3 \rightarrow 2x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{1}{2} \rightarrow D_{fog}: \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}, 3\}$

$(fog)(x) = f(g(x)) = \dfrac{2g(x)-1}{g(x)+1} = \dfrac{\dfrac{2(x+2)}{x-3} - 1}{\dfrac{x+2}{x-3}+1}$

② $D_{gof}: \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq -1 \mid \dfrac{2x-1}{x+1} \neq 3\}$

$\dfrac{2x-1}{x+1} \neq \dfrac{3}{1} \rightarrow 2x-1 \neq 3x+3 \rightarrow x \neq -4 \rightarrow D_{gof}: \mathbb{R} - \{-1, -4\}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = \dfrac{f(x)+2}{f(x)-3} = \dfrac{\dfrac{2x-1}{x+1}+2}{\dfrac{2x-1}{x+1}-3}$

مدرس: افخمی

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)^2+5}=\sqrt{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+5}=\sqrt{9-x^2} \quad -2\leq x\leq 2$$

مثال) اگر $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد، توابع fog و gof و دامنه آنها را به دست آورید.

$D_f: \underbrace{x^2+5\geq 0}_{\text{همواره برقرار}} \longrightarrow D_f: \mathbb{R}$

$D_g: 4-x^2\geq 0 \longrightarrow x^2\leq 4 \longrightarrow |x|\leq 2 \longrightarrow -2\leq x\leq 2$

$D_{fog}: \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \{\underbrace{-2\leq x\leq 2}_{\text{داریم}} \mid \underbrace{\sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}}_{\text{بدیهی}}\} = [-2,2]$

$D_{gof}: \{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} : \{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{\sqrt{x^2+5}\in[-2,2]}_{\text{غیر ممکن است}}\} = \varnothing$

$x^2\geq 0 \longrightarrow x^2+5\geq 5 \longrightarrow \sqrt{x^2+5}\geq\sqrt{5} > 2$

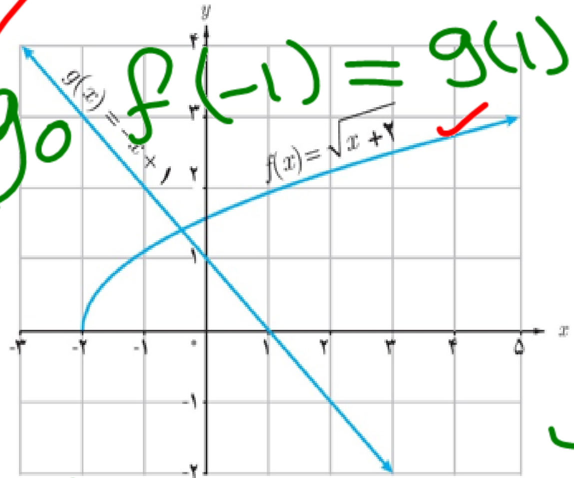
لذا gof را با تعریف نمی‌شود.

مثال) با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$ **ب)** $(f-g)(-۲)$

پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$ **ت)** $(\frac{f}{g})(۰)$

ث) $(fog)(-۴)$ **ج)** $(gof)(-۱)$



$gof(-1)=g(1)=0$

حل: الف) $(f+g)(2)=f(2)+g(2)=2+(-1)=1$

ب) $(f-g)(-2)=f(-2)-g(-2)=-3$

پ: $(fg)(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{2}$

ت: $(\frac{f}{g})(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\sqrt{2}$

ث) $(fog)(-4)=f(g(-4))=f(5)=\sqrt{7}$

$f^{-1}of(x)=x \quad ; x\in D_f$

همانی

ترکیب یک تابع و وارونش:

تابع وارون f را معمولاً با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم، در این صورت داریم:

$f^{-1}\big(f(x)\big)=x \ ; \ \forall x\in D_f$	یعنی: $x\to\boxed{f}\to\boxed{f^{-1}}\to x$
$f\big(f^{-1}(x)\big)=x \ ; \ \forall x\in D_{f^{-1}}$	یعنی: $x\to\boxed{f^{-1}}\to\boxed{f}\to x$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم که: ترکیب یک تابع و وارونش، تابع همانی است.

$fof^{-1}(x)=x \ ; \ x\in D_{f^{-1}}=R_f$

مثال) اگر $f(x)=\frac{۷}{x}+۳$ و $g(x)=\frac{۷}{x-۳}$ و $h(x)=\frac{x-۳}{۷}$ باشند، نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند ولی g و h وارون یکدیگر نمی‌باشند.

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{۷}{g(x)}+۳=\frac{\cancel{۷}^{۱}}{\frac{\cancel{۷}^{۱}}{x-۳}}+۳=x$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\frac{۷}{f(x)-۳}=\frac{۷}{\frac{۷}{x}+۳-۳}=x$$

$\Longrightarrow$ f و g وارون هم هستند

$$g\circ h(x)=g(h(x))=\frac{۷}{h(x)-۳}=\frac{۷}{\frac{x-۳}{۷}-۳}=\frac{۷}{\frac{x-۳-۲۱}{۷}}=\frac{۴۹}{x-۲۴}$$

$\longrightarrow g\circ h(x)\neq x \longrightarrow$ g و h وارون هم نیستند

مدرس: افخمی
پایه: یازدهم

$9-x^2\geq 0$

	-3		3	
$-$		$+$		$-$

مثال: اگر $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ و $f(x)=\sqrt{9-x^2}$:

$D_g: \underbrace{x^2+4\geq 0}_{\text{درست}} \longrightarrow D_g=\mathbb{R}$

الف: دامنه ی تابع fog را به دست آورید. (از راه تعریف)

ب: ضابطه ی تابع $gof(x)$ را بنویسید.

$D_{fog}: \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$: \{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{-3\leq\sqrt{x^2+4}}_{\text{بدیهی}}\leq 3\}$

$\sqrt{x^2+4}\leq 3 \longrightarrow x^2+4\leq 9$

$x^2\leq 5$

$|x|\leq\sqrt{5} \longrightarrow -\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}$

$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)^2+4}=\sqrt{(\sqrt{9-x^2})^2+4}$

مثال $f(1)=2 \longrightarrow f^{-1}(2)=1$

مثال: دو تابع $f = \{(7,4), (3,5), (5,2), (4,7)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(4a)) = 5$ مقدار عددی a را بیابید.

$f^{-1}(a)=b \longrightarrow f(b)=a$

$f^{-1}(g(4a))=5 \longrightarrow g(4a)=f(5)=2 \longrightarrow$

$\frac{4a}{4a+1} = \frac{2}{1} \longrightarrow 4a=8a+2$

$\longrightarrow -4a=2 \longrightarrow a=-\frac{1}{2}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ را بیابید.

$f^{-۱}(۴) = x \longrightarrow f(x) = ۴$

$-x + \sqrt{-۲x} = ۴ \longrightarrow \sqrt{-۲x} = x + ۴ \longrightarrow$

$-۲x = x^۲ + ۸x + ۱۶ \longrightarrow x^۲ + \underbrace{۱۰x}_{جمع} + \underbrace{۱۶}_{ضرب} = ۰$

$(x+۲)(x+۸) = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ \text{یا} \\ x = -۸ \end{cases}$

تمام