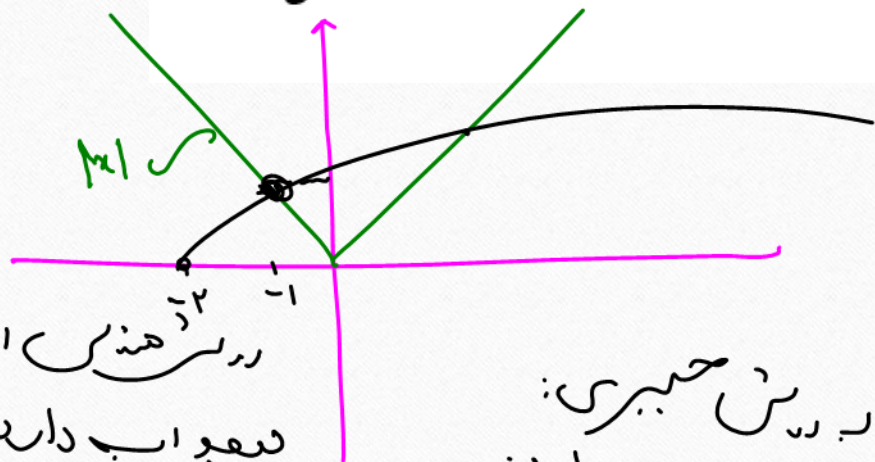




به روش هندسی و به روش جبری معادله  $|x| = \sqrt{2+x}$  را حل کنید.



$$|x| = \sqrt{2+x}$$

$$x^2 = 2+x$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

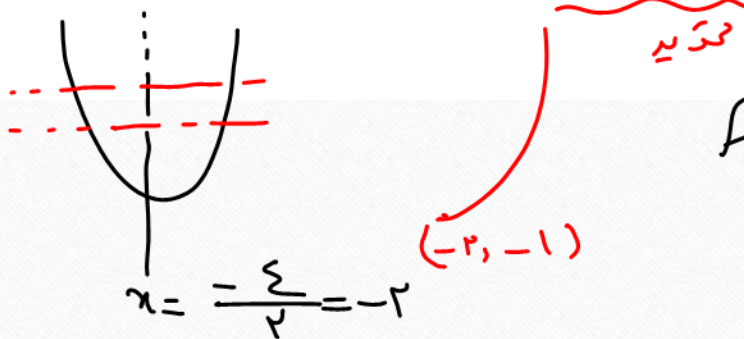
روش جبری:  
دو جواب دارد

دو جواب هندسی  
دو جواب دارد



اگر دامنه  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  برابر  $[-2, +\infty)$  باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را

بیابید.



$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$$

$$y = (x+2)^2 - 1 \rightarrow (x+2)^2 = y+1 \rightarrow x+2 = \pm \sqrt{y+1}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{y+1} \rightarrow x = -2 + \sqrt{y+1} \rightarrow f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x+1} \quad x \geq -1$$



اگر  $f(g(x)) = 4x^2 + 1$  و  $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ ، ضابطه تابع  $g(x)$  را بیابید.

در تابع  $f$  به جای  $x$ ،  $g(x)$  قرار

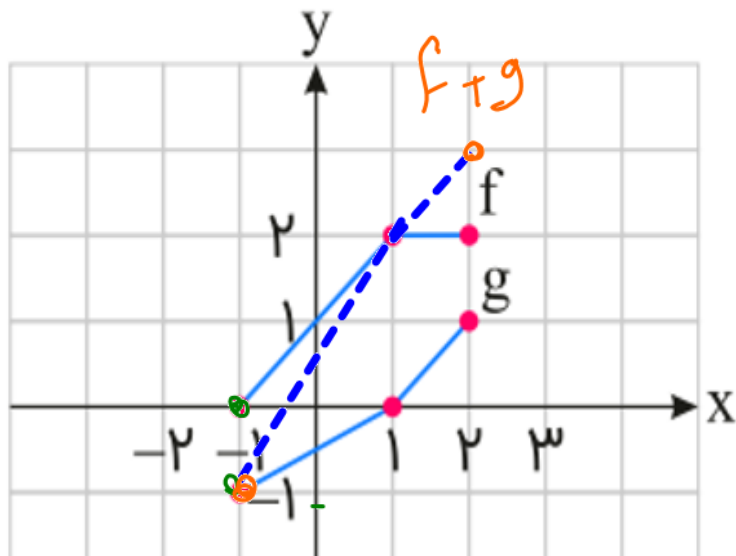
$$\frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1 \rightarrow$$

$$\frac{g(x)}{2} = 4x^2 + 2 \rightarrow g(x) = 8x^2 + 4$$



۴

با استفاده از نمودار توابع  $f$  و  $g$  که در شکل زیر رسم شده است، نمودار  $f + g$  را رسم کنید.



$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2$$

⋮

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 3$$

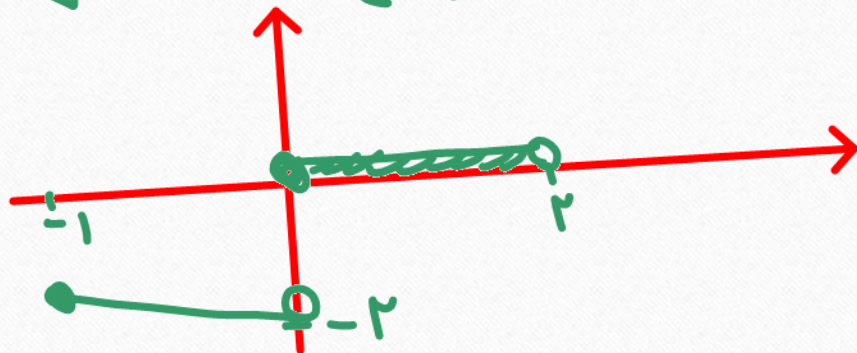


۳

اگر نمودار تابع  $f(x) = 2[x]$  را در بازه  $(-1, 1)$  رسم کنید.

$$-1 \leq x < 0 \longrightarrow [x] = -1 \longrightarrow f(x) = -2$$

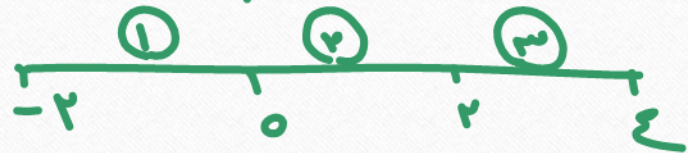
$$0 \leq x < 1 \longrightarrow [x] = 0 \longrightarrow f(x) = 2(0) = 0$$



۶

نمودار تابع  $y = x \left[ -\frac{x}{2} \right] + 1$  را در فاصله  $(-2, 4]$  رسم کنید.

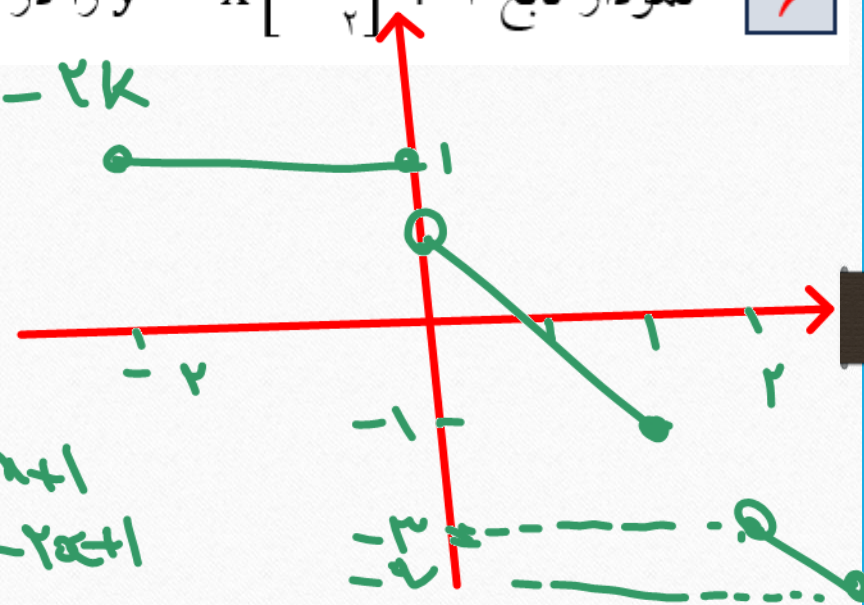
$$-\frac{x}{2} = k \rightarrow x = -2k$$



$$-2 < x < 0 \rightarrow y = 1$$

$$0 < x < 2 \rightarrow y = -x + 1$$

$$2 < x < 4 \rightarrow y = -2x + 1$$





$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

اگر  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  و  $g(x) = x^2 - 4$  باشد، ضابطه و دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  را تعیین کنید.



$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{1\} \cap \mathbb{R} - \{\pm 2\} = \mathbb{R} - \{1, \pm 2\}$$

$D_g: \mathbb{R}$        $D_f: \mathbb{R} - \{1\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{x^2-4}$$



۸

توابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = x^2 + 3$  در نظر بگیرید.

الف: دامنه تابع  $g \circ f$  را بیابید. ب: ضابطه  $f \circ g$  را بیابید.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \geq -1, \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\} = x \geq -1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1}$$

$$= \sqrt{x^2 + 3 + 1}$$





توابع  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  در نظر بگیرید.

۹

الف: دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف بیابید. (ریاضی)  
ب: ضابطه  $(f+g)(x)$  را بیابید.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \mid \sqrt{1-x} \geq 1, x \leq 1\}$$

$$\sqrt{1-x} \geq 1 \implies 1-x \geq 1 \implies -x \geq 0 \implies x \leq 0$$

ب)  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}$

$f+g = \{(1, 0)\}$  ✓



اگر  $f = \{(1, -1), (3, 2), (2, -2), (-3, 0)\}$  و  $g = \{(0, 3), (2, -2), (3, 1), (1, 0)\}$  باشد:  
**الف:** دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  را بیابید. **ب:** تابع  $\frac{f}{g}$  را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها بنویسید. **پ:**  $f \circ g(3)$  را بیابید. **ت:**  $g^{-1} \circ g(2)$  را بیابید.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{1, 2, 3\} - \{1\} = \{2, 3\}$$

د ب  $\frac{f}{g} = \{(2, 1), (3, 2)\}$

$g^{-1} \circ g(2) = 2$

د ب  $f \circ g(3) = -1$

حکایت ضرب جمع به اشتباه  
 $f \circ f^{-1}(x) = x, x \in D_f = \mathbb{R}_f$   
 $f \circ f(x) = x, x \in D_f$



اگر  $f(x) = \begin{cases} ax - 3, & x < 0 \\ 2ax^2 + b, & x \geq 0 \end{cases}$  و  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که نمودار تابع  $f$  از نقطه

$A(2, -3)$  بگذرد و داشته باشیم:  $f(-2) = 3$ .

$$8a + b = -3$$

$$-2a - 3 = 3 \quad \rightarrow \quad -2a = 6 \quad \rightarrow \quad a = -3$$

$$-2(-3) + b = -3 \quad \rightarrow \quad b = -6 - 3 = -9$$



توابع  $f(x) = x + 5$  و  $g(x) = \frac{4x}{x^2 - 7x}$  داده شده است.

$$D_g = \mathbb{R} - \{0, 7\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

الف: دامنه  $\frac{g}{f}$  را بیابید. ب: حاصل  $(f \cdot g)(1)$  را تعیین کنید.

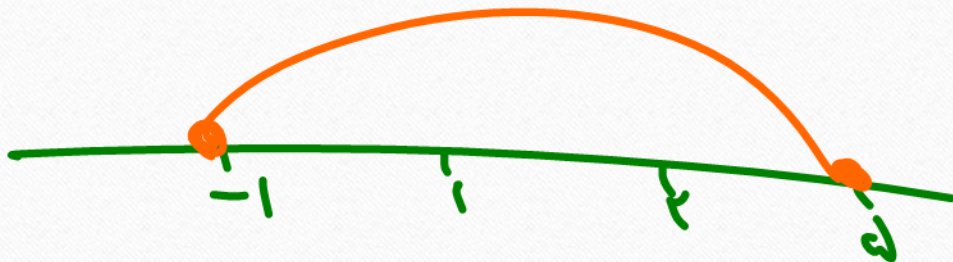
$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 7, -5\}$$

$$(b) (f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 6 \times \left(\frac{4}{-6}\right) = -4$$

دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$  را بدست آورید.

۱۴

$$-x^2 + 4x + 5 \geq 0 \rightarrow x = -1 \text{ یا } x = -\frac{5}{-1} = 5$$



$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

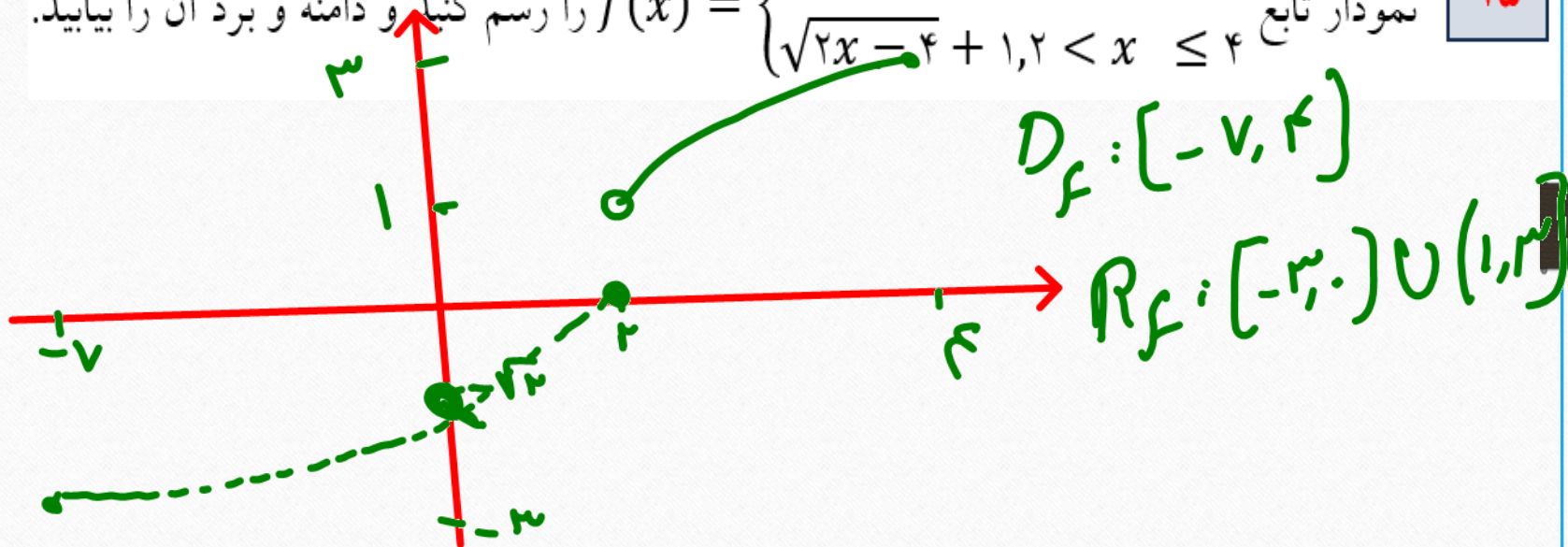


$$D_f: [-1, 1) \cup (2, 5]$$





نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x}, & -7 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{2x-4} + 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$  را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.



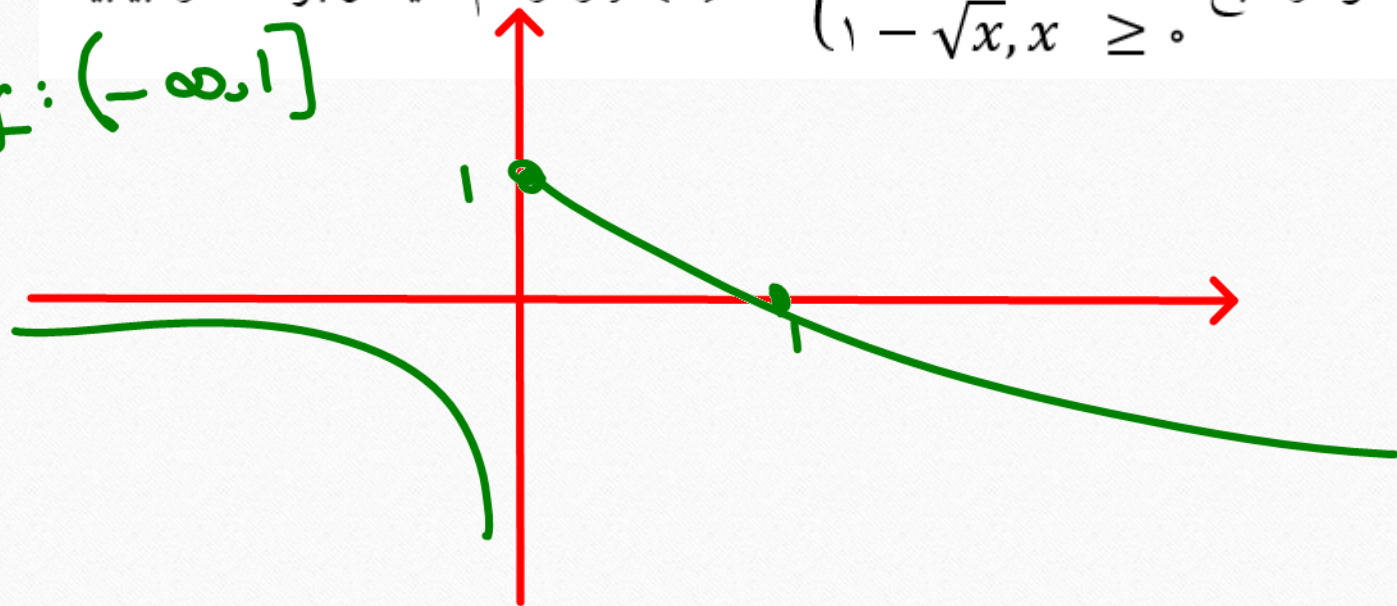




نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$  را رسم کنید و برد آن را بیابید.

۱۶

$R_f: (-\infty, 1]$





$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 3\}$$

ب:  $g(x) = \frac{x(x-1)}{x^2 - 10x^2 + 9}$

$$x^2 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

دامنه توابع زیر را بیابید.

۱۷

الف:  $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$

$$2x^2 - x - 1 \geq 0$$

$$\frac{-\frac{1}{4} \quad | \quad 1}{+ \quad | \quad - \quad | \quad +}$$

$$D_f: (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$$



آیا دو تابع  $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$  و  $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$  با هم مساوی اند؟ چرا؟

$$D_f = D_g \quad ①$$

شرط تساوی دو تابع:

$$\forall x \in D: f(x) = g(x) \quad ②$$

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \quad ③ \\ D_g &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow ④ \quad f(x) &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1} \times \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} \\ &= \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} - 1)}{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{1+x^2} - 1 = g(x) \end{aligned}$$

در تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  با هم مساوی هستند



آیا دو تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  و  $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$  با هم مساوی اند؟ چرا؟

تفاوت دامنه  
تفاوت دامنه  
تفاوت دامنه  
(ک +، ر) ]

$$x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0$$

+	0	1	+
+	0	-	+
+	0	-	+

دامنه  $D_f: (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

$D_f \neq D_g$   
دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  با هم برابر نیستند



۲۰

اگر دو تابع  $f(x) = ax + b$  و  $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-1}{2x+1}, & x \neq c \\ d, & x = c \end{cases}$  با هم مساوی باشند، مقادیر  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  را بیابید.

$D_f = \mathbb{R}$

$c = -\frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1} = ax+b \rightarrow a=2, b=-1$

$f(x) = 2x-1$

$f(-\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}) = d \rightarrow d = -2$



$f(x)$  و  $g(x)$  وارون یکدیگرند یعنی  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

آیا دو تابع  $f(x) = \frac{1}{x} + 3$  و  $g(x) = \frac{1}{x-3}$  وارون یکدیگرند؟

۲۱

$$f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} + 3 = \frac{1}{\frac{1}{x-3}} + 3 = x - 3 + 3 = x$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{f(x) - 3} = \frac{1}{\frac{1}{x} + 3 - 3} = x$$

پس یعنی  $f(x)$  و  $g(x)$  وارون یکدیگر هستند





اگر  $f$  یک تابع خطی با شیب بیشتر از ۱ باشد و داشته باشیم:  $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x + 8$

حاصل  $f(2)$  را بیابید.

$$f(x) = ax + b, \quad a > 1$$

$$y = ax + b \rightarrow y - b = ax \rightarrow x = \frac{y - b}{a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

$$ax + b + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = \frac{5}{2}x + 8$$

$$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$b - \frac{b}{a} = 8 \rightarrow \frac{b}{2} = 8 \rightarrow b = 16$$

$$f(x) = 2x + 16$$

$$f(2) = 20$$





اگر  $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4)\}$

۲۳

تابع  $g \circ f$  را در صورت وجود بیابید.

$$g \circ f(0) = 4$$

$$g \circ f(5) = 0$$

$$g \circ f(3) = \times$$

$$g \circ f(-2) = \times$$

$$g \circ f = \{(0, 4), (5, 0)\}$$



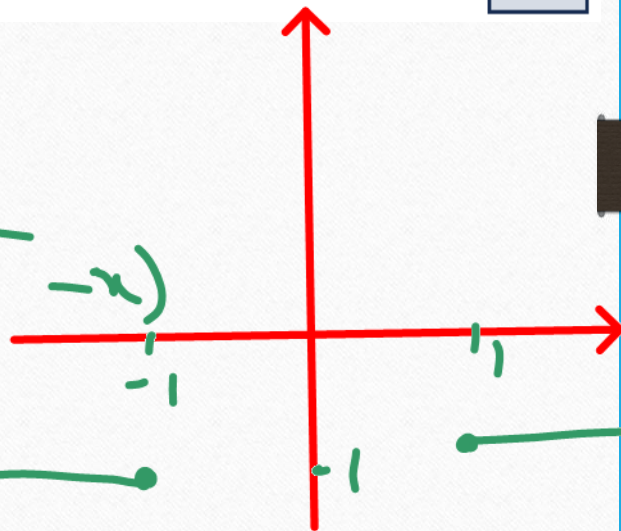
با فرض  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$ ، نمودار تابع  $f \cdot g$  را رسم کنید.

$$D_f: x^2 - 1 \geq 0$$

ج      ج

$$f(x) \times g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} + x)(\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$= (x^2 - 1 - x^2) = -1$$





۲۵

دامنه توابع زیر را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R} - \{ \pm 2, \pm 3 \}$$

الف:  $f(x) = \frac{x+3}{x^4 - 13x^2 + 36}$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$



ب:  $g(x) = \frac{1}{|x| + |x-2| - 5}$  (برای  $x > 2$ )

$$|x| + |x-2| - 5 = 0$$

$$|x| + |x-2| = 5$$

$$-2x + 2 = 5 \rightarrow -2x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$-2x - 2 = 5 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

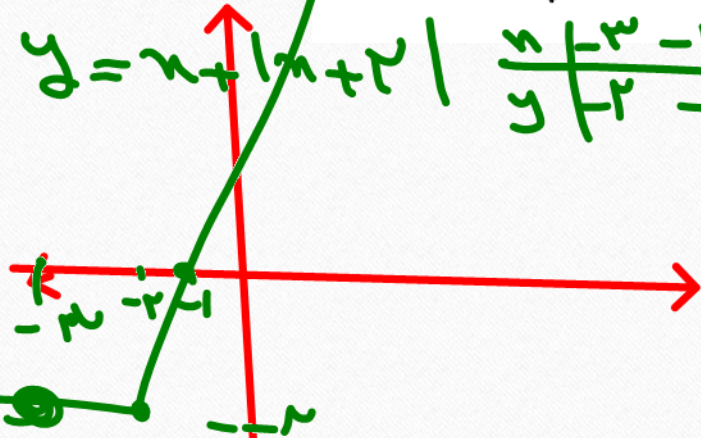
$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2} \right\}$$



ت:  $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$

$y = x + |x + 2|$ 

x	-3	-2	-1
y	2	-2	0



$D_f: [-1, +\infty)$

پ:  $f(x) = \sqrt{[x] - 2} + \frac{x}{[x] - 2}$

$[n] - 2 \geq 0 \rightarrow [n] \geq 2$   
 $n \geq 2$

$[n] \neq 2 \rightarrow n < 2 \text{ یا } n \geq 3$



$D: [2, +\infty)$



دو تابع  $f(x) = \frac{v}{x-3}$  و  $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$  با هم برابرند. مقادیر  $a, b, c, d$  را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$c = -6$$

$$x^2 + \underline{c}x + \underline{d} = (x-3)^2 = x^2 - \underline{6}x + \underline{9} \rightarrow d = 9$$

$$f(x) = g(x) \rightarrow \frac{v}{x-3} = \frac{ax+b}{(x-3)^2}$$

$$v = a$$

$$v(x-3) = ax+b \rightarrow vx - 3v = ax+b$$

$$b = -21$$



آیا دو تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  و  $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$  با هم مساوی اند؟ چرا؟

دامنه:  $(-1, 1)$

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0$$

و  $D_f = D_g$

پس  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = g(x)$

پس  $f(x) = g(x)$

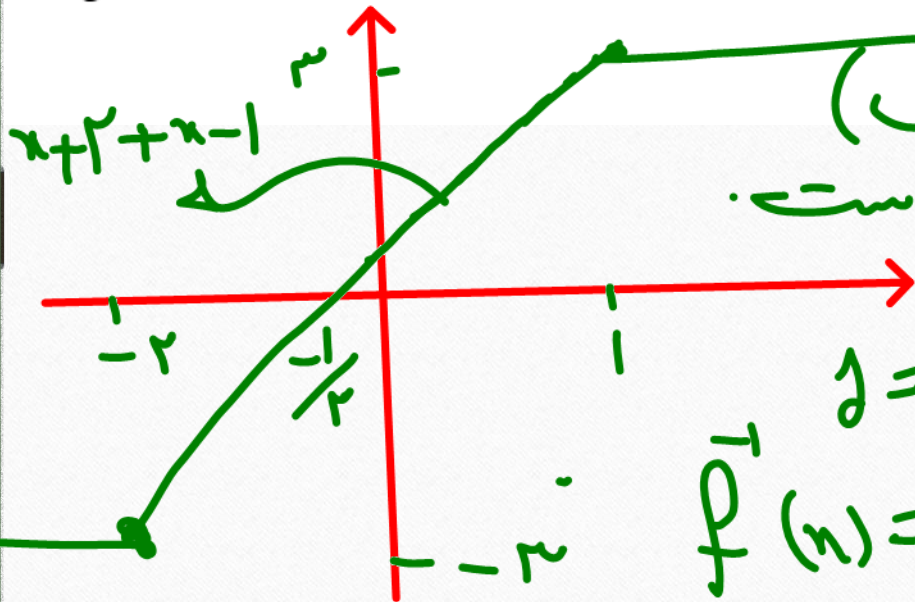




تابع  $f(x) = |x + 2| - |x - 1|$  در بازه ای یک به یک است. ضابطه وارون آن را در این بازه

به همراه دامنه و برد آن بیابید. (ریاضی هنر)

تابع در بازه  $[-2, 1]$  یک به یک است.



$$f_1(x) = \frac{x-1}{2} \quad \begin{matrix} 1 \leq x < 2 \\ 3 \leq x < 3 \end{matrix}$$





با محدود کردن دامنه تابع  $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1$  یک تابعی یک به یک بسازید و

۲۹

وارون آن را بیابید.  $f(x) = 2\sqrt{(x-2)^2} - 1 = 2|x-2| - 1$

①  $x \geq 2 \rightarrow f(x) = 2(x-2) - 1 = 2x - 4 - 1 = 2x - 5$

$y = 2x - 5 \rightarrow \frac{y+5}{2} = x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

$R_f = D_{f^{-1}} : [-1, +\infty)$

ضابطه وارون تابع  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$  را بیابید.

۳۰

توان ۲

$$y = x + \sqrt{x^2 + 3} \quad \text{---} \quad y - x = \sqrt{x^2 + 3}$$

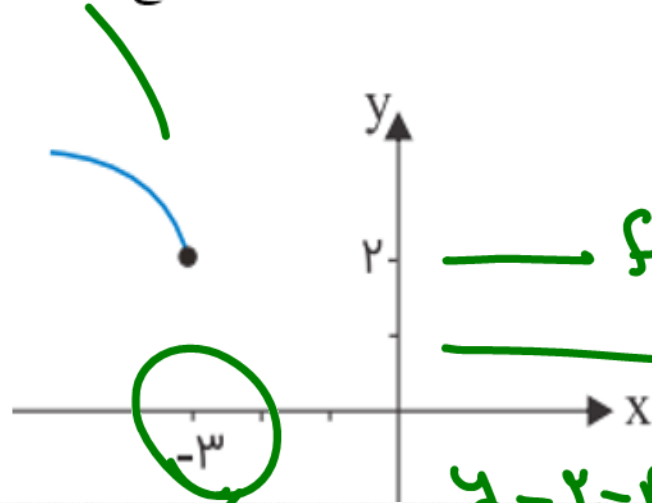
$$(y - x)^2 = x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad \cancel{x^2} + y^2 - 2xy = \cancel{x^2} + 3 \quad \rightarrow$$

$$y^2 - 3 = 2xy \quad \rightarrow \quad x = \frac{y^2 - 3}{2y} \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{2x}$$



۳۱

اگر نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{-x+a} - b$  به صورت شکل زیر باشد، ضابطه تابع وارون را



$$-(-3) + a = 0$$

بیابید.

$$a = -3$$

$$f(-3) = 2 \rightarrow \sqrt{3-3} - b = 2$$

$$b = -2$$

$$f(x) = \sqrt{-x-3} + 2$$

$$y - 2 = \sqrt{-x-3} \rightarrow (y-2)^2 = -x-3$$

$$(y-2)^2 + 3 = -x \rightarrow x = -(y-2)^2 - 3$$

$$f^{-1}(y) = -(y-2)^2 - 3 \quad y \geq 2$$

ساده عبارت  
زیر را در فعال



اگر  $f(x) = \sqrt{x+4}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$  باشد، آنگاه:

$$(f \circ g)^{-1}(2) = a \longrightarrow f \circ g(a) = 2$$

الف: حاصل  $(f \circ g)^{-1}(2)$  را بیابید.

$$\longrightarrow f(g(a)) = 2 \longrightarrow g(a) = 0 \longrightarrow \frac{a-1}{a-2} = 0 \longrightarrow a = 1$$

ب: با استفاده از تعریف، دامنه  $f \circ g$  را بیابید.

$$D_f: x \geq -4, \quad D_g: x \neq 2$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g, g \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 2, \frac{x-1}{x-2} \geq -4 \right\}$$

$$\longrightarrow \frac{x-1}{x-2} + 4 \geq 0 \longrightarrow \frac{x-1+4x-8}{x-2} \geq 0 \longrightarrow \frac{5x-9}{x-2} \geq 0$$

$$(-\infty, \frac{9}{5}] \cup (2, +\infty) = D_{f \circ g}$$



$$\frac{x_1}{e} \cdot \frac{x_2}{e} = \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{e}$$

اگر  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  فقط در بازه  $(-\infty, 3]$  تعریف شده باشد و  $f^{-1}(2) = 2$

۳۴

باشد، مقدار  $f^{-1}(4)$  را بیابید.

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$a = 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{bx + c}$$

$$3b + c = 0 \rightarrow f(2) = 2 \rightarrow \sqrt{2b + c} = 2 \rightarrow 2b + c = 4$$

$$\begin{cases} 3b + c = 0 \\ 2b + c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 12 \end{cases} \rightarrow f(x) = \sqrt{-4x + 12}$$

$$f^{-1}(4) = a \rightarrow f(a) = 4 \rightarrow \sqrt{-4a + 12} = 4$$

$$-4a + 12 = 16 \rightarrow a = f^{-1}(4) = -1$$



اگر  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  باشد، حاصل  $f(4)$  را بیابید.

۳۵

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \xrightarrow{\text{توان ۲}} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 - 2 \quad \rightarrow \quad f(4) = 14$$





به روش جبری تابع بودن یا نبودن رابطه های زیر را بررسی کنید.

الف:  $x^2 + y^2 = 2$

$x = 0 \rightarrow y^2 = 2$

$y = \pm \sqrt{2}$

به ازای  $x=0$  دو عنصر در میسر

دریافت شد پس یعنی تابع نیست  
ما تابع نیست

ب:  $y^2 - 4y = x^2 - 4$

$x = 2 \rightarrow y^2 - 4y = 0$

$y(y - 4) = 0 \rightarrow y = 0 \text{ یا } y = 4$

دو نتیجه  $y=0$  و  $y=4$  را به دست می آید

لذا در این جا تابع نیست





$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

پ:  $y^3 - 6y^2 + 12y - 9 - x^2 + 3x = 0$

$$y^3 - 3(y^2)(2) + 3y(2^2) - 1 - 1 - x^2 + 3x = 0$$

این را به بیان ترکیب تابع می‌باشند

$$(y-2)^3$$

$$(y-2)^3 - 1 - x^2 + 3x = 0$$

$$(y-2)^3 = x^2 - 3x + 1$$

$$y-2 = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 1} + 2$$



توابع  $f = \{(1, 2), (-1, 0), (-2, -4), (2, 2)\}$  و  $g = \{(1, -2), (-2, 2), (0, -1), (2, 0)\}$

$$D_f \cap D_g = \{1, -2, 2\}$$

$$\frac{-2f}{g^2}(1) = \frac{-2f(1)}{(g(1))^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\frac{-2f}{g^2}(-2) = \frac{-2f(-2)}{(g(-2))^2} = \frac{-8}{4} = -2$$

را در نظر بگیرید. تابع  $\frac{-2f}{g^2}$  را بیابید.

~~$$\frac{-2f}{g^2}(2) = \frac{-2f(2)}{(g(2))^2} = \frac{-4}{4} = -1$$~~

$$\frac{-2f}{g^2} = \{(1, -1), (-2, -2)\}$$



اگر تابع  $h = \{(a, 20), (2, 19), (3, 25), (2, a^2 + 10)\}$  یک به یک باشند، مقدار  $a$  کدام است؟

$$a^2 + 10 = 19 \longrightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 \longrightarrow h = \{(3, 20), (2, 19), (3, 25), (2, 19)\}$$

$$a = -3 \longrightarrow h = \{(-3, 20), (2, 19), (3, 25), (2, 19)\}$$

معادله  $[x] + [x + 2] + [x + 3] = 5$  را حل کنید.

۳۹

$$[x] + [x] + 2 + [x] + 3 = 5$$

$$3[x] = 0 \longrightarrow [x] = 0$$

$$0 < x < 1$$



اگر  $f = \{(1, 2), (3, 1), (4, 3), (2, 0)\}$  و  $g = \{(-1, 2), (1, 3), (3, 4), (4, 0)\}$  باشند،  $2f + g$  را بیابید.

را بیابید.

$$D_f \cap D_g = \{1, 3, 4\}$$

$$(2f + g)(1) = 2f(1) + g(1) = 4 + 3 = 7$$

$$(2f + g)(3) = 2f(3) + g(3) = 2 + 4 = 6$$

$$(2f + g)(4) = 2f(4) + g(4) = 6 + 0 = 6$$

$$2f + g = \{(1, 7), (3, 6), (4, 6)\} \checkmark \checkmark$$

آیا دو تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2}$  و  $g(x) = \frac{x^2}{x^3}$  با هم مساویند؟ (با ذکر دلیل)

۴۱

$$\text{① } D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{② } f(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\text{③ } g(x) = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = g(x)$$

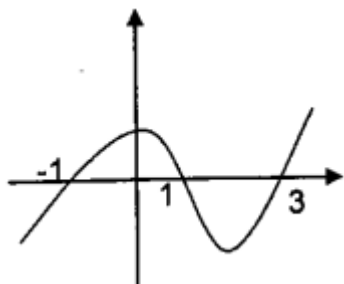
} →  $f = g$



$$D: (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3]$$

۴۲

نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است. دامنه تابع  $y = \sqrt{(4-x^2)}f(x)$  را بیابید.



	$-\infty$	$-2$	$-1$	$1$	$2$	$3$	
$4-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	-	-	+	-	-	+	+
$y = (4-x^2)f(x)$	+	-	+	-	+	+	+



مقدار  $k$  را چنان بیابید که دو تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ 2k+6, & x = 4 \end{cases}$  و  $g(x) = x+4$  با هم برابر

۴۳

باشند.

$$D_g = \mathbb{R} \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(4) = g(4) \longrightarrow 2k+6=10 \longrightarrow k=2$$

$$k=1$$

نمودار تابع  $y = x[x] - 1$  را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

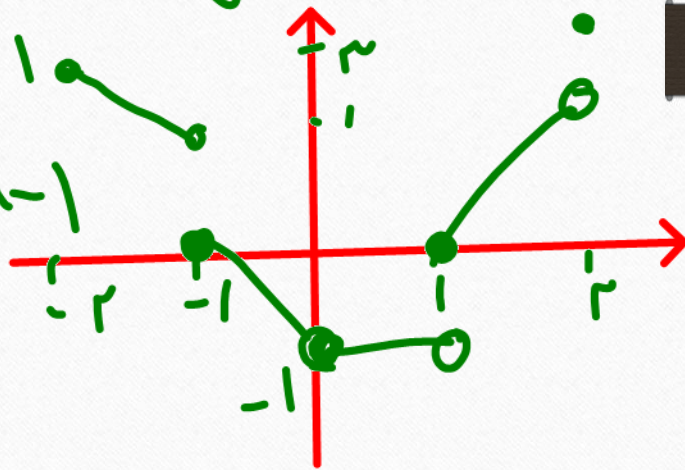
①  $-2 < x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = -2x - 1$

②  $-1 < x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -x - 1$

③  $0 < x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = -1$

④  $1 < x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = x - 1$

⑤  $x = 2 \rightarrow y = 2[2] - 1 = 3$





اگر  $f = \{(-2, 4), (a, 2), (0, b), (5, 1)\}$  و  $f \circ f(-2) = 2$  و  $f^{-1}(-3) = 0$ ، مقادیر  $a$  و

۴۵

$b$  را بیابید.

۴

$a = 4$

$$f(0) = -3$$

$$b = -3$$



اگر  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x-2}$  مقدار  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  را بیابید.

۴۶

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x-2 = x+1 \rightarrow x=3$$

پس برابر می‌آوردن  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  در عبارت سمت راست

به جای  $x$ ،  $3$  قرار دهیم  $\rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{1} = 4$   $\rightarrow a=4$

۴۷

اگر  $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$  و  $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$  باشند، تابع  $g \circ f^{-1}$  را بیابید.

را بیابید.

$$f^{-1} = \{(2,1), (5,2), (4,3), (6,4)\}$$

$$g \circ f^{-1} = \{(5,3), (4,1), (6,2)\}$$

$$g \circ f^{-1} = \{5, 4\}$$

$$g \circ f^{-1} = \{(5,4), (4,2)\}$$

$$f^{-1}(2) = 1$$

$$f^{-1}(5) = 2$$

$$f^{-1}(4) = 3$$

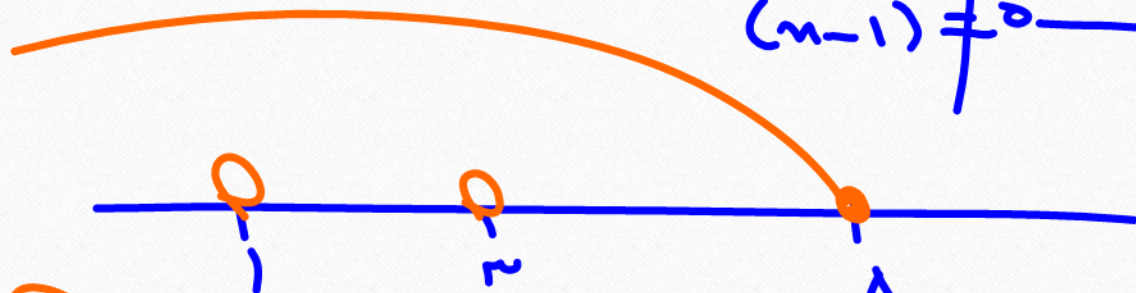
$$f^{-1}(6) = 4$$



اگر دامنه تابع  $y = \frac{\sqrt{8-x}}{x^2-2x+1} + \frac{[x]-2}{|x-3|}$  را بیابید.

$$x \leq 8$$

$$(x-1)^2 \neq 0 \rightarrow x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$



$$D = (-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (3, 8]$$



۴۹ نمودار تابع  $y = x + [x]$  را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

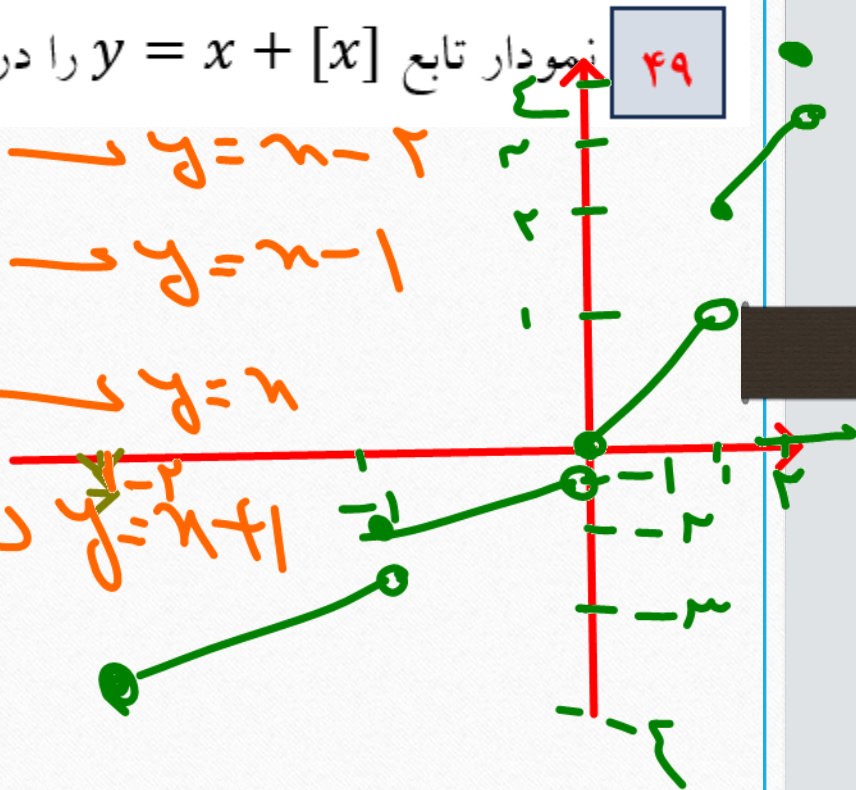
۱  $-2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = x - 2$

۲  $-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = x - 1$

۳  $0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = x$

۴  $1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = x + 1$

۵  $x = 2 \rightarrow y = 2$





$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{|x| + 2}}$$

اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{|x| + 2}$  و  $g(x) = \sqrt{x - 4}$  باشند، مطلوب است محاسبه دامنه تابع  $f \circ g$  و

۵۰

ضابطه آن را

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f \right\}$$

$$D_f: \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ |x| + 2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow D_f = (-2, 2)$$

$$-2 < x < 2 \rightarrow -2 < \sqrt{x-4} < 2 \rightarrow 4 < x-4 < 4 \rightarrow 8 < x < 8$$

$$\rightarrow D_{f \circ g} = (8, 8)$$



نشان دهید تابع  $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}$  وارون پذیر است و سپس وارون آن را بیابید.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{1-2x_1}{1+x_1} = \frac{1-2x_2}{1+x_2}$$

$$(1-2x_1)(1+x_2) = (1+x_1)(1-2x_2) \rightarrow$$

$$\cancel{1+x_2} - 2x_1 - 2x_1x_2 = \cancel{1-2x_2} + x_1 - 2x_1x_2 \rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\frac{y}{1} = \frac{1-2x}{1+x} \rightarrow y + xy = 1 - 2x \rightarrow 2x + xy = 1 - y$$

$$x(y+2) = 1-y \rightarrow x = \frac{1-y}{y+2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y}{y+2}$$



۵۲ اگر  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$  و  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$  باشد:

الف: دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  را بیابید.

ب: حاصل  $(2f - 3g)(2)$  را بیابید.

حل سوالات شبه نهایی حسابان یک و ریاضی ۲ ( فصل تابع ) دبیرستان ماندگار البرز



مدرس: افخمی





۶۷- دایره ای بر دو خط به معادلات  $2y = 4x + 3$  و  $2x - y = 5$  مماس است. مساحت دایره را بیابید.



۶۸- اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟



۶۹- فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه ای واقع شده اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را بر می گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت است. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



۷۰- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آب راه بتونی در اطرافش است. اگر این آب راه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را بیابید.





۷۱- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $x^2 - 7x + 3 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}}{\alpha^2 - 7\alpha}$  را بیابید.



۷۲- قرینه نقطه  $A(1, -2)$  نسبت به خط  $4y = 3x + 1$  را بیابید.





۷۳- اگر رابطه  $\alpha + \beta = 14$  بین ریشه های معادله  $x^2 - 8x + m - 1 = 0$  برقرار باشد، مقدار  $m$  را بیابید.



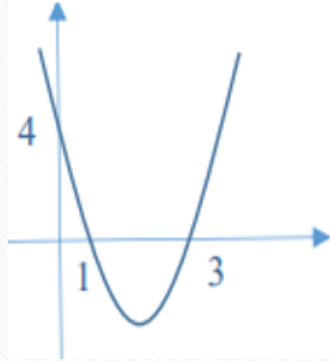
۷۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $4x^2 - 5x - 1 = 0$  باشند، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن به صورت  $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$  باشد.



۷۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{\alpha^2(3\beta - 1)}$  را بیابید.



۷۶- با توجه به نمودار ضابطه سهمی را بنویسید.





۷۷- مثلث  $ABC$  به راس های  $A(2,1)$ ،  $B(-1,4)$  و  $C(-4,-1)$  را در نظر بگیرید. فاصله نقطه  $M$  وسط  $AC$  از ارتفاع  $AH$  را بیابید.



۷۸- به کمک تعیین علامت، ضابطه ی تابع  $y = x|x^2 - 1|$  را بدون نماد قدر مطلق بنویسید.





۷۹- معادله زیر را حل کنید.

$$۵ = (۲x + \sqrt{x})^۲ + ۴(۲x + \sqrt{x})^۴ \quad \text{الف:}$$



$$\text{ب: } \frac{x-1}{2x+1} + 2 \left( \frac{2x+1}{x-1} \right) + 3 = 0$$



۸۰- نمودار توابع  $f(x) = -(x+1)^2 + 3$  و  $g(x) = \frac{1}{4}|x+2| - 1$  در چند نقطه متقاطع اند؟



۸۱- ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |4x - x^2|$  را رسم کنید. سپس به روش هندسی معادله  $f(x) = 5$  را حل کنید.



۸۲- نامعادله ی  $\frac{x}{|x-1|} < 2$  را حل کنید.



۸۳- معادلات زیر را حل کنید.

الف:  $\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x^2+2x+5}$



حل سوالات شبه نهایی حسابان یک و ریاضی ۲ ( فصل تابع ) دبیرستان ماندگار البرز



$$\text{ب: } \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$$



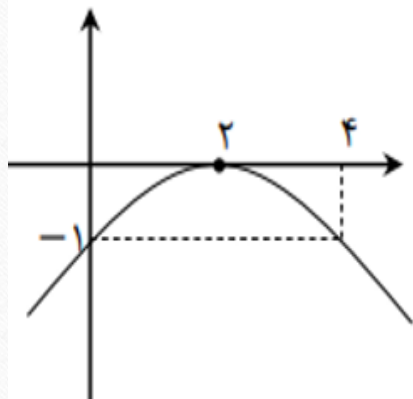
۸۴- نامعادله زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$|x^2 - 2| < |x + 1| - 1$$



۸۵- معادله درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه های آن دو برابر دیگری باشد.

۸۶- در شکل زیر نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. ضابطه آن را مشخص کنید.





۸۷- بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آن ها از ۲ نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور طول ها برابر ۶ باشد.



۸۸- مجموع جواب های معادله  $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$  را بیابید.





۸۹- بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد.



۹۰- مساحت سطح محصور بین نمودار تابع  $y = ||x| - 2|$  و خط  $y = 1$  را بیابید.