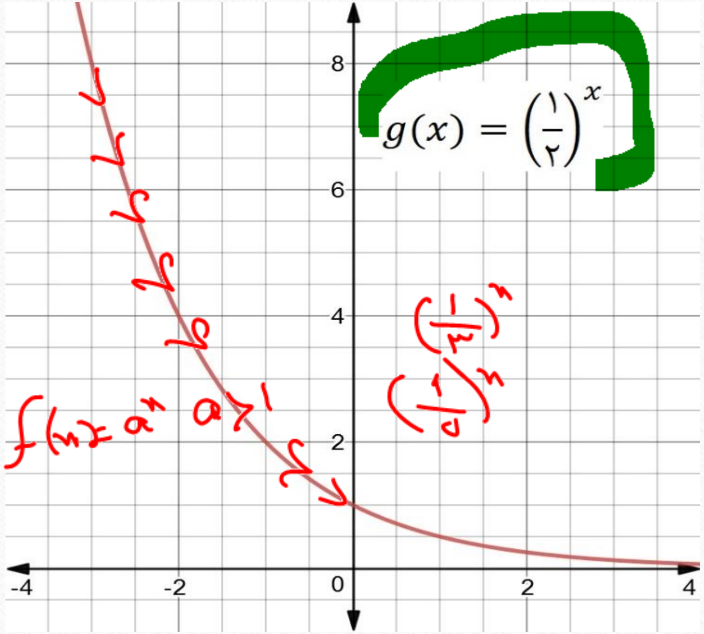
تعریف: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x یک متغیر حقیقی باشد، در اینصورت تابع $f(x)=a^x$ را یک تابع نمایی می‌گوییم. مانند: $g(x)=$ ، $h(x)=\pi^x$ و $p(x)=\left(\sqrt{۳}\right)^x$

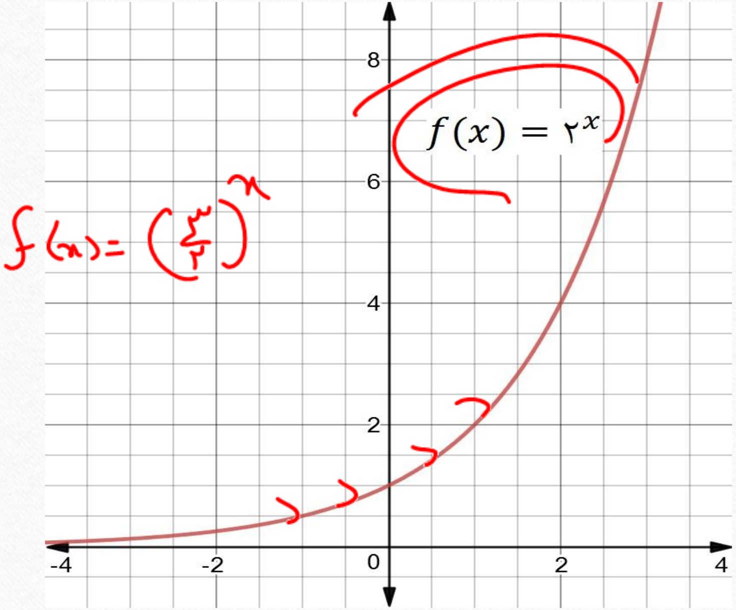
$f(x)=۵^x$ ، $\left(\frac{۲}{۳}\right)^x$.

$f(۰)$ $\left((-۲)\right)^{x}$

برای رسم نمودار این توابع، چون متغیر x هر مقدار حقیقی را می‌تواند اختیار کند پس به x هر مقدار دلخواه می‌توان داد.

مثلاً برای رسم نمودار دو تابع نمایی $f(x)=۲^x$ و $g(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ داریم:


$g(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$
$f(x) = a^x \quad a > 1$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$\left(\frac{1}{5}\right)^x$
-4
-2
0
2
4
2
4
6
8


$f(x) = ۲^x$
$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
-4
-2
0
2
4
2
4
6
8

نتایج مهم: باتوجه به نمودارهای اخیر در می‌یابیم که در تابع نمایی $f(x) = a^x$ داریم:

الف) دامنهٔ تعریف این توابع $D_f = R$ و برد آن‌ها $R_f = (۰, +\infty)$ می‌باشد.

ب) اگر $a > ۱$ باشد با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می‌یابد (اکیداً صعودی). مانند تابع

$$f(x) = \left(\frac{۵}{۲}\right)^x$$

y=۰   مجانب افقی

پ) اگر $۰ < a < ۱$ باشد با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می‌یابد (اکیداً نزولی). مانند تابع

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^x$$

ت) نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند زیرا معادلهٔ $a^x = ۰$ فاقد جواب می‌باشد.

مثال۲) نمودار توابع $f(x)=۲^x$, $g(x)=۳^x$ و $h(x)=۵^x$ در شکل (۱) ونمودارتوابع $u(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ ، $v(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{۱}{۵}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند.

الف) ضابطهٔ هر تابع را روی نمودار آن بنویسید. ب) دامنه و برد آنها را به دست آورید.

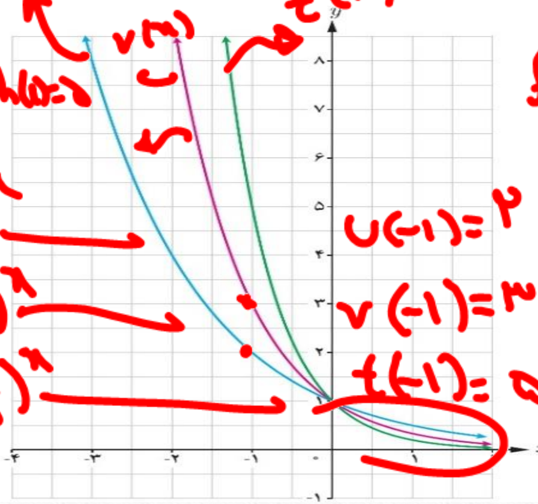
پ) آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟

$f(x)=2^x$

$f(1)=2$

$g(x)=3^x \sim g(1)=3$

$h(x)=5^x \sim h(1)=5$



$u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

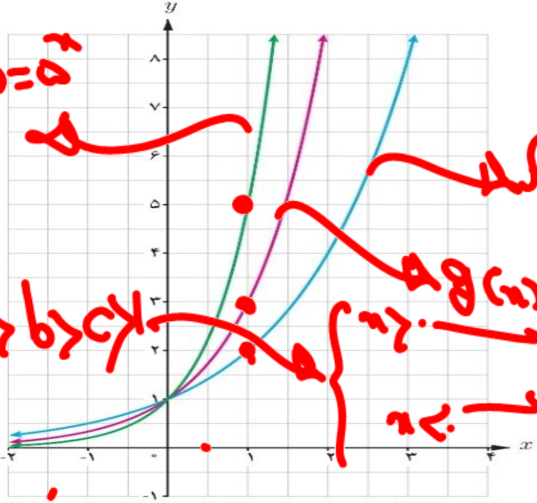
$t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

$u(-1)=2$

$v(-1)=3$

$t(-1)=5$

شکل (۲)



$f(x)=5^x$

$f(x)=2^x$

$g(x)=3^x$

$a>b>c>1$

$x>0: a^x>b^x>c^x$

$x<0: a^x<b^x<c^x$

شکل (۱)

مثال ۳) حدود m را چنان بیابید که تابع $f(x) = (2m - m^2)^x$ نمایی باشد.

$2m - m^2 > 0 \longrightarrow$

	0		2	
$-$		$+$		$-$
		ج		

و

$2m - m^2 \neq 1 \longrightarrow m^2 - 2m + 1 \neq 0 \longrightarrow (m-1)^2 \neq 0 \longrightarrow m \neq 1$

حدود m: $(0,2) - \{1\}$

مثال۴) حدود m را چنان بیابید که تابع $f(x)=\left(\frac{2m-1}{m+2}\right)^x$ الف) اکیداً صعودی باشد. ب) اکیداً نزولی باشد.

نمایی

الف) $\frac{2m-1}{m+2}>1 \sim \frac{2m-1}{m+2}-\frac{m+2}{m+2}>0 \sim \frac{m-3}{m+2}>0$

ج $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

ب) $0<\frac{2m-1}{m+2}<1 \sim$ ② : $\frac{2m-1}{m+2}-\frac{m+2}{m+2}<0 \sim \frac{m-3}{m+2}<0$

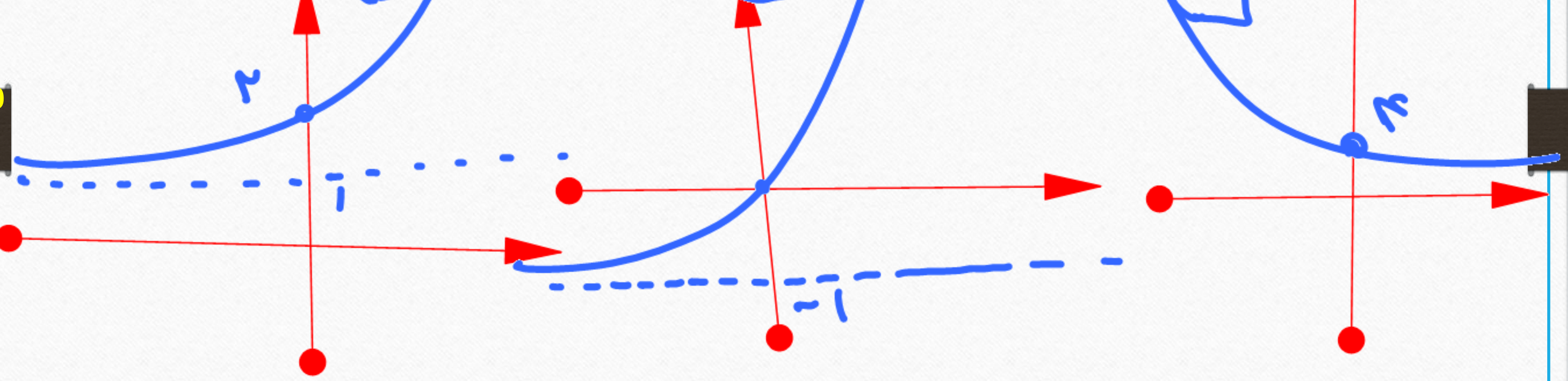
ج : $\left(\frac{1}{2},3\right)$ ①∩②

$y = a^x + b$ $a>0 , a\neq 1$

مثال۵) نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

جانب

الف) $y = 2^x + 1$ ب) $y = 2^x - 1$ پ) $y = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$

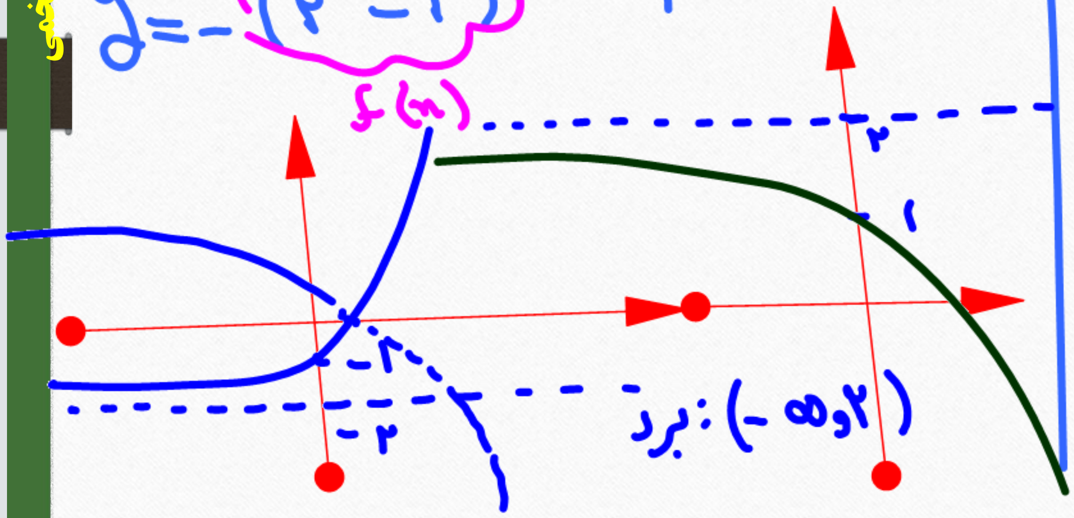


ت) $y = -۲^x + ۲$

برای رسم نمودار $-f(x)$، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

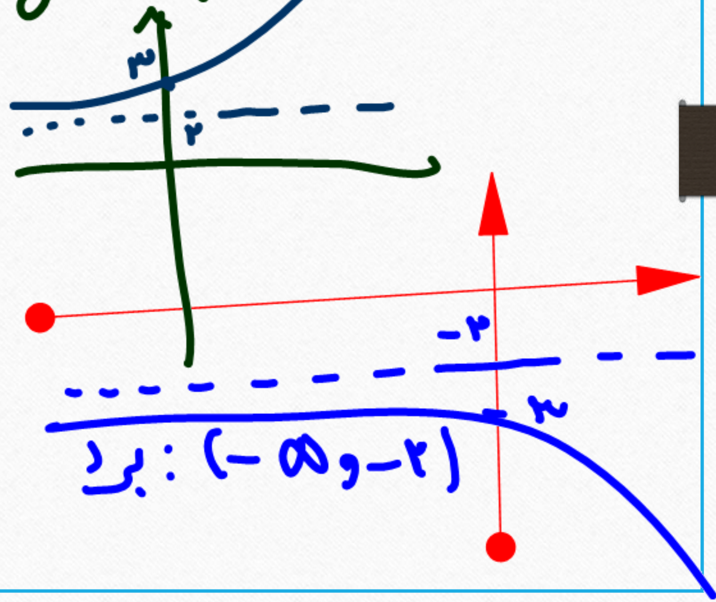
$y = -(۲^x - ۲)$

$f(x)$



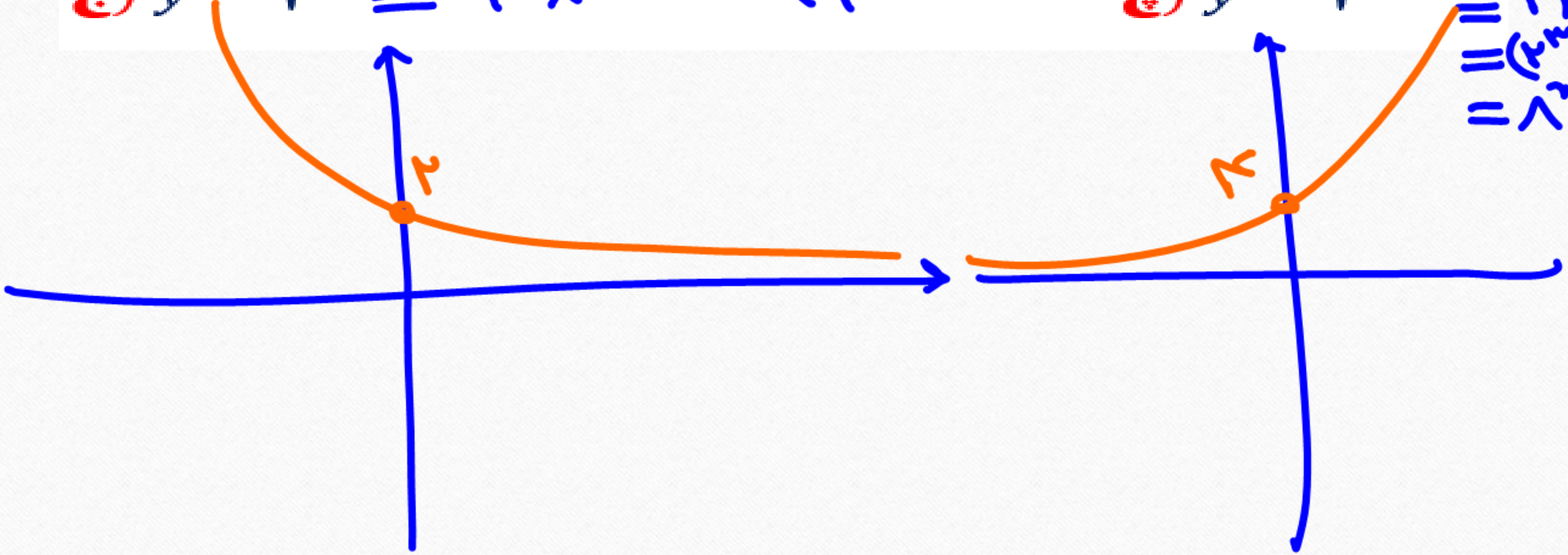
ث) $y = -۳^x - ۲$

$y = -(۳^x + ۲)$



چ) $y = ۲^{۳x+۲} = ۲^{۳x} \times ۲^{۲} = (۲^{۳})^{x} \times ۴ = ۸^{x} \times ۴$

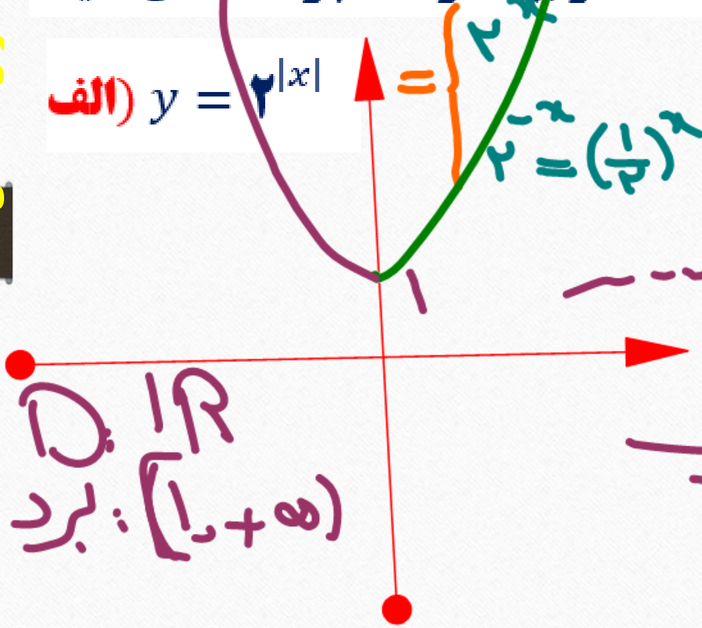
ج) $y = ۲^{۱-x} = ۲ \times ۲^{-x} = ۲(\frac{۱}{۲})^{x} + ۰$



مثال ۷) نمودار توابع زیر را به روش مناسب رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

الف) $y = ۲^{|x|}$

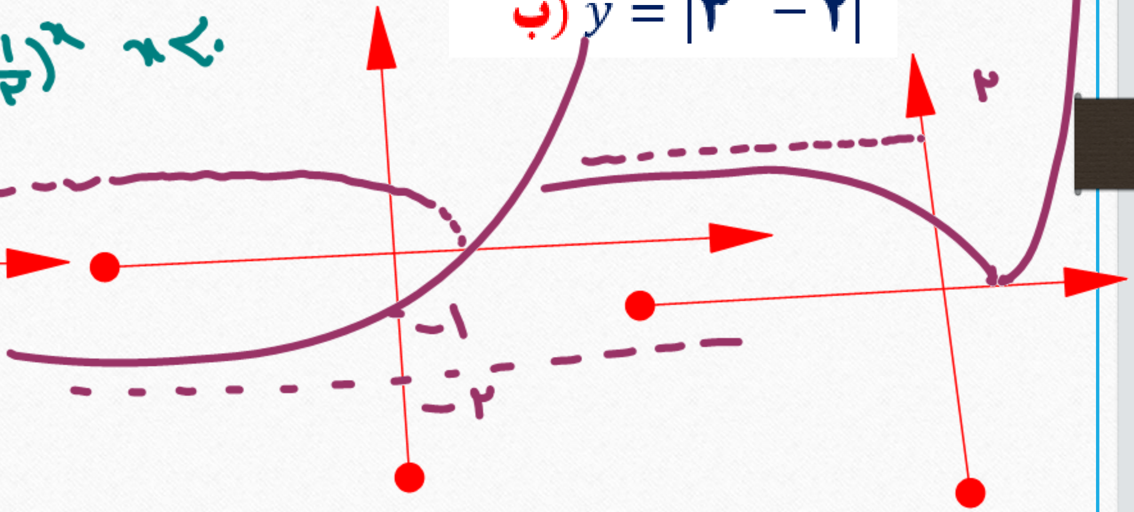
$= \begin{cases} ۲^x & x \geq 0 \\ ۲^{-x} = (\frac{۱}{۲})^x & x < 0 \end{cases}$



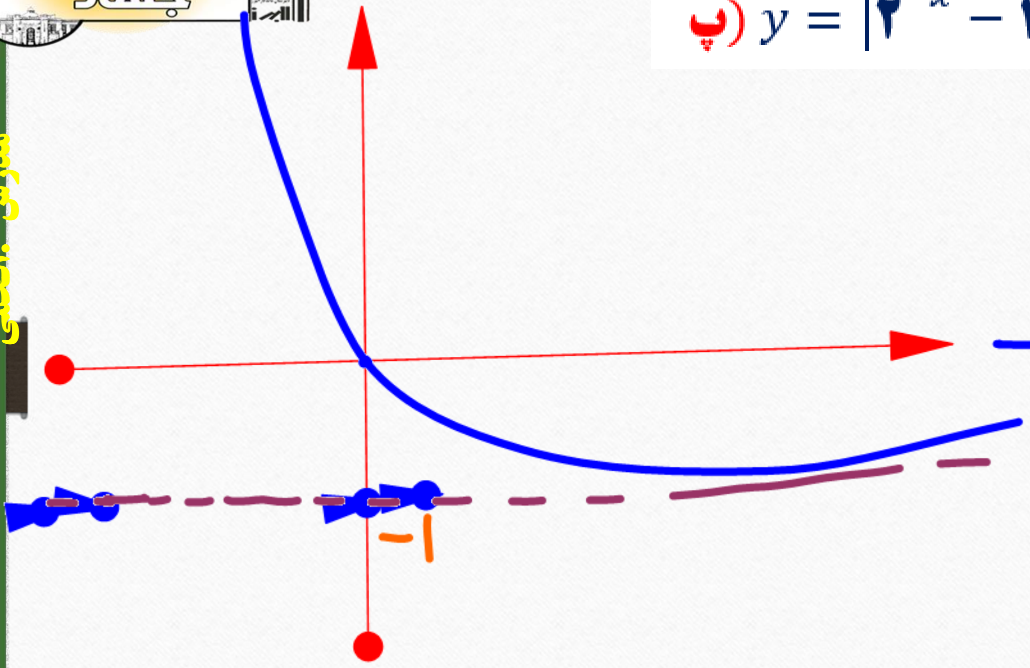
D: IR

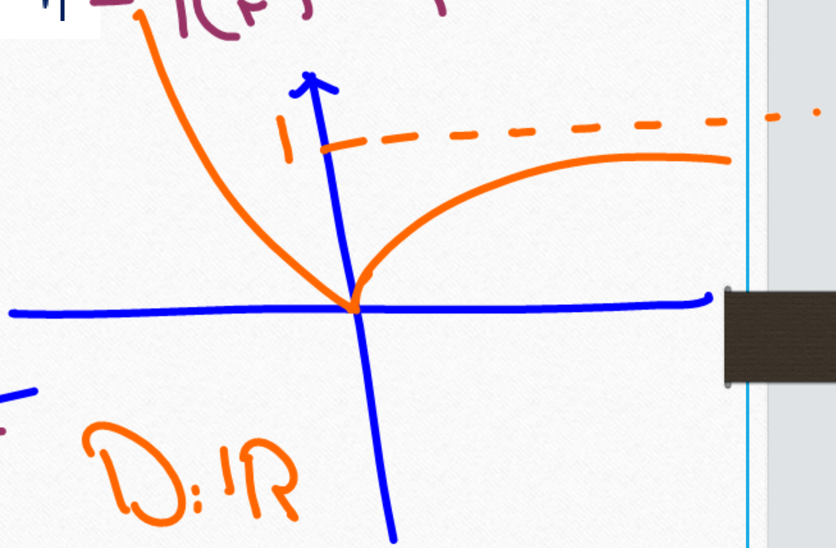
برد: $[1, +\infty)$

ب) $y = |۳^x - ۲|$



پ) $y = |۲^{-x} - ۱| = |(\frac{۱}{۲})^x - ۱|$





$D: \mathbb{R}$

برد: $[۰, +\infty)$

مثال ۸) ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}}$ ب) $۲^{۱/۲۵}$ پ) $۳^{\frac{۳}{۲}}$

الف)

$۱-\sqrt{۲} = -۰/۴$

$۳^{\boxed{-۱}} < ۳^{-۰/۴} < ۳^{۰}$

$\frac{۱}{۳} < ۳^{۱-\sqrt{۲}} < ۱$

$۲^{۰} < ۱/۲۵ < ۲^{\boxed{۱}}$

$۲^{-۱} < ۲^{۱/۲۵} < ۲^{۱}$

مثال۱۰) اگر x ، y و z سه عدد حقیقی دلخواه و $a \in (0\,,+\infty) - \{1\}$ باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ باشد، چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟

صعودی است

$a>1 : \quad a^x > a^y > a^z \longleftrightarrow x>y>z$

$0<a<1 : \quad a^x : \quad a^x > a^y > a^z \sim x<y<z$

نزولی است

$2^5 > 2^3 > 2^2$

$5>3>2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$5>3>2$

$0<a<1,\ x>y \longrightarrow a^x<a^y$

$a>1,\ \underline{x>y}\ \ a^x>a^y$

مثال۱۱) سه عدد بین $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

سه تا از

$۲,۵<۲,۶<۲,۷<۳<\sqrt{۱۰}$

$۳^{۲,۵}<۳^{۲,۶}<۳^{۲,۷}<۳^{۳}<۳^{\sqrt{۱۰}}$

مثال۱۲) پنج عدد بین $(\pi-۳)^{۱/۷}$ و $(\pi-۳)^{\sqrt{۵}}$ پیدا کنید.

$۱,۷<۱,۸<۱,۹<۲<۲,۱<۲,۲<\sqrt{۵}$

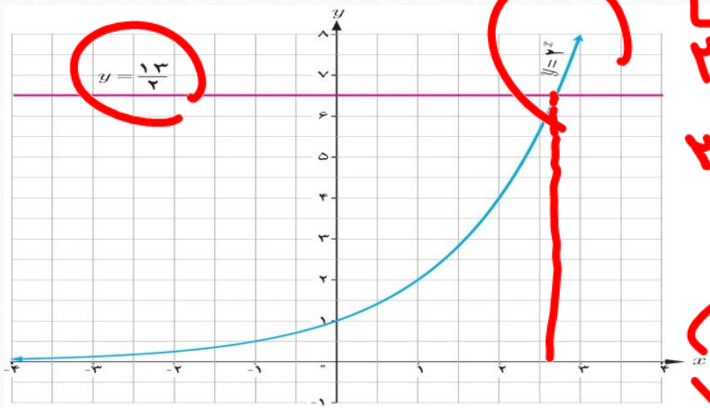
$۲,۴$

$(\pi-۳)^{۱,۷}>(\pi-۳)^{۱,۸}>(\pi-۳)^{۱,۹}>(\pi-۳)^{۲}>(\pi-۳)^{۲,۱}>(\pi-۳)^{۲,۲}>(\pi-۳)^{\sqrt{۵}}$

مثال۱۳) با توجه به شکل زیر، یک بار به روش هندسی و یک بار به روش جبری به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) طول نقطهٔ برخورد خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ و نمودار تابع $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطهٔ برخورد این خط و نمودار تابع $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



$۲^{\boxed{۲}} < ۲^x = ۶,۵ < ۲^{\boxed{۳}}$

$۲^۲ < ۲^x < ۲^۳ \to ۲ < x < ۳$

ب: $\sqrt{۷} \simeq ۲,۸ \to ۲^۱ < ۲^x = \sqrt{۷} < ۲^۲$

$۱ < x < ۲$

مثال۱۷) تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را بصورت تابع نمایی بنویسید. **ب)** جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$t=0 \longrightarrow 100mg$

$t=1 \longrightarrow 2^1 \times 100mg$

$t=2 \longrightarrow 2^2 \times 100mg$

$\longrightarrow m(t)=2^t \times 100$

ب) $m(20)=2^{20} \times 10$

مثال۱۸) نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$m(t)$: جرم بعد از مدت سپری شده t

m_0: جرم اولیه $\to 2^7$

$\frac{1}{2}$: مبنای کسر

$t \to ۳۰۰$ ، $T \to ۳۰$

$$m(300) = 2^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 2^7 \times 2^{(-10)} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$a^x = a^y \to x=y$

روش حل معادلات و نا معادلات نمایی

اگر در یک معادله یا نامعادله، مجهول در توان آمده باشد، آن معادله (یا نامعادله) را نمایی گویند.

برای حل معادلات نمایی اگر بتوان دو طرف معادله را با پایه‌های یکسان نوشت از دستور $a^m = a^n \Rightarrow m = n$ استفاده می‌کنیم و اگر امکان‌پذیر نبود معمولاً از روش تغییر متغیر و در بعضی موارد از لگاریتم استفاده می‌کنیم و در حل نامعادلات نمایی علاوه بر قواعد مشابه معادلات، استفاده از خواص جدول اخیر نیز مفید است.

مثال(۲۱) خط $y = 29$ نمودار تابع $y = 3^{2x-1} + 2$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

$3^{2x-1} + 2 = 29 \to 3^{2x-1} = 3^3 \to 2x-1=3 \to x=2$

مدرس: افخمی

$$a^x > a^y \quad \begin{cases} a>1 & x>y \\ 0<a<1 & x<y \end{cases}$$

مثال ۲۲) فاصله ای را بیابید که در آن نمودار تابع $y = (0/01)^{3x+2} - 3$ بالاتر از خط ۷ $y =$ باشد.

$$(0/01)^{3x+2} - 3 > 7 \longrightarrow (10^{-2})^{3x+2} > 10 \longrightarrow$$

$$10^{-6x-4} > 10^1 \xrightarrow{10>1} -6x-4 > 1$$

$$\longrightarrow -6x > 5 \xrightarrow{\div(-6)} x < -\frac{5}{6}$$

پویش علمی جهاد

مدرس: افخمی

الف) $3^{x^2-2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

$3^{x^2-2x} = 3^{-x+2}$

$x^2-2x=-x+2 \longrightarrow x^2-x-2=0$ (ب جمع، ضرب)

$(x-2)(x+1)=0 \longrightarrow x=-1$ یا $x=2$

ب) $4^{x-1} = \sqrt{2} \times 8^{2x-1}$

$(2^2)^{x-1} = 2^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{2x-1}$

$2^{2x-2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{6x-3} = 2^{6x-\frac{5}{2}}$

$2x-2=6x-\frac{5}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}=4x$

$x=\frac{1}{8}$

ت) $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$

$(2^2)^{2x-1} > 2^{-10}$

$2^{4x-2} > 2^{-10} \longrightarrow$

$4x-2>-10 \longrightarrow 4x>-8 \longrightarrow x>-2$

ث) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{x}-1} \geq \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}-2} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3x}{x-1}} \longrightarrow \frac{2}{x}-2 \leq \frac{3x}{x-1}$

$\frac{2}{x} - \frac{3x}{x-1} - 2 \leq 0 \longrightarrow$

ج) $۴^x \le ۵ \times ۲^x - ۴$

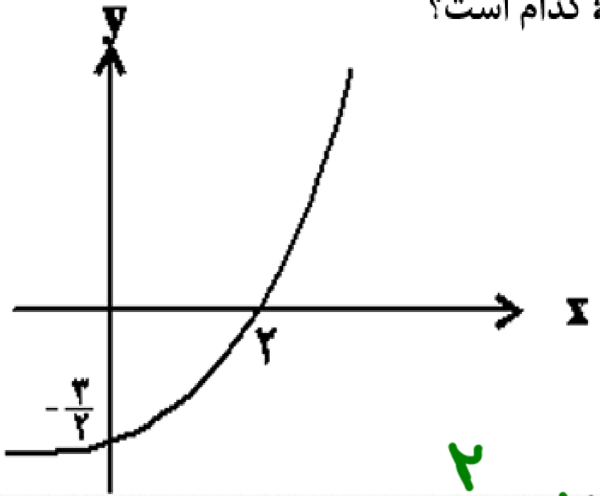
$$(2^x)^2 - 5(2^x) + 4 \le 0 \xrightarrow{2^x = t} t^2 - 5t + 4 \le 0$$

$$(t-1)(t-4) \le 0 \longrightarrow 1 \le t \le 4 \longrightarrow$$

$$2^0 \le 2^x \le 2^2 \longrightarrow 0 \le x \le 2$$

مدرس: افخمی

۱- نمودارهای دو تابع $f(x)=2^{x+a}+b$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل ab کدام است؟



۱) ۱-　　۲) ۲-

۳) ۱　　۴) ۲

① $f(2)=0 \longrightarrow 2^{2+a}+b=0$

② $f(0)=-\frac{3}{2} \longrightarrow 2^{a}+b=-\frac{3}{2}$

$\longrightarrow 2^{2}\times 2^{a}+b=0 \longrightarrow 4(2^{a})-2^{a}-\frac{3}{2}=0$

$\cancel{3}(2^{a})=\frac{\cancel{3}}{2}=2^{-1} \longrightarrow a=-1 \longrightarrow b=-2$

۲- فاصله نقطه برخورد دو تابع $f(x)=۲۲-۲^{x}$ و $g(x)=(\sqrt{۲})^{x+۶}-۲۶$ از نقطه ای به طول ۲ روی محور طول ها کدام است ؟

$\left|\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \longrightarrow \sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$

۱) ۵   ۲) $۲\sqrt{۱۰}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۶

$f(x)=g(x) \longrightarrow 22-2^{x}=(\sqrt{2})^{x+6}-26 \longrightarrow$

$\longrightarrow 48=2^{x}+(2^{\frac{1}{2}})^{x}\times 8 \longrightarrow 2^{x}+8(2^{\frac{x}{2}})-48=0$

$2^{\frac{x}{2}}=t \longrightarrow t^{2}+8t-48=0 \longrightarrow (t+12)(t-4)=0$

$\begin{cases} t=-12 \\ t=4=2^{\frac{x}{2}} \longrightarrow \frac{x}{2}=2 \longrightarrow x=4 \end{cases}$

۳- نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^{ax-b}+1$ و سهمی $g(x)=-2x^2+5$ همدیگر را در راس سهمی و همچنین $x=-1$ قطع می کنند. $f(2)$ کدام است ؟

۱) ۹   ۲) ۱۷   ۳) ۳۳   ۴) $\frac{9}{8}$

① $f(0)=g(0) \longrightarrow (\frac{1}{2})^{-b}+1=5 \longrightarrow 2^b=4 \longrightarrow b=2$

② $f(-1)=g(-1) \longrightarrow (\frac{1}{2})^{-a-b}+1=3$

$\longrightarrow (\frac{1}{2})^{-a-2}=2 \longrightarrow 2^{a+2}=2^1 \longrightarrow a=-1$

③ $f(2)=(\frac{1}{2})^{-1(2)-2}+1=17$

۴- در کدام بازه نمودار تابع $f(x)=۴^{x-۱}+۴$ پایین تر از نمودار تابع $g(x)=۳(۲^{x})-۴$ قرار می گیرد ؟

۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $R-[۱,۲]$ ۴) $R-[۲,۳]$

$$4^{x-1}+4<3(2^x)-4 \rightarrow (2^x)^2\times\frac{1}{4}-3(2^x)+8<0$$

$$2^x=t \qquad \frac{1}{4}t^2-3(t)+8<0 \rightarrow t^2-12t+32<0$$

$$(t-4)(t-8)<0 \rightarrow 4<t<8 \rightarrow 2^2<2^x<2^3$$

$$\Rightarrow 2<x<3$$

مدرس: افخمی

۵- نیمه عمر یک ماده رادیو اکتیو برابر ۱۵۰ سال است. اگر در ابتدا ۲۰ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از ۴۵۰ سال، چند گرم از ماده تجزیه می شود ؟

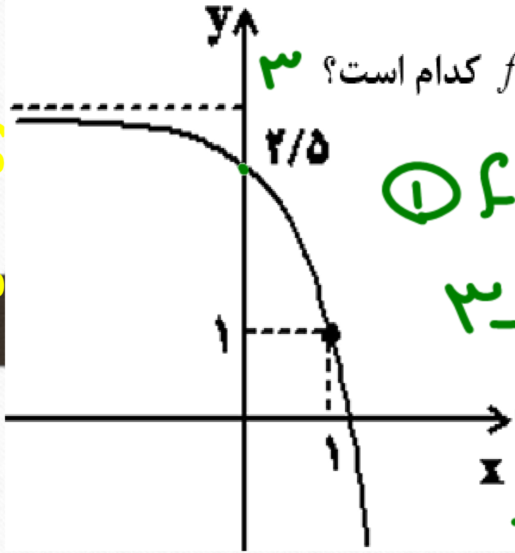
۱) ۲/۵   ۲) ۱۷/۵   ۳) ۱۵   ۴) ۷/۵

$$m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

جرم اولیه

نیمه‌عمر

$$=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{450}{150}}=20\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{2}=2/5$$



۶- نمودارهای دو تابع $f(x)=۳-۲^{ax+b}$ در شکل زیر رسم شده است. $f(۴)$ کدام است؟ ۳

۱) ۶۱- ۲) ۱۳۱-

۳) ۱۲۵- ۴) ۶۷-

① $f(۰)=۲,۵$

$۳-۲^{b}=۲,۵ \longrightarrow ۲^{b}=۲^{-۱} \longrightarrow b=-۱$

② $f(۱)=۱ \longrightarrow ۳-۲^{a-۱}=۱ \longrightarrow ۲=۲^{a-۱}$

$\longrightarrow a-۱=۱ \longrightarrow a=۲ \longrightarrow f(x)=۳-۲^{۲x-۱}$

③ $f(۴)=۳-۲^{۷}=$

۸- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۳x-۵} \geq (\frac{۴}{۳})^{-x+۴}$ کدام است ؟

۱) $[-۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۲]$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳]$

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۳x-۵} \geq \left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^{-۲x+۸} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{+۲x-۸}$$

$$۳x-۵ \leq ۲x-۸ \longrightarrow x \leq -۳$$

فاصله نقطه برخورد نمودار تابع $f(x)=۴(۲^{x})-۵(\sqrt{۲})^{x}+۱$ با محورهای مختصات از یکدیگر کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۴   ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

① $f(0):\ 4-5+1=0$

② $f(x)=0 \longrightarrow 4(2^{x})-5(2^{\frac{x}{2}})+1=0 \qquad 2^{\frac{x}{2}}=t$

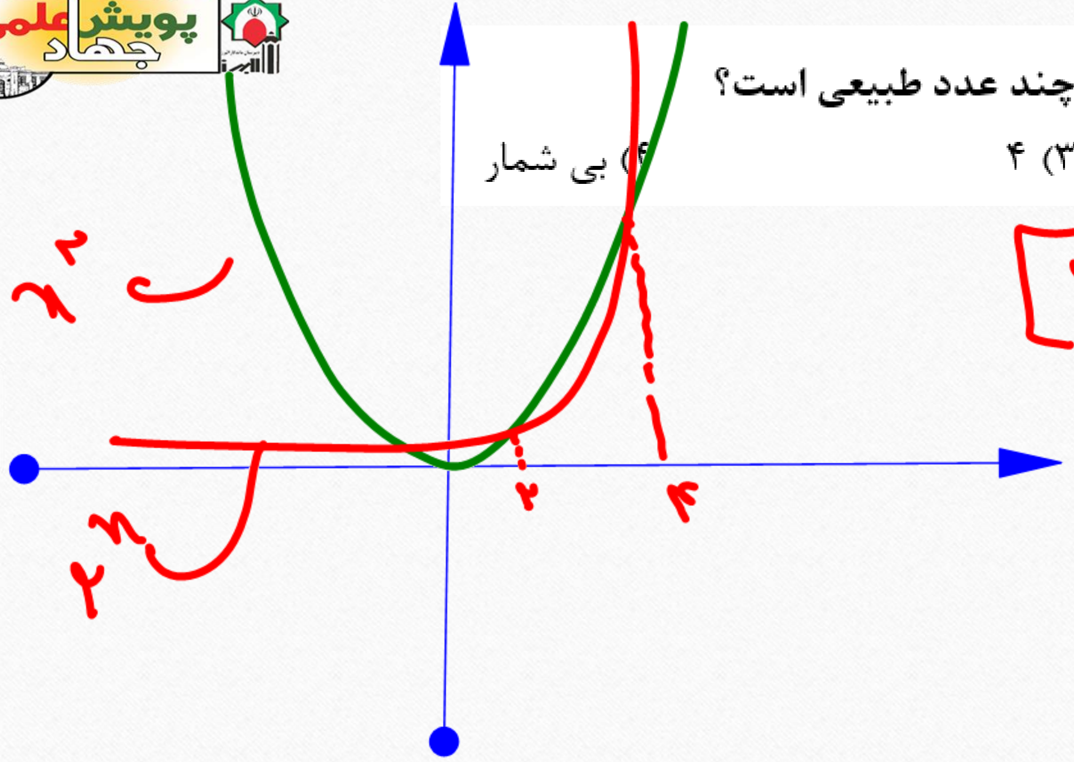
$4t^{2}-5t+1=0 \longrightarrow \begin{cases} t=1 \longrightarrow 2^{\frac{x}{2}}=2^{0} \longrightarrow x=0 \\ t=\frac{1}{4} \longrightarrow 2^{\frac{x}{2}}=2^{-2} \longrightarrow x=-4 \end{cases}$

$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|c} -4 & 0 \end{array}$

جواب نامعادله $x^{۲} \geq ۲^{x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) بی شمار

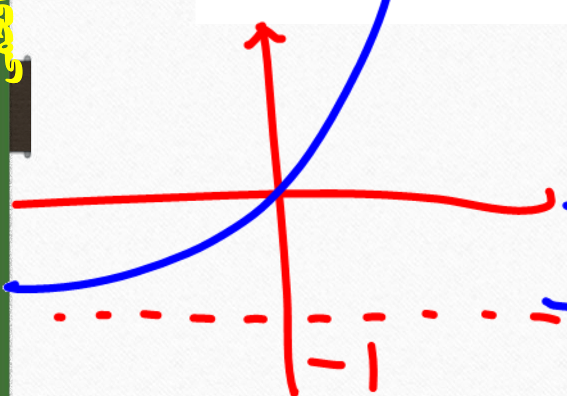


$[۲,۴]$

مدرس: افخمی

اگر $f(x)=3^x-1$ باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{(x+1)f(x)}{x+2}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-2]\cup[-1,0]$ ۲) $(-2,-1]\cup[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $[-1,+\infty)$



		-2		-1		0	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

$(-2,-1]\cup[0,+\infty)$

$2 < x < 3 \Rightarrow -3 < -x < -2$

$-3 < 1-x < -2$

اگر $\sqrt{19} = 2^x$ باشد، حاصل $2[1-x]+3$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) −۱　　۳) −۳　　۴) −۵

$2^2 < 2^x = \sqrt{19} < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$

$2(1+[-x])+3$

-3

$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=1 \Rightarrow (\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5}+2)^{-1}$

اگر مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{5}-2)^{x^2} > (\sqrt{5}+2)^{3x-4}$ بازه (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

$(\sqrt{5}+2)^{-x^2} > (\sqrt{5}+2)^{3x-4}$

$-x^2 > 3x-4 \Rightarrow x^2+3x-4<0$

$\Rightarrow -4<x<1$

$f(x) = a^x$

تعریف: اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ آن گاه تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است و از این رو دارای تابع وارون $f^{-۱}$ است که تابع لگاریتمی پایهٔ a نامیده می‌شود و با نماد $y = f^{-۱}(x) = \log_a x$ نشان داده می‌شود. پس:

$(a,b) \in f \longrightarrow (b,a) \in f^{-1}$

$$\boxed{a > ۰, a \neq ۱;\ f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-۱}(x) = log_a x}$$

$2^5 = 32 \longrightarrow \log_2 32 = 5$

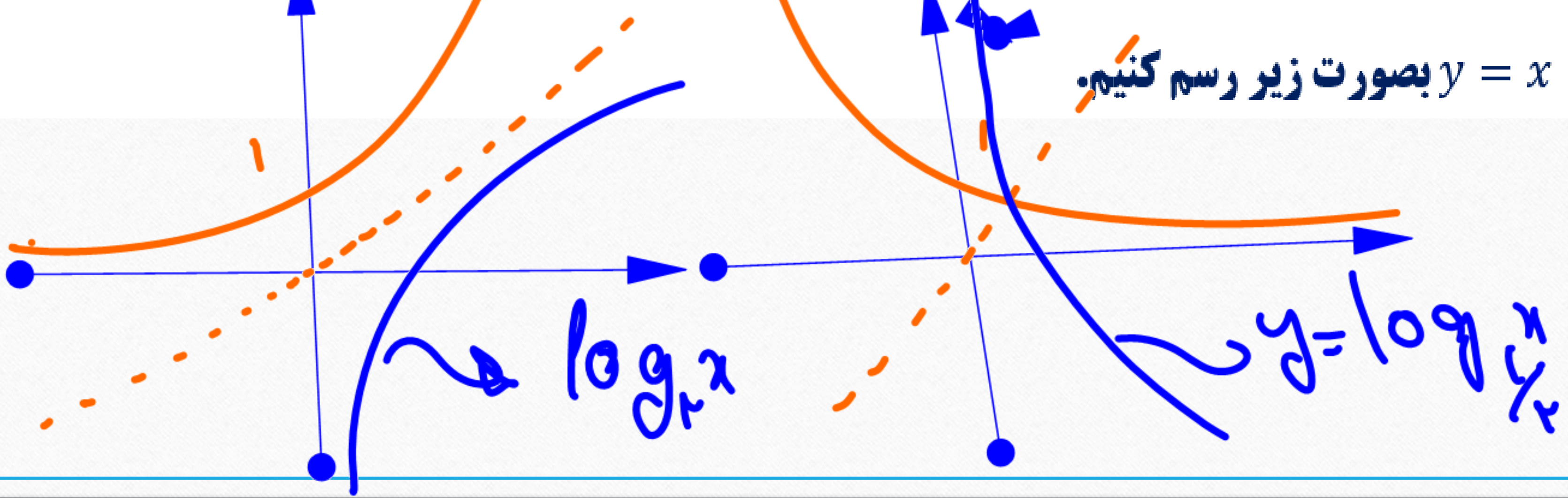
$f(x) = 2^x \longrightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$

$f(3) = 8 \longrightarrow \log_2 8 = 3$

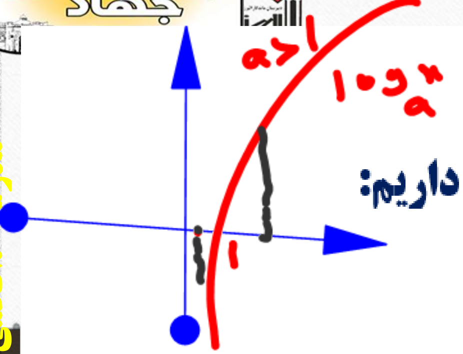
مدرس: افخمی

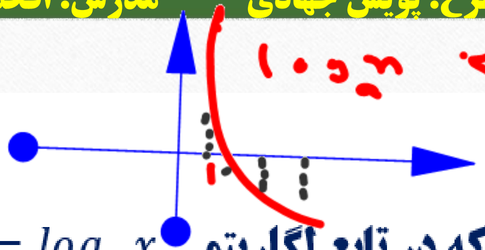
$f \,,\, f^{-1} \longrightarrow y=x$

مثلاً دو تابع $y_1 = log_2\, x$ و $y_2 = log_{\frac{1}{2}}\, x$ به ترتیب تابع معکوس توابع $y_3 = 2^x$ و $y_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ می‌باشند، لذا برای رسم نمودار توابع y_1 و y_2 کافی است قرینه‌های y_3 و y_4 را نسبت به خط $y = x$ بصورت زیر رسم کنیم.



پویش علمی جهاد





$\log_a 5 > 0$ $\log_{0.1} 2 < 0$

$\log_a 3 > 0$ $\log_{\frac{1}{2}} ... > 0$

نتایج مهم:

با توجه به نمودارهای اخیر درمی‌یابیم که در تابع لگاریتمی $f(x) = log_a x$ داریم:

الف) دامنهٔ تعریف این توابع $D_f = (0, +\infty)$ و برد آن‌ها $R_f = R$ می‌باشد.

ب) اگر $a > 1$ باشد این توابع صعودی اکید و اگر $0 < a < 1$ باشد، این توابع نزولی اکید هستند.

پ) نمودار تابع لگاریتمی محور عرض‌ها را قطع نمی‌کند زیرا عدد $x = 0$ در دامنهٔ تعریف آن نمی‌باشد.

$\log_a u > 0$ $\log 0 =$ ت.ن $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$

به طور کلی برای یافتن مقدار دقیق یا تقریبی یک لگاریتم بدون رسم نمودار، می‌توان از تعریف لگاریتم و رابطهٔ آن با تابع نمایی به صورت زیر استفاده کنیم. $\boxed{y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x}$

مثلاً برای یافتن مقادیر دقیق و یا تقریبی عباراتی مانند:

$y = \log_a x \to a^y = x$

$\log_۳ \frac{۱}{۳} = y \to ۳^y = \frac{۱}{۳} = ۳^{-۱} \to y = -۱$

$\log_۳ ۵ = y \to ۳^۱ < ۳^y = ۵ < ۳^۲ \to ۱ < y < ۲$

$\log_۳ ۲۲۴ = y \to ۳^۴ < ۳^y = ۲۲۴ < ۳^۵ \to ۴ < y < ۵$

$\log_۳ ۰/۰۱ = y \quad ۳^{-۵} < ۳^y = ۰/۰۱ = \frac{۱}{۱۰۰} < \frac{۱}{۸۱} \to ۳^{-۵} < ۳^y < ۳^{-۴} \to -۵ < y < -۴$

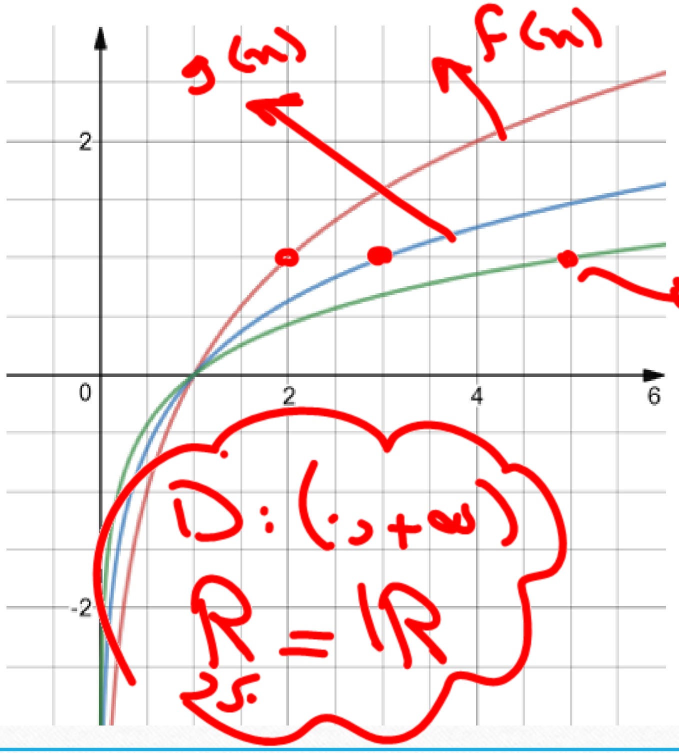
مثال۱) نمودار توابع زیر در شکل روبرو رسم شده است:

$h(x) = \log_{۵} x$ و $g(x) = \log_{۳} x$ و $f(x) = \log_{۲} x$

الف) ضابطهٔ هر یک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) دامنه و برد هر یک را بنویسید.

پ) مقادیر آنها را با هم مقایسه کنید.



$f(۲) = \log_{۲} ۲ = ۱$

$g(۳) = \log_{۳} ۳ = ۱$

$h(۵) = \log_{۵} ۵ = ۱$

$x > 1$: $f(x) > g(x) > h(x)$

$0 < x < 1$: $h(x) > g(x) > f(x)$

مثال۳) حدود m را چنان بیابید که تابع $f(x)=\log_{(۲m-۳)}x$ **الف)** اکیداً صعودی باشد. **ب)** اکیداً نزولی باشد.

۱) $۲m-۳>۱ \longrightarrow ۲m>۴ \longrightarrow m>۲$

۲) $۰<۲m-۳<۱ \longrightarrow ۳<۲m<۴ \longrightarrow$

$\frac{۳}{۲}<m<۲$

$f(x)=a^x+b$

$y=0 \to 2\log(3x-1)-1=0$

$\log(3x-1)=\frac{1}{2}$

به طور کلی هر تابع به فرم $f(x)=k\log_a(bx+c)+\beta$ که از تبدیلات تابع $f(x)=\log_a x$ رسم می‌شود، رفتار تابع لگاریتمی را دارد. مانند:

$g(x)=\log_b(x+a)+b \qquad x=-a$

$3x-1=\sqrt{10}$

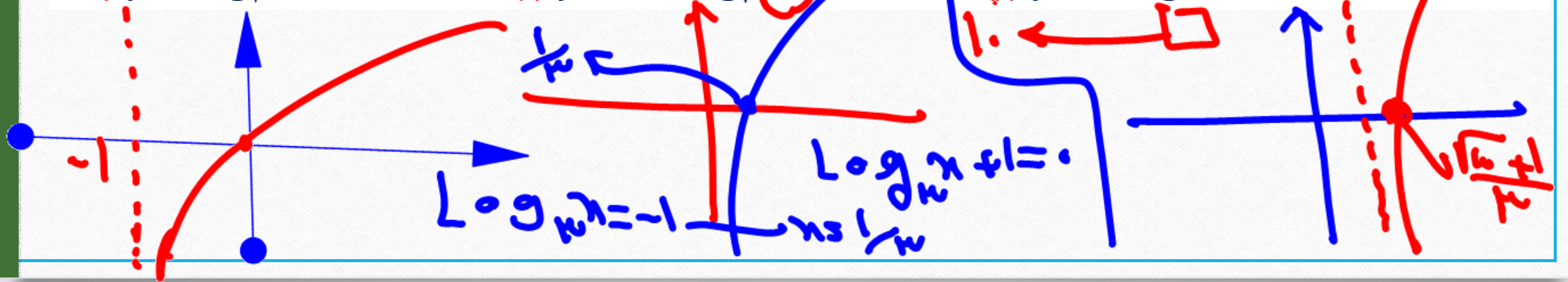
$f(x)=۳\log_۲ x$ و $g(x)=\frac{-۲}{۳}\log(x+۱)$ و $h(x)=\log_{\frac{۲}{۳}}(۳x+۱)-۱$

$x=\frac{\sqrt{10}+1}{3}$

$\log_2 1=\boxed{0}$

مثال ۴) نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

الف) $y=\log_۲(x+۱)$ **ب)** $y=۱+\log_۳ x$ **پ)** $y=۲\log(۳x-۱)-۱$



مثال۶) با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل دقیق یا تقریبی عبارات زیر را بیابید.

الف) $\log_{۲} ۳۲ = ۵$ ب) $\log_{۰/۵} ۴\sqrt{۲} = y$ پ) $\log_{\sqrt[۴]{۷}} \sqrt[۳]{۴۹} = z$ ت) $\log_{۷} ۷ = ۱$

$\log_a a = 1$

$(\frac{۱}{۲})^y = ۴\sqrt{۲}$

$۲^{-y} = ۲^{\frac{۵}{۲}}$

$\boxed{y = -\frac{۵}{۲}}$

$(\sqrt[۴]{۷})^z = \sqrt[۳]{۴۹}$

$(۷^{\frac{۱}{۴}})^z = ۷^{\frac{۲}{۳}}$

$۷^{\frac{z}{۴}} = ۷^{\frac{۲}{۳}}$

$\frac{z}{۴} = \frac{۲}{۳} \times ۴$

$\boxed{z = \frac{۸}{۳}}$

ث) $\log_{۵} ۱ = 0$

ج) $\log ۱۰۰۰ = Z$

$10^{Z} = 1000$

$Z = 3$

چ) $\log_{\frac{۹}{۴}} \frac{۱۶}{۸۱} = u$

$\left(\frac{9}{4}\right)^{u} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2u} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

$2u = -4 \rightarrow u = -2$

ح) $\log_{۰/۰۱} \frac{\sqrt[۳]{۱۰۰}}{۱۰} = t$

$(0.01)^{t} = \frac{10^{\frac{2}{3}}}{10}$

$10^{-2t} = 10^{-\frac{1}{3}}$

$-2t = -\frac{1}{3} \rightarrow t = \frac{1}{6}$

$f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2$ $\quad a^x=y \to \log_a y = x$

مثال۷) در وارون‌پذیری توابع زیر تحقیق کرده سپس در صورت وجود ضابطهٔ وارون آنها را بیابید.

الف) $f(x)=۲\times ۳^{x+1}-۵$

ب) $f(x)=\log_۳ \dfrac{x-۱}{۵-x}$

$\cancel{۲}\times ۳^{x_1+1}\cancel{-۵}=\cancel{۲}\times ۳^{x_2+1}\cancel{-۵}$

$x_1+1=x_2+1 \to \boxed{x_1=x_2}$ یک به یک

$y+۵=۲\times ۳^{x+1}$

$\frac{y+۵}{۲}=۳^{x+1}$

$\log_۳\left(\frac{y+۵}{۲}\right)-1=x$

$f^{-1}(x)=\log_۳\left(\frac{x+۵}{۲}\right)-1$

$$\frac{\sqrt[3]{3}+1}{5}=x$$

مثال۸) اگر نمودار تابع $f(x)=a\log_3(5x-1)+b$ از نقاط $(\frac{2}{5},1)$ و $(2,7)$ بگذرد، محل تلاقی آن را با محور طول‌ها بیابید.

① $f(\frac{2}{5})=1 \longrightarrow a\log_3(5(\frac{2}{5})-1)+b=1$

$\longrightarrow a\underbrace{\cancel{\log_3(1)}}_{0}+b=1 \longrightarrow b=1$

② $f(2)=7 \longrightarrow a\log_3(9)+1=7 \longrightarrow 2a+1=7 \longrightarrow \boxed{a=3}$

③ $f(x)=3\log_3(5x-1)+1$

$f(x)=0 \longrightarrow 3\log_3(5x-1)=-1 \longrightarrow \log_3(5x-1)=-\frac{1}{3} \longrightarrow 3^{-\frac{1}{3}}=5x-1$

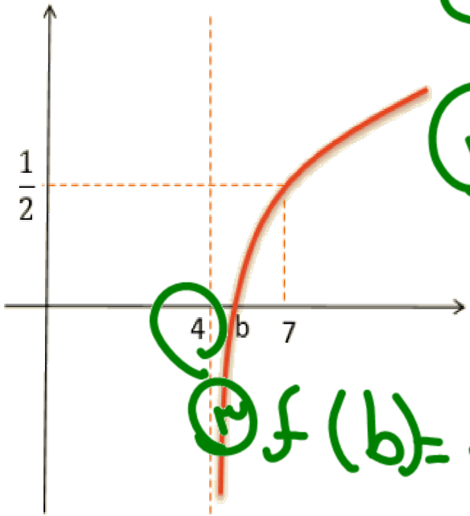
مدرس: افخمی

$amb = 45(4) = 180$

مثال۹) شکل زیر مربوط به تابع $f(x)=log_a(x-m)$ است.مقدار amb را بیابید.

(۱) $4-m=0 \longrightarrow \boxed{m=4}$

(۲) $f(7)=\frac{1}{2} \longrightarrow \log_a(7-4)=\frac{1}{2} \longrightarrow a^{\frac{1}{2}}=3 \longrightarrow \boxed{a=9} \longrightarrow f(x)=\log_9(x-4)$



(۳) $f(b)=0 \longrightarrow \log_a(b-4)=0 \longrightarrow b-4=1 \longrightarrow \boxed{b=5}$

دامنهٔ تعریف توابع لگاریتمی در حالت کلی:

با توجه به تعریف تابع لگاریتمی، برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع لگاریتمی ممکن است فقط تابع جلو لگاریتم، یا فقط مبنا و یا هر دو شامل متغیر x باشند، در این صورت در حالت کلی سه وضعیت زیر را داریم:

الف) $f(x) = \log_a g(x) \quad ; a > 0$ و $a \neq 1 \rightarrow D_f = \{x \in R \mid g(x) > 0\}$

$a > 0 , a \neq 1$

ب) $f(x) = \log_{h(x)} b \quad ; b > 0 \rightarrow D_f = \{x \in R \mid h(x) > 0$ و $h(x) \neq 1\}$

پ) $f(x) = \log_{h(x)} g(x) \rightarrow D_f = \{x \in R \mid g(x) > 0$ و $h(x) > 0$ و $h(x) \neq 1\}$

مثال۱۰) دامنهٔ تعریف توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \log_{۵}\left(x(x-۳)^{۲}\right)$

$x(x-۳)^{۲} > ۰$

$(۰,۳) \cup (۳,+\infty)$

ب) $f(x) = \log_{(۳x-۵)} ۳$

① $۳x-۵>۰ \Rightarrow x > \frac{۵}{۳}$

② $۳x-۵ \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۲$

$\left(\frac{۵}{۳},+\infty\right)$

پ) $f(x) = \log_{(۲x-۱)}\left(۹ - x^{۲}\right)$

① $۹-x^{۲}>۰ \Rightarrow -۳<x<۳$

② $۲x-۱>۰ \Rightarrow x > \frac{۱}{۲}$

③ $۲x-۱ \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۱$

$\left(\frac{۱}{۲},۱\right) \cup (۱,۳)$

آیا توابع $f(x)=\log\frac{x-1}{x+2}$ و $g(x)=\log(x-1)-\log(x+2)$ با هم برابرند؟ با ذکر دلیل؟

$D_f: \frac{x-1}{x+2}>0$

	-2		1	
$+$		$-$		$+$

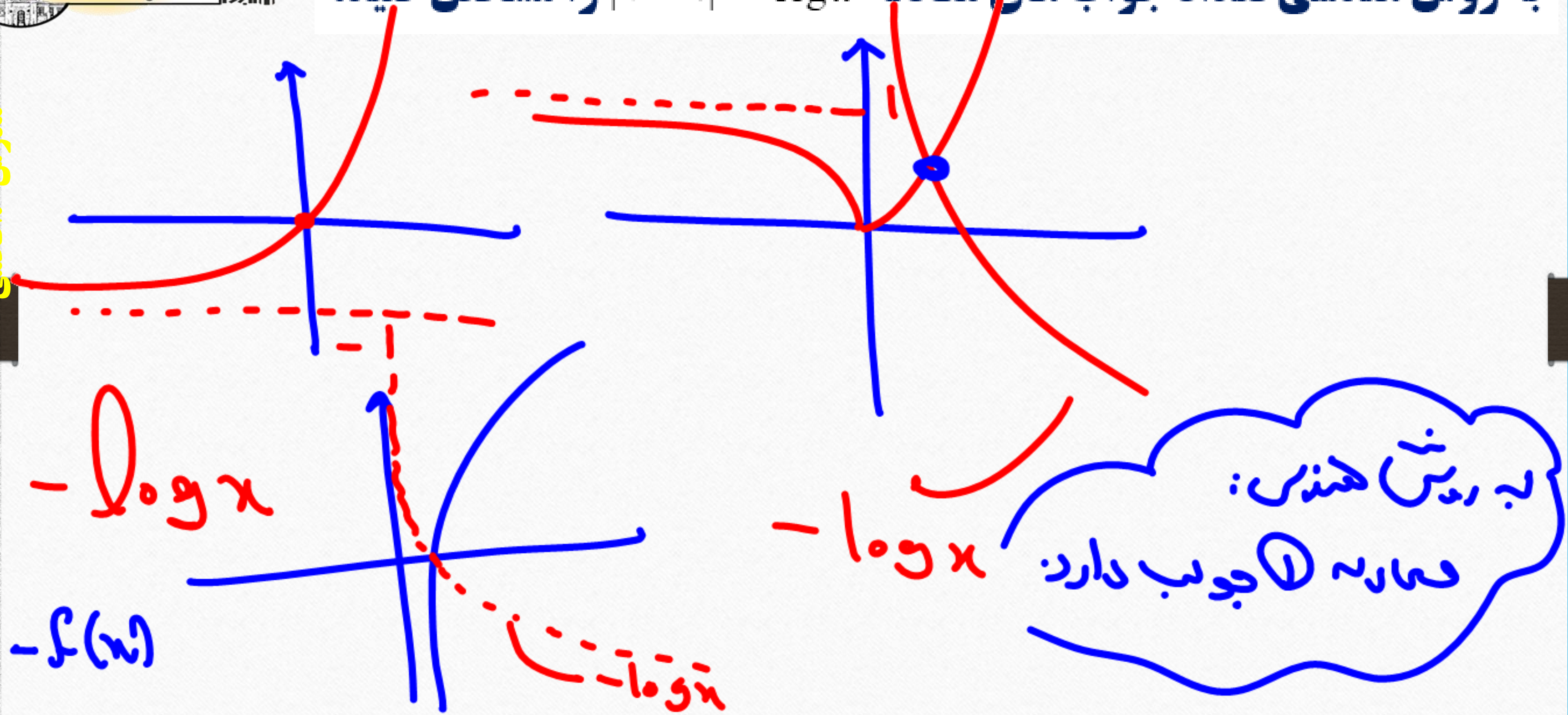
$D_f: (-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

$D_g: x-1>0$ و $x+2>0 \rightarrow x>1 \cap x>-2 : x>1$

$\rightarrow D_g: (1,+\infty) \rightarrow D_f \neq D_g$ بنابراین $\boxed{f\neq g}$

مدرس: افخمی

- به روش هندسی تعداد جواب های معادله $|2^x-1|=-\log x$ را مشخص کنید.



تابع $y=\log_2(ax^2+bx+c)$ فقط در بازه $(-\frac{1}{2},+\infty)$ تعریف شده است. اگر تابع وارون آن از نقطه $(1,3)$ بگذرد، مقادیر a,b,c را بیابید.

α

$ax^2+bx+c>0$

تعیین علامت

$\boxed{a=0}$

$y=\log_2(bx+c)$

① $\frac{b}{2}+c=0$

② $f(3)=1 \to \log_2(3b+c)=1$

$3b+c=2$

$\frac{5}{2}b=2 \to b=\frac{4}{5}$

- اگر $f(x)=\log \frac{ax+۴}{x-b}$ بازه $(-۱,۲)$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۱)$ را حساب کنید.

دامنه

$$-۱ \quad ۲$$

(۱) $-a+۴=۰ \rightarrow a=۴$

$۲-b=۰ \rightarrow b=۲$

$$f(x)=\log \frac{۴x+۴}{x-۲}$$

(۲) $۲a+۴=۰ \rightarrow a=-۲$

$-۱-b=۰ \rightarrow b=-۱$

$$f(x)=\log \frac{-۲x+۴}{x+۱}$$

$$-۱ \quad ۲$$

$$f(x)=\frac{-۲x+۴}{x+۱}$$

$$f^{-۱}(۱)=u \rightarrow f(u)=۱$$

$$\rightarrow \frac{-۲u+۴}{u+۱}=۱$$

نیمه عمر یک ماده ۴۸ ساعت است. اگر ۲۵۶ گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم، جرمی که پس از ۹۶ ساعت باقی می ماند چقدر است؟

- معادله $\log_2(9-2^{x-1}) = 4 - x$ را حل کنید.

$$2^{4-x} = 9 - 2^{x-1}$$

$$2^4 \times 2^{-x} = 9 - 2^x \times \frac{1}{2}$$

$$16(2^{-x}) + 2^x\left(\frac{1}{2}\right) - 9 = 0 \qquad 2^x = t$$

$$\frac{16}{t} + \frac{t}{2} - 9 = 0 \xrightarrow{\times 2t} 32 + t^2 - 18t = 0$$

$$t^2 - 18t + 32 = 0 \to \begin{cases} t = 2 \to 2^x = 2 \to x = 1 \\ t = 16 \to 2^x = 16 \to x = 4 \end{cases}$$

مدرس: افخمی

ضابطه وارون تابع $f(x)=\frac{3^{x+1}-1}{3^x+1}$ را بیابید.

$$y=\frac{3^x\times 3-1}{3^x+1}$$

$$3^x y+y=3(3^x)-1$$

$$3^x(y-3)=-1-y$$

$$3^x=\frac{-1-y}{y-3}$$

$$\to x=\log_3\left(\frac{-1-y}{y-3}\right)$$

$$f^{-1}(x)=\log_3\left(\frac{-1-x}{x-3}\right)$$

- معادله $\log_{۲} x + \log_{x} ۶۴ = ۵$ را حل کنید.