تعریف: اگر $b > ۰$ و $b \neq ۱$ و $b^n = a$ در اینصورت عدد n را لگاریتم a در پایه(مبنای) b گوییم و می‌نویسیم:

$$b > ۰ \, , b \neq ۱ \, , a > ۰ , b^n = a \Leftrightarrow \log_b a = n$$

مانند:

$$۲^{۳} = ۸ \Leftrightarrow log_{۲} ۸ = ۳ \quad ; \quad ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹} \Leftrightarrow log_{۳} \frac{۱}{۹} = -۲$$

$$۱۰^{۴} = ۱۰۰۰۰ \Leftrightarrow log_{۱۰} ۱۰۰۰۰ = ۴ \quad ; \quad \left(\sqrt{۵}\right)^{۲} = ۵ \Leftrightarrow log_{\sqrt{۵}} ۵ = ۲$$

$$۲^{\frac{-۳}{۴}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۸}} \Leftrightarrow log_{۲} \frac{۱}{\sqrt[۴]{۸}} = \frac{-۳}{۴} \quad ; \quad ۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵} \Leftrightarrow log_{۵} \sqrt{۵} = \frac{۱}{۲}$$

نکات مهم:

۱) در عبارت $\log_b a$ همواره باید $a > 0$ و $b > 0$ و $b \neq 1$ باشد، پس اعداد نامثبت لگاریتم ندارند.

۲) اگر $b = 10$ آنگاه b را مبنای اعشاری گفته و از نوشتن آن خودداری می‌کنیم. پس: $\log_{10} a = \log a$ در واقع لگاریتم در پایهٔ ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌گوییم.

$b > 0, b \neq 1$

۳) چون $b^0 = 1$ پس $\log_b 1 = 0$ یعنی لگاریتم عدد ۱ در هر پایه‌ای برابر صفر است.

۴) چون $b^1 = b$ پس $\log_b b = 1$ یعنی لگاریتم هر عددی در مبنای خودش برابر ۱ است.

ویژگی‌های لگاریتم:

فرض کنید x و y اعداد حقیقی مثبت و $b > 0$ و $b \neq 1$ باشد، در اینصورت داریم:

۱) لگاریتم حاصلضرب دو عدد برابر است با مجموع لگاریتم‌های آن‌ها. یعنی:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

مانند:

$$\longrightarrow \log_2 21 = \log_2 3 \times 7 = \log_2 3 + \log_2 7$$

$$\begin{cases} x = b^{A_1} \\ y = b^{A_2} \\ xy = b^{A} \end{cases} \xrightarrow{b^{A_1} \times b^{A_2} = b^{A_1 + A_2}} A = A_1 + A_2$$

$$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$$

نکته: ویژگی اخیر قابل تعمیم است. یعنی: $\log_b xyz\ldots = \log_b x + \log_b y + \log_b z + \cdots$ مانند:

$$\log_2 30 = \log_2 2\times 3\times 5 = \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5 \xrightarrow{\log_b b=1} \log_2 30 = 1 + \log_2 3 + \log_2 5$$

مثال۱) اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 7 = 0/8$ مقدار $\log 140$ را بیابید.

$$\log 2\times 7\times 10 = \log 2 + \log 7 + \log 10$$
$$= 0/3 + 0/8 + 1 = 2/1$$

۲) لگاریتم خارج قسمت دو عدد برابر است با تفاضل لگاریتم‌های آن‌ها. یعنی:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مانند: $\log \frac{۷}{۵} = \log ۷ - \log ۵$

$$\begin{cases} x = b^{A_1} \\ y = b^{A_2} \\ \frac{x}{y} = b^{A} \end{cases} \longrightarrow \frac{b^{A_1}}{b^{A_2}} = b^{A_1 - A_2} \longrightarrow A = A_1 - A_2 \longrightarrow \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

۳) لگاریتم توان mام هر عدد برابراست با لگاریتم آن عدد ضربدر m . یعنی:

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مانند: $\longrightarrow \log_5 8 = \log_5 2^3 = 3 \log_5 2$

$$\begin{cases} x^m = b^A \\ x = b^{A_1} \end{cases} \longrightarrow (b^{A_1})^m = b^A \longrightarrow b^{A_1 m} = b^A$$

$$A = A_1 \times m$$

مثال۳) اگر $\log_{۲} ۳ = ۱/۶$ باشد، مقادیر $\log_{۲} ۳\sqrt{۳}$ و $\log_{۳} ۳\sqrt{۳}$ را بیابید.

$$\log_{۲} ۳\sqrt{۳} = \log_{۲} ۳^{۱} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} = \log_{۲} ۳^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}\log_{۲} ۳ = \frac{۳}{۲}(۱/۶) = ۲/۴$$

$$\log_{۳} ۳\sqrt{۳} = \log_{۳} ۳^{۱} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲}\log_{۳} ۳ = \frac{۳}{۲}$$

$\log 10 = \log 2 + \log 5 \longrightarrow \log 5 = 1 - \log 2$

$\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}}$

مثال۴) اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$، **حاصل عبارت‌های زیر را برحسب** a **و** b **بیابید.**

الف) $\log ۰/۰۰۵$

$\log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 1000 = 1 - \log 2 - 3 = -2 - a$

ب) $\log \frac{۳۶}{۱۲۵}$

$\log 36 - \log 125 = 2(\log 3 + \log 2) - 3(1 - \log 2) = 2\log 3 + 2\log 2 - 3 + 3\log 2 = 2b + 5a - 3$

پ) $۳\log \sqrt[۳]{۴} - \log ۲۵۰$

$3 \log 2^{\frac{2}{3}} - (2\log 5 + 1) = 3(\frac{2}{3})\log 2 - 2(1 - \log 2) - 1 = 2\log 2 - 2 + 2\log 2 - 1 = 4a - 3$

مثال۵) اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ و $\log ۳ = ۰/۴۷۷۱$، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\log(۱۸ \times ۳۷۵)$

$= \log(۳^۲ \times ۲ \times ۵^۳ \times ۳)$

$= \log ۳^۳ + \log ۵^۳ + \log ۲$

$= ۳\log ۳ + ۳\log ۵ + \log ۲$

$= ۱/۲ + ۳(۰/۷) + ۰/۳$

$= ۳/۳ + ۰/۳ = ۳/۶$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵}$

$= \log\sqrt{\frac{۷۵}{۱۰۰}}$

$= \log\sqrt{\frac{۳}{۴}}$

$= \log\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

$= \frac{۱}{۲}(\log ۳ - ۲\log ۲)$

$= -۰/۱$

پ) $\log_۲ \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}$

$= \log_۲ \frac{۲^{\frac{۳}{۲}}}{۲^{\frac{۱}{۴}}}$

$= \log_۲ ۲^{\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۴}}$

$= \log_۲ ۲^{\frac{۵}{۴}} = \frac{۵}{۴}\log_۲ ۲ = \frac{۵}{۴}$

مثال۶) اگر $\log_{۳۰}۳ = a$ و $\log_{۳۰}۵ = b$، عبارت $\log_{۳۰}۸$ را برحسب a و b بیابید.

$$\log_{۳۰}۸ = ۳\log_{۳۰}۲$$

$$۱ = \log_{۳۰}۳۰ = \log_{۳۰}۲ + \log_{۳۰}۳ + \log_{۳۰}۵$$

$$\log_{۳۰}۲ = ۱ - a - b$$

$$\log_{۳۰}۸ = ۳(۱ - a - b)$$

مثال۷) به کمک تعریف لگاریتم رابطهٔ $log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$ (تغییر مبنا) را ثابت کنید.

$$Log_b^a = \frac{log_c a}{log_c b}$$

A

A_1

A_2

$a = c^{A_1}$

$b = c^{A_2}$

$a = b^{A}$

$c^{A_1} = b^{A} = (c^{A_2})^{A}$

$c^{A_1} = c^{AA_2}$

$A_1 = AA_2$

$A = \frac{A_1}{A_2}$

$log_b^2 = \frac{Log\,2}{Log\,5}$

$log_b^a = \frac{Log\,a}{Log\,b}$

$$log_b^a = \frac{1}{Log_a^b}$$

از این دستور نتیجه می‌گیریم که دو مقدار $\log_b a$ و $\log_a b$ عکس یکدیگرند. یعنی: $\log_b a . \log_a b = 1$

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

$$(\log_{\sqrt{2}} 3)(\log_2 \sqrt{3}) = 1$$

مثال۹) اگر $x = \log_{۳} ۵$ و $y = \log_{۲} ۳$ و $z = \log_{۵} ۲$ مقدار عبارت xyz را بیابید.

$$x = \frac{\log ۵}{\log ۳} \quad y = \frac{\log ۳}{\log ۲} \quad z = \frac{\log ۲}{\log ۵}$$

$$xyz = \frac{\log ۵}{\log ۳} \times \frac{\log ۳}{\log ۲} \times \frac{\log ۲}{\log ۵} = ۱$$

مثال۱۰) اگر $\log_a x = ۲$, $\log_b x = ۳$ و $\log_c x = ۶$ باشد مقدار $\log_{abc} x$ را بیابید.

$$\log_{abc} x = \frac{\log x}{\log abc} = \frac{۱}{\log a + \log b + \log c} = \frac{۶}{۳+۲+۱} = ۱$$

$\log a = \frac{۱}{۶}$, $\log b = \frac{۱}{۳}$, $\log c = \frac{۱}{۲}$

مثال۱۱) درستی رابطهٔ $a^{\log_a x} = x$ را ثابت کنید.

$f(x) = a^x \longrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$

$f \circ f^{-1}(x) = x \longrightarrow a^{f^{-1}(x)} = x$

$a^{\log_a x} = x$

مثال۱۳) نمودار توابع زیر را به روش مناسب رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

الف) $y = \sqrt{\log^2 x - 2\log x + 1}$

$y = \sqrt{(\log x - 1)^2}$

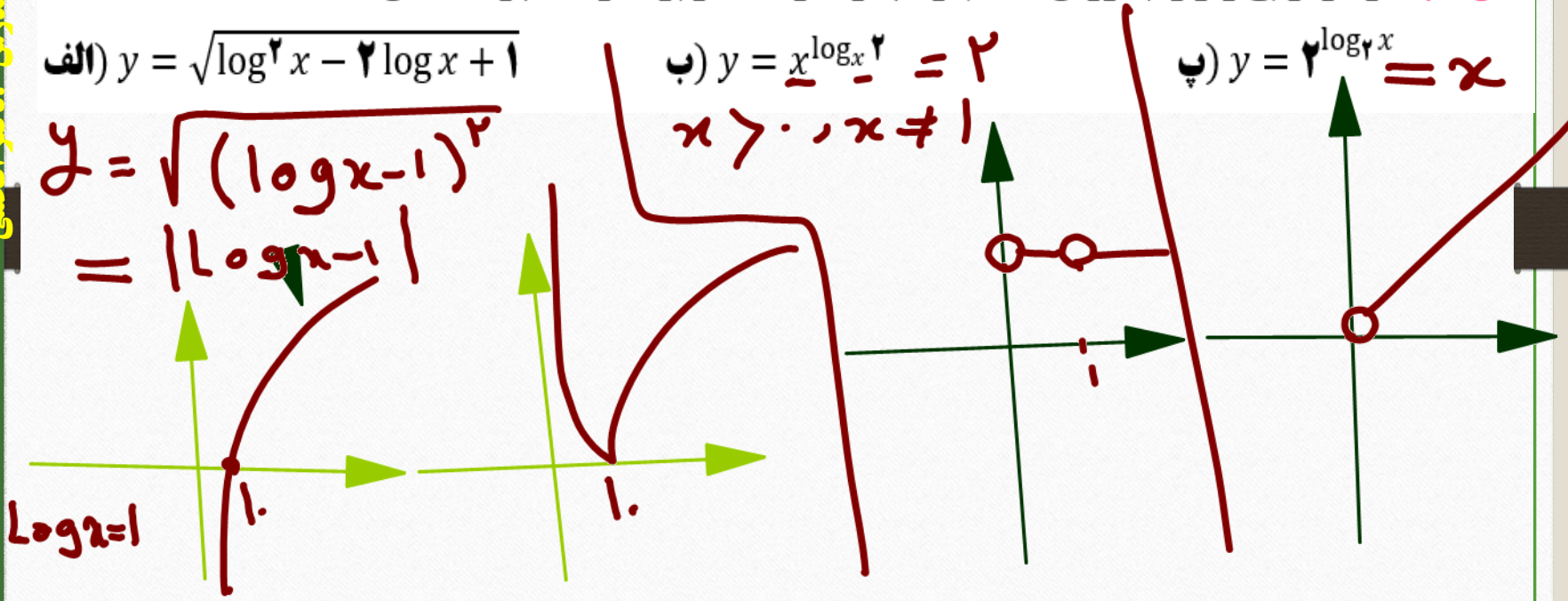
$= |\log x - 1|$

$\log_2 = 1$

ب) $y = x^{\log_x 2} = 2$

$x > 0, x \neq 1$

پ) $y = 2^{\log_2 x} = x$



معادلات و نامعادلات لگاریتمی:

برای حل معادلات و نامعادلات لگاریتمی بهتر است ابتدا دامنهٔ تعریف را تعیین کنید، سپس آن‌ها را به یکی از حالات زیر تبدیل کنید تا از حالت لگاریتمی خارج شوند:

۱) $\log_b u = a \Rightarrow u = b^a$

۲) $\log_b u = \log_b v \Rightarrow u = v$

۳) $\log_b u \geq a \begin{cases} \xRightarrow{b>1} u \geq b^a \\ \xRightarrow{0<b<1} u \leq b^a \end{cases}$

۴) $\log_b u \geq \log_b v \begin{cases} \xRightarrow{b>1} u \geq v \\ \xRightarrow{0<b<1} u \leq v \end{cases}$

مثال۱۴) معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۳}(x-۱)+\log_{۳}\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۲$

$\log_{۳}(x-۱)\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۲ \longrightarrow (x-۱)\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۹$

$\frac{x^{۲}}{۲}+x-\frac{x}{۲}-۱=۹ \longrightarrow \frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x}{۲}-۱۰=۰$

$x^{۲}+x-۲۰=۰ \longrightarrow (x+۵)(x-۴)=۰ \longrightarrow \begin{cases} x=-۵ \text{ ق.ق.ق} \\ x=۴ \checkmark \end{cases}$

ب) $\log_2(12b-21)-\log_2(b^2-3)=2$ حل: ⟶

$\log_2\frac{12b-21}{b^2-3}=2 \longrightarrow \frac{12b-21}{b^2-3}=4$

$12b-21=4b^2-12 \longrightarrow 4b^2-12b+9=0$

$(2b-3)^2=0 \longrightarrow 2b=3 \longrightarrow b=\frac{3}{2}$

ق ب ندارد.

پ) $\log_{0/1}(x^2-1) \geq -1$ حل: $\longrightarrow$

$x^2-1 \leq (0/1)^{-1} = 10$

$x^2 \leq 11 \Rightarrow -\sqrt{11} \leq x \leq \sqrt{11}$

$x^2-1 > 0$

$(-\sqrt{11}, -1) \cup (1, \sqrt{11}]$

ت) $\log x \le 1 - \log(x+3)$ حل: $\longrightarrow$

$x > 0$

$x+3 > 0 \rightarrow x > -3$

$\log x + \log(x+3) \le 1 \rightarrow \log_{10} x(x+3) \le 1$

$x(x+3) \le 10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 \le 0 \rightarrow (x+5)(x-2) \le 0$

$-5 \quad 0 \quad 2$

$\therefore$ جواب: $(0, 2]$

همینطور $\log x$ را نیز میتوان به پایه دلخواه نوشت

ث) $x^{1-\log x} = 0/01$ حل: $\longrightarrow$

$\log\left(x^{1-\log x}\right) = \log 0/01$

$\log 0/01 = -2$

$(1-\log x)(\log x) = -2$

$(\log x) - (\log x)^2 = -2$

$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$

$(\log x - 2)(\log x + 1) = 0$

$\log x = 2 \rightarrow x = 100$

$\log x = -1 \rightarrow x = 0/1$

ج) $\log_{۲} x + \log_{x} ۲ = ۲/۵$ حل: $\longrightarrow$

$t \rightarrow \frac{1}{t}$

$t + \frac{1}{t} = \frac{۵}{۲} \times ۲t$

$۲t^{۲} - ۵t + ۲ = ۰$

$\Delta = ۹$

$t = \frac{۵ \pm ۳}{۴}$

$۲ \rightarrow \log_{۲} x = ۲ \rightarrow x = ۴$

$\frac{۱}{۲} \rightarrow \log_{۲} x = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = \sqrt{۲}$

$\log_{x^{۲}} ۲ = \frac{۱}{\log_{۲} x^{۲}}$

$\log_{۱۰۰} ۱۰ = \frac{۱}{۲}$

ج) $۴۹^x + ۵ = ۶ \times ۷^x \longrightarrow$ حل:

$(۷^x)^۲ - ۶(۷^x) + ۵ = ۰ \xrightarrow{۷^x = t} t^۲ - ۶t + ۵ = ۰$

$\Delta = ۱ + ۲۴ = ۲۵$

$t = \frac{۶ \pm ۵}{۲} \begin{cases} ۱ \\ ۵ \end{cases}$

$t = ۱ \longrightarrow ۷^x = ۱ \longrightarrow x = ۰$

$t = ۵ \longrightarrow ۷^x = ۵ \longrightarrow x = \log_۷ ۵$

خ) $\sqrt{x}^{(۱+۳\log_۲ x)} = ۴$ لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم

$\log_۲ \sqrt{x}^{(۱+۳\log_۲ x)} = \log_۲ ۴$

$(۱+۳\log_۲ x)(\log_۲ \sqrt{x}) = ۲ \longrightarrow (۱+۳\log_۲ x)(\frac{۱}{۲}\log_۲ x) = ۲$

$\frac{۱}{۲}\log_۲ x + \frac{۳}{۲}(\log_۲ x)^۲ = ۲ \times ۲ \longrightarrow ۳(\log_۲ x)^۲ + \log_۲ x - ۴ = ۰$

پویش علمی جهاد

مدرس: دکتر افخمی

مثال۱۵) دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۲}(۲x-۳)+\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)}$ **را بیابید.**

$۲x-۳>۰ \longrightarrow x>\frac{۳}{۲}$

$x-۱>۰ \longrightarrow x>۱$

$\cap \rightarrow x>\frac{۳}{۲}$

$D_f:[۲,+\infty)$

$\log_{۲}(۲x-۳)+\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)\geq ۰ \longrightarrow \log_{۲}(۲x-۳)-\log_{۲}(x-۱)\geq ۰$

$\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)=\log_{۲^{-۱}}(x-۱)=-\log_{۲}(x-۱)$

$\log_{۲}\frac{۲x-۳}{x-۱}\geq ۰ \longrightarrow \frac{۲x-۳}{x-۱}\geq ۱ \longrightarrow \frac{۲x-۳}{x-۱}-۱\geq ۰ \longrightarrow \frac{x-۲}{x-۱}\geq ۰$

$x<۱ \cup x\geq ۲$

مثال۱۶) دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log(\frac{x-12}{x-3})-1}$ را بیابید.

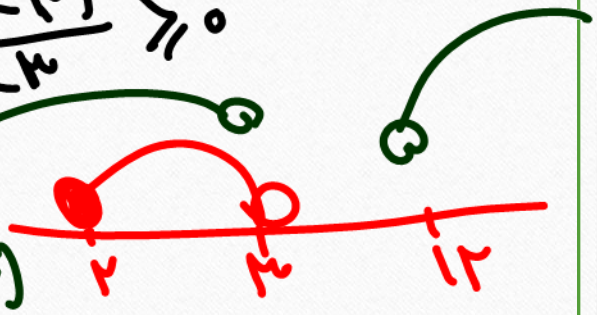
① $\frac{x-12}{x-3}>0$ ⟶ $x<3 \cup x>12$

② $\log(\frac{x-12}{x-3})-1\geq 0$ ⟶ $\log(\frac{x-12}{x-3})\geq 1$

$\frac{x-12}{x-3}\geq 10$ ⟶ $\frac{x-12}{x-3}-\frac{10(x-3)}{x-3}\geq 0$

$\frac{-9x+18}{x-3}\geq 0$ ⟶ $2\leq x<3$

$D_f:[2,3)$



مثال۱۵) نیمه عمر عنصری چهار روز است و جرم اولیهٔ یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟ $(\log ۲ \cong ۰/۳۰۱)$

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$ الف

ب) $0.01 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \rightarrow \log(0.01) = \frac{t}{4}\log\left(\frac{1}{2}\right)$

$-2 = \frac{t}{4}(\log 1 - \log 2) \rightarrow -2 = \frac{t}{4}(-0.3) \rightarrow t = \frac{40}{3}$

$\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$

مثال۱۷) ریشتر مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطهٔ $\log E = 11/8 + 1/5\,M$ به‌دست می‌آید. روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزادشده در این زلزله چقدر بوده است؟

$M = 6{,}6 \rightsquigarrow \log E = 11{,}8 + 1{,}5(6{,}6) = 21{,}7 \rightsquigarrow E = 10^{21{,}7}$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

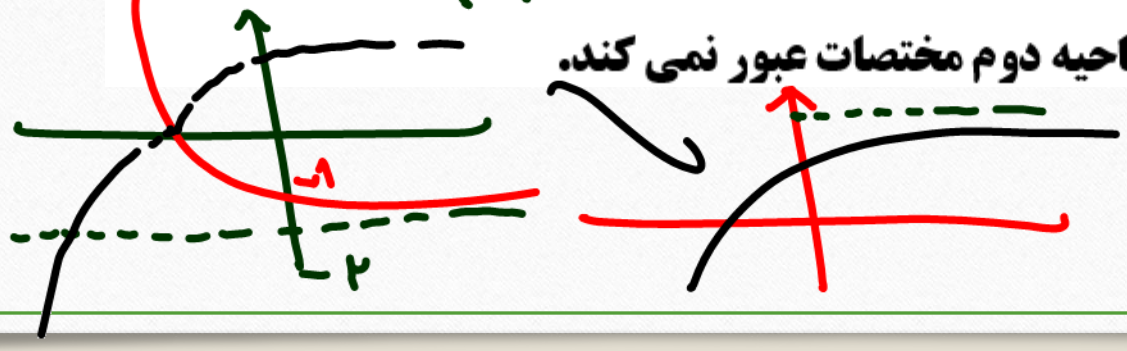
الف: لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱، همواره عددی منفی است. غلط

ب: نمودار دو تابع $f(x)=3^x$ و $g(x)=\log_3 x$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه هم هستند.

پ: مقدار تابع لگاریتم می تواند منفی باشد. (غلط)

ت: حاصل $\log_{\sqrt{2}} 1$ تعریف نمی شود. (غلط)

ث: نمودار تابع $f(x)=2-2^{-x}$ از ناحیه دوم مختصات عبور نمی کند.



پویش علمی جهاد

دامنه تابع $f(x)=\log_{(x-2)}\frac{x}{x-1}$ **را بیابید.**

$x>0 \quad$ یا $\quad x<0$

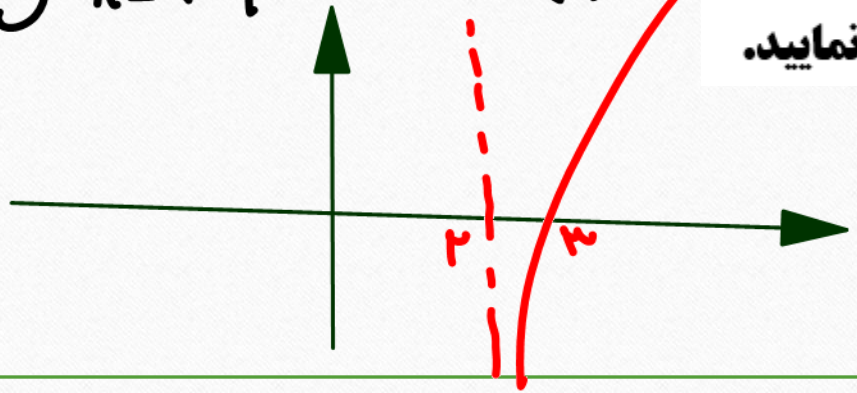
$x-2$

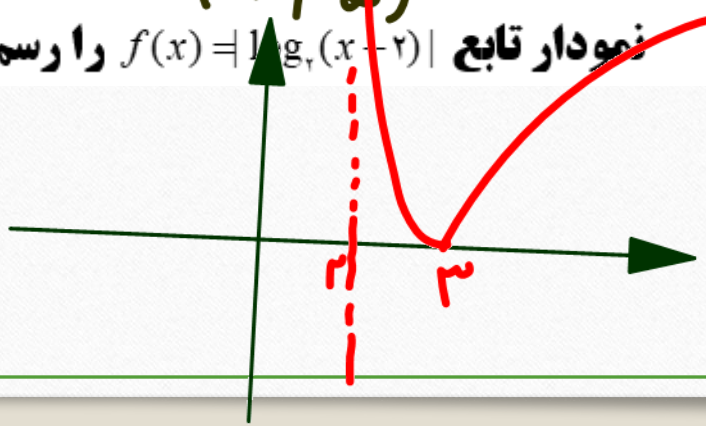
$x-2>0 \longrightarrow x>2$

$x-2\neq 1 \longrightarrow x\neq 3$

$(2,3)\cup(3,+\infty)$

نمودار تابع $f(x)=|\log_2(x-2)|$ **را رسم نمایید.**





اگر $f(x)=\log_b x$ **از نقطه** $(۴,۲)$ **بگذرد، حاصل** $\log(b^۵+۶۸)$ **را بیابید.**

$۲=\log_b ۴ \rightsquigarrow b^۲=۴ \longrightarrow b=۲$

$\log_{۱۰}(۳۲+۶۸)=\log_{۱۰} ۱۰۰=۲$

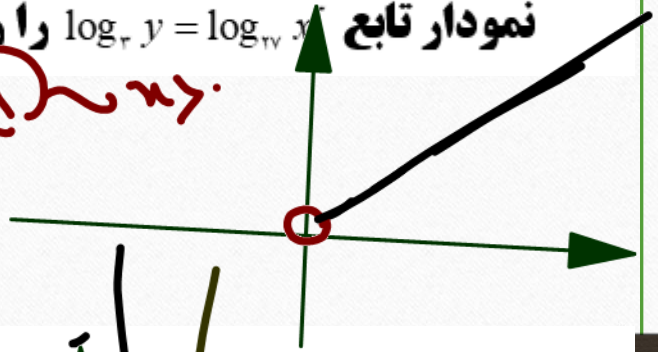
آیا توابع $f(x)=\log\frac{x-۱}{x+۲}$ **و** $g(x)=\log(x-۱)-\log(x+۲)$ **با هم برابرند؟ با ذکر دلیل؟**

$x>۱$ $\quad x<-۲$

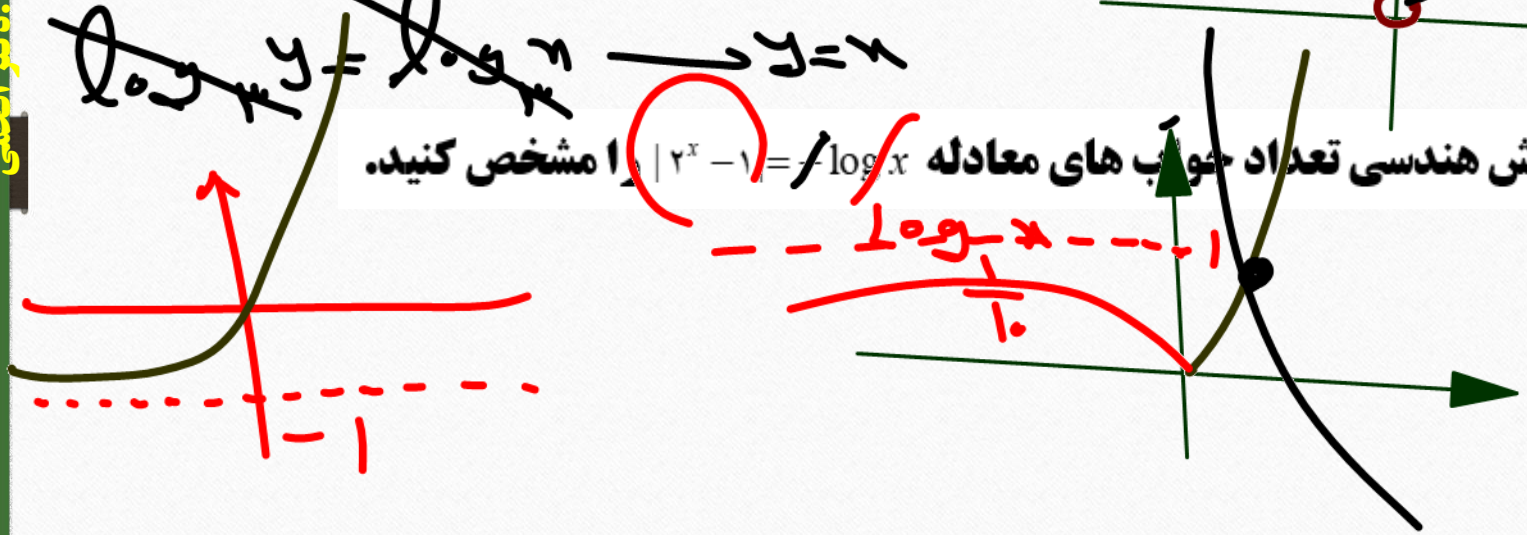
$D_f: \frac{x-۱}{x+۲}>۰ \longrightarrow x<-۲ \cup x>۱ : (-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$

$D_g: x>۱$

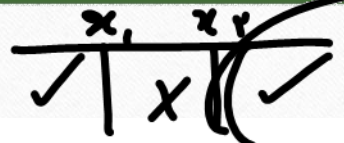
نمودار تابع $\log_{\frac{1}{3}} y = \log_{\frac{1}{27}} x$ را رسم کنید.



به روش هندسی تعداد جواب های معادله $|2^x - 1| = -\log x$ را مشخص کنید.



$ax^2+bx+c>0$



تابع $y=\log_2(ax^2+bx+c)$ **فقط در بازه** $(\frac{1}{2},+\infty)$ **تعریف شده است. اگر تابع وارون آن از نقطه** $(1,3)$ **بگذرد، مقادیر** a,b,c **را بیابید.**

$a=0$

دامنه

$\frac{1}{2}b+c=0$ ✓

$1=\log_2(3b+c)$ ⟶ $3b+c=2$ ✓

$\frac{5}{2}b=2$ ⟶ $b=\frac{4}{5}$

اگر $f(x)=\log\frac{ax+4}{x-b}$ **بازه** $(-1,2)$ **باشد، مقدار** $f^{-1}(1)$ **را حساب کنید.**

(۱) $-a+4=0 \rightsquigarrow a=4$ ، $2-b=0 \rightsquigarrow b=2$

(۲) $2a+4=0 \rightsquigarrow a=-2$ ، $-1-b=0 \rightsquigarrow b=-1$ (دامنه)

$f(x)=\log\frac{-2x+4}{x+1}$

$f^{-1}(1)=U \rightarrow f(U)=1 \rightsquigarrow \log\frac{-2U+4}{U+1}=1$

$\frac{10}{1}=\frac{-2U+4}{U+1} \rightsquigarrow 10U+10=-2U+4$

$12U=-6 \rightsquigarrow U=-\frac{1}{2}$

x	-1		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\cdots$	$-$	

$f(x)=\frac{4x+4}{x-2}$

معادله $\log_2(9-3^{x-1})=4-x$ **را حل کنید.**

$$2^{(4-x)}=9-2^{x-1} \longrightarrow 16(2^{-x})=9-\frac{1}{2}(2^x)$$

$$\frac{2^x=t}{} \quad \frac{16}{t}=9-\frac{1}{2}t \xrightarrow{\times 2t} 32=18t-t^2 \rightsquigarrow$$

$$t^2-18t+32=0 \rightsquigarrow \begin{cases} t=2 \rightsquigarrow 2^x=2 \rightsquigarrow x=1 \\ t=16 \rightsquigarrow 2^x=16 \rightsquigarrow x=4 \end{cases}$$

ضابطه وارون تابع $f(x)=\frac{3^{x+1}-1}{3^x+1}$ **را بیابید.**

$$y=\frac{3(3^x)-1}{3^x+1} \rightsquigarrow 3^x y+y=3(3^x)-1$$

$$3^x(y-3)=-1-y \rightsquigarrow 3^x=\frac{-1-y}{y-3} \rightsquigarrow x=\log_3\left(\frac{-1-y}{y-3}\right)$$

معادله $\log_{۲} x + \log_{x} ۶۴ = ۵$ **را حل کنید.**

$\log_{۲} x = t$

$t + \frac{۶}{t} = ۵$

$t^{۲} - ۵t + ۶ = ۰$

$t = ۲ \rightarrow \log_{۲} x = ۲ \rightarrow x = ۴$

$t = ۳ \rightarrow \log_{۲} x = ۳ \rightarrow x = ۸$

معادله $\log_{۲۷} x + \log_{۹} x + \log_{۳} x = ۱۱$ **را حل کنید.**

$\frac{۱}{۳}\log_{۳} x + \frac{۱}{۲}\log_{۳} x + \log_{۳} x = ۱۱$

$(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + ۱)\log_{۳} x = ۱۱ \rightarrow \frac{۱۱}{۶}\log_{۳} x = ۱۱ \rightarrow x = ۳^{۶}$

اگر $f(x) = ۲^{-x+۱} - ۳$ و $D_{g(x)} = (۰, +\infty)$ باشند، دامنهٔ تابع $\text{gof}^{-۱}(x)$ به صورت بازهٔ (a, b) خواهد بود. طول نقطهٔ وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{-۵}{۲}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ ۳) -۱ ۴) -۲

معادله‌ی $\text{Log}_{2x-1}^{x} = 2$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

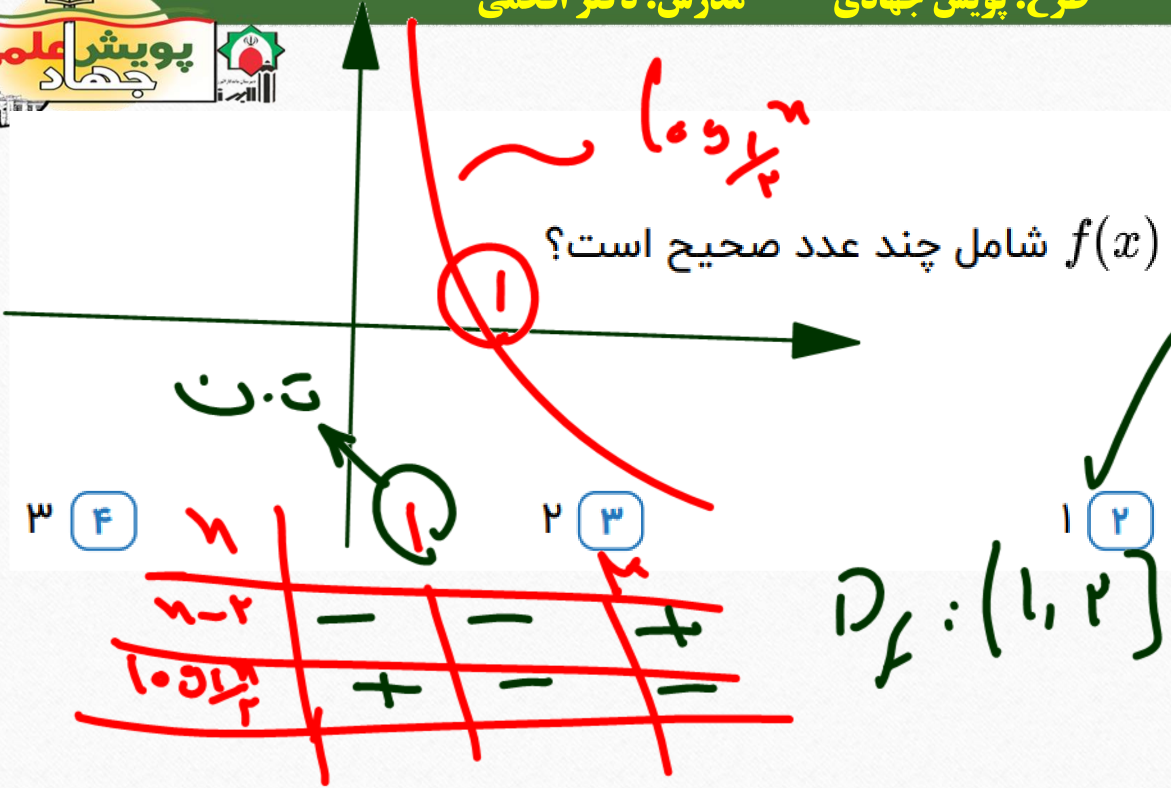
$(2x-1)^2 = x \sim 4x^2 - 4x + 1 = x \longrightarrow$

$4x^2 - 5x + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \quad \times \\ x_2 = \frac{1}{4} \quad \times \end{cases}$

پویش علمی جهاد
مدرس: دکتر افخمی

دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۲}{\operatorname{Log}_{\frac{۱}{۲}} x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳



نمودار تابع $f(x) = \text{Log}_{۲}^{(ax+b)}$ خط $y = x + ۱$ را روی محورهای مختصات قطع می‌کند. ضابطه تابع $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = ۲^{x+۲}$ ۲) $f^{-۱}(x) = ۲^{x} - ۲$ ۳) $f^{-۱}(x) = ۲^{x} + ۲$ ۴) $f^{-۱}(x) = ۲^{x-۲}$

مجموع جواب‌های معادله $2^{4+x} = 4 + 4^x$ کدام است؟ $\log_2^{(4+4^x)} = 4 + x$

۱) $\log_2^3 2$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\log_2^3 4$

$16(2^x) = 4 + (2^x)^2$

$(2^x)^2 - 16(2^x) + 4 = 0$

$2^x = t \quad t^2 - 16t + 4 = 0$

$\Delta = 16^2 - 16 = 16(15) = 240$

$2^{x_1} \times 2^{x_2} = t_1 \times t_2 = 4 \rightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^2 \sim x_1 + x_2 = 2$

$x^2 - (x_1+x_2)x + (x_1 x_2) = 0$

مجموع جواب‌های معادله‌ی $(\text{Log}_3 x)^2 - \text{Log}_3 45 \,\text{Log}_3 x + \text{Log}_3 25 = 0$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

$(\log_3 x)^2 - (2+\log_3 5)\log_3 x + 2\log_3 5 = 0$

$S = 2+\log_3 5$

$\begin{cases} \log_3 x = 2 \sim x = 9 \\ \log_3 x = \log_3 5 \sim x = 5 \end{cases}$

اگر $x = \alpha$ جواب معادله‌ی $\log_{۲}(۲^{x} + ۴۴) = ۲x + \log_{۲} ۳$ باشد، حاصل $\log_{۳} \frac{۴\alpha + ۱}{\alpha - ۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

$۲^{۲x + \log_{۲}۳} = ۲^{x} + ۴۴$

$۲^{۲x} \times ۲^{\log_{۲}۳} = ۲^{x} + ۴۴$

$۳(۲^{x})^{۲} = ۲^{x} + ۴۴$

$t = ۲^{x}$

$۳t^{۲} - t - ۴۴ = ۰$

$t = ۴ \rightarrow ۲^{x} = ۲^{۲}$ $x = ۲$

$\log_{۳} \frac{۸ + ۱}{۲ - ۱} = ۲$

اگر $\text{Log}\,۲ \simeq ۰/۳$ و $\text{Log}\,۳ \simeq ۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $x^۲(\text{Log}\,۳۰) + ۲x(\text{Log}\,۶) - \text{Log}\,\frac{۵}{۶} = ۰$ چقدر است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۴ ۴) ۱

$\log ۵ - \log ۶$

$\log ۵ + \log ۶$

$(\log ۵ + \log ۶)x^۲ + (۲\log ۶)x - \log ۵ + \log ۶ = ۰$

$a \quad b \quad c$

$b = a + c \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = \dfrac{\log ۵ - \log ۶}{\log ۵ + \log ۶} = \dfrac{-x - (x)}{} = ۰ \end{cases}$

اگر $\log_b^a = ۲$، $\log_c^a = ۳$، $\log_d^a = ۵$ باشد، مقدار $\log_{bcd}^a$ کدام است؟

۱) ۱۰

۲) $\frac{۱}{۱۰}$

۳) $\frac{۳۱}{۳۰}$

۴) $\frac{۳۰}{۳۱}$

$$\log_{bcd}^a = \frac{۱}{\log_a^{bcd}} = \frac{۱}{\log_a^b + \log_a^c + \log_a^d}$$

$\log_a^b = \frac{۱}{۲}$ ، $\log_a^c = \frac{۱}{۳}$ ، $\log_a^d = \frac{۱}{۵}$

$$= \frac{۳۰}{۱۵+۱۰+۶} = \frac{۳۰}{۳۱}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\left(\sqrt{x}\right)^{\left(\mathrm{Log}_{5}^{x}-1\right)}=5$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵

$(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 = 0$

$\log_5 x = -1 \sim x = \frac{1}{5}$

$\log_5 x = 2 \sim x = 25$

$\log_5 (\sqrt{x})^{(\log_5 x - 1)} = \log_5 5 = 1$

$(\log_5 x - 1)\log_5 x^{\frac{1}{2}} = 1 \sim \frac{1}{2}\left((\log_5 x)^2 - \log_5 x\right) = 1$

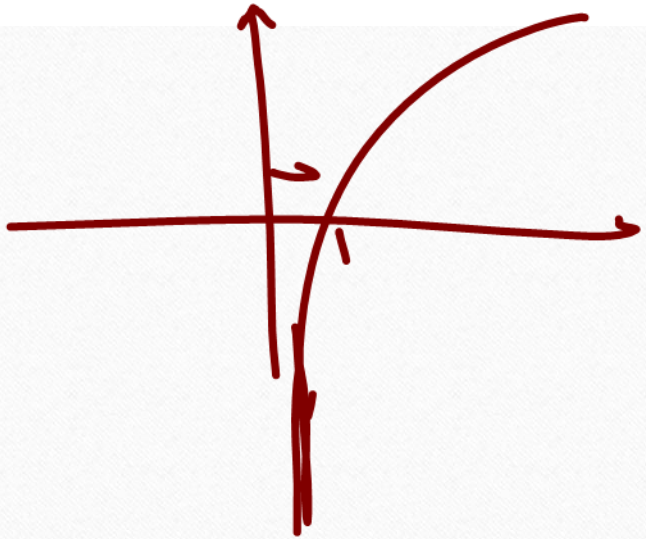
نمودار تابع نمایی به صورت $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$، نمودار تابع $g(x)=x^2-x+6$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۹ قطع می‌کند. حاصل لگاریتم $\log_{32}(16ab+121)$ در پایه ۳۲ کدام است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۷۵

$0 \leq x - [x] < 1$ محدب اکید

برد تابع $f(x) = \text{Log}(x - [x])$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $(-\infty, 0]$ ۲) $(-\infty, 0)$ ۳) $(-\infty, 1)$ ۴) $(0, 1]$



$g(1)=4 \longrightarrow f(1)=4 \longrightarrow 2^{b-9}=2 \longrightarrow b-a=1$

نمودار $f(x)=2+2^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x)=-x^2-3x+8$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(10)=-1$ باشد، مقدار $2b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ✓

۲) ۲

۳) ۳-

۴) ۲-

$f(-1)=10 \longrightarrow b+a=3 \longrightarrow b=2,\ a=1$

$\alpha = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$

توابع $f(x) = \text{Log}(2x-5)$ و $g(x) = x + \sqrt{2x-4}$ را درنظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-1}\text{of}^{-1}(x)$ محور yها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

۱) $4 - \sqrt{2}$ ۲) $4 - \sqrt{3}$ ✓ ۳) $4 + \sqrt{2}$ ۴) $4 + \sqrt{3}$

$g^{-1}of^{-1}(0) = \alpha$

$f^{-1}(0) = U \longrightarrow f(U) = 0 \longrightarrow \log(2U-5) = 0 \rightarrow 2U-5 = 1 \rightarrow U = 3$

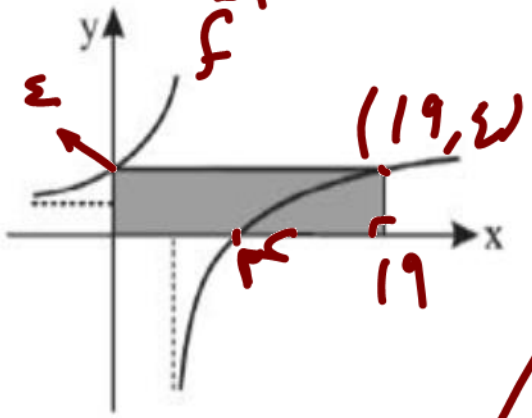
$g^{-1}(3) = A \longrightarrow g(\alpha) = 3 \rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha-4} = 3 \rightarrow \sqrt{2\alpha-4} = 3-\alpha$

$2\alpha - 4 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0 \longrightarrow S = 12$

پویش علمی جهاد

مدرس: دکتر افخمی

نمودار تابع $f(x) = \text{Log}_{۲}^{(x-۳)}$ و وارون آن به صورت زیر است. مساحت مستطیل هاشورخورده چه‌قدر است؟



$\log_{۲}(x-۳) = ۴ \Rightarrow x-۳ = ۱۶ \Rightarrow x = ۱۹$

طول = ۱۹

عرض = ۴

۱) ۸۰ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۶