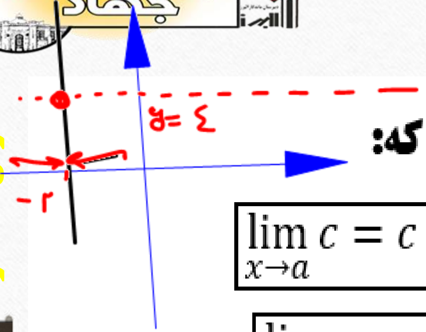
درس ۳: قضایای حد



قضیهٔ ۱) حد توابع ثابت و همانی: از روی نمودار این دو تابع به سادگی می‌توان دریافت که:

الف) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی: $\boxed{\lim_{x\to a} c = c}$

ب) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار a است. یعنی: $\boxed{\lim_{x\to a} x = a}$

مثلاً اگر $f(x) = ۴$ و $g(x) = x$ باشد، داریم:

$\lim_{x\to ۵} g(x) = ۵$; $\lim_{x\to -۲} g(x) = -۲$; $\lim_{x\to \sqrt{۵}} f(x) = ۴$; $\lim_{x\to -۲} f(x) = ۴$

٤

مدرس: دکتر افخمی

قضیهٔ۲) حد توابع چندجمله‌ای:

هر چندجمله‌ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ در هر نقطهٔ دلخواه a حد دارد و مقدار حد آن با مقدار چندجمله‌ای در نقطهٔ a برابر است. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$ و یا:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0}$$

مثلاً اگر $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to 2} p(x) = \lim_{x\to 2}\left(2x^3 - 5x^2 + 3\right) = p(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 3 = 16 - 20 + 3 = -1$$

قضیهٔ۳) حد اعمال روی توابع: اگر دو تابع f و g در نقطهٔ a حد داشته و $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L'$ آن‌گاه:

الف) مجموع این دو تابع در $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + L'}$$

ب) تفاضل این دو تابع در $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - L'}$$

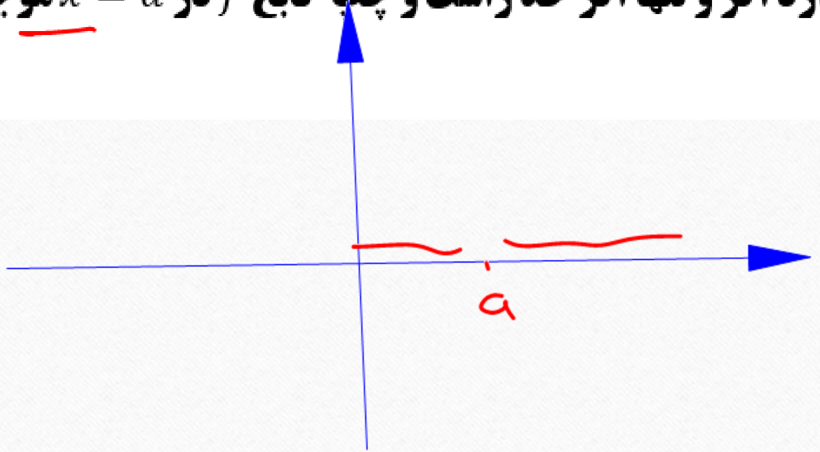
پ) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L \cdot L'}$$

ت) به شرط $L' \neq 0$ ، خارج‌قسمت این دو تابع یعنی $\frac{f}{g}$ در $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{L'}}$$

نکتهٔ مهم: اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a ، تعریف شده باشد، آن گاه با توجه به مفهوم حد راست و چپ می‌توان گفت: «حد تابع f در نقطهٔ $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.»



الف) $\lim_{x\to -1}(3x+1)\overbrace{(x^2-x)}^{2} = -4$

ب) $\lim_{x\to -\frac{5}{3}} \frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)}$

پ) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\overbrace{x^2+4x+4}^{16}}{\underbrace{4x^3-7x+1}_{19}}+x^4\right) = \frac{16}{19}+16$

ت) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{1-x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x^4}\right) = \frac{1-2}{2-4}-\frac{1}{4}$

قضیهٔ۴) حد توابع گنگ: فرض کنید تابع f در نقطهٔ a حد دارد. در این صورت:

زوج

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم: $\lim\limits_{\boxed{x\to a}} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

نامنفی

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(4x^2+6x)} = \sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+6\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1+3} = 2$$

مدرس: دکتر افخمی

نتایج مهم قضایای حد:

اگر c یک عدد حقیقی ، n یک عدد طبیعی ، $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ در این صورت داریم:

درست

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL \qquad ; \qquad \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$$

$$\lim_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n \qquad ; \qquad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = L^{L'}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{c}{f(x)} = \frac{c}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \frac{c}{L} \ ; \ L \neq 0$$

; فرد $n \to \lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

$L \geq 0$ و زوج $n \to \lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

مثال۲) به کمک قضایای اخیر حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)^{10} = 2^{10}$

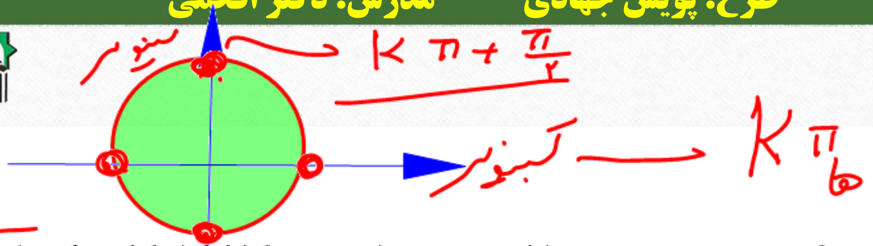
ب) $\lim\limits_{x\to -1}(3x-1)^{(2x+1)} = (-4)^{-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to -2}|3x^2+5x+4|$

ت) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{3x^2-2x+1} = 5$

ث) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[5]{\dfrac{3x^2+1}{x-1}} = \sqrt[5]{\dfrac{4}{-2}} = \sqrt[5]{-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{\dfrac{x+15}{2x^2-1}} = \sqrt[4]{\dfrac{16}{1}} = \sqrt[4]{16} = 2$



حد توابع مثلثاتی:

چون رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس بودن برداشتن دست از روی کاغذ امکان‌پذیر است. پس داریم:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

به کمک قضایای حد می‌توان ثابت کرد:

$$\lim_{x\to a}\tan x=\tan a\ ;\ a\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to a}\cot x=\cot a\ ;\ a\neq k\pi$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$　　$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

مثال۳) با توجه به قضایای اخیر، حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(4\cancel{\sin x}^{\frac{1}{2}} - \cancel{\cot^2 x}^{3}\right) = -1$

ب) $\lim\limits_{x\to-\pi}\left(\frac{\pi\,\cancel{\cos x}^{-1}}{\cancel{x}_{-\pi}} + \cancel{\tan^2 x}_{0}\right) = 1$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cancel{\sin^2 x}^{\frac{3}{4}} + 2\cancel{\cos x}^{\frac{1}{2}}}{2\cancel{\sin^2 x}_{\frac{3}{4}} - \cancel{\cos x}_{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{\frac{3}{4}+1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{1}$$

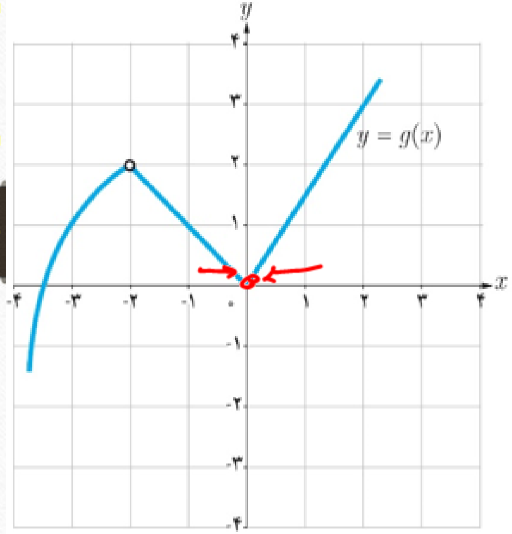
ت) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin^2\left(\cancel{x-\frac{\pi}{6}}\right) - \cancel{\cos 2x}^{-1} + \cancel{\sin^2\frac{x}{2}}^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2\cancel{\tan\frac{x}{2}}_{1} + \cancel{\cot^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{3}}}$

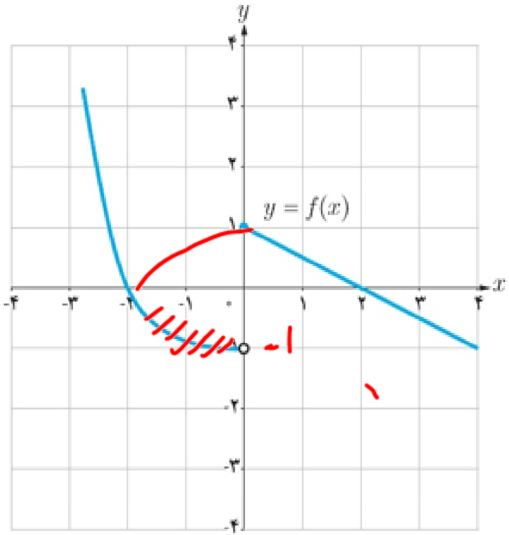
$\frac{3}{4}$

$$= \frac{\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}}{\frac{7}{3}} = \frac{9}{7}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

مثال۴) در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim_{x\to -2}(2\cancel{g(x)} - \cancel{f(x)})$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$

پ) $\lim_{x\to -3} -3\sqrt{g(x)}$

ت) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8g(x)} = \sqrt[3]{8} = 2$

ث) $\lim_{x\to 0}|f(x)|$

ج) $\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{f(x)}+1}{\cancel{g(x)}+2} = \frac{1}{4}$

مدرس: دکتر افخمی

مثال۵) نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

حل: طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} L \to \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$$

بله عکس این مطلب نیز برقرار است. زیرا:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+L)=\lim_{x\to a}(f(x)-L)+\lim_{x\to a} L=0+L=L$$

درسنامه - بازش

مثال۷) تابع g را به‌گونه‌ای بسازید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^۲-۱}=۴$

حل: طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^۲-۱}=۴\to\frac{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۱)}=۴\to\frac{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)}{۳}=۴\to\lim_{x\to ۲}g(x)=۱۲$$

بدیهی است که برای تابع g بی‌شمار ضابطه به‌دست می‌آید. یعنی کلیهٔ توابعی که حد آن‌ها در $x=۲$ برابر ۱۲ باشد.

$g(x)=۱۲$

تعدادی از این توابع به صورت زیر می‌باشند:

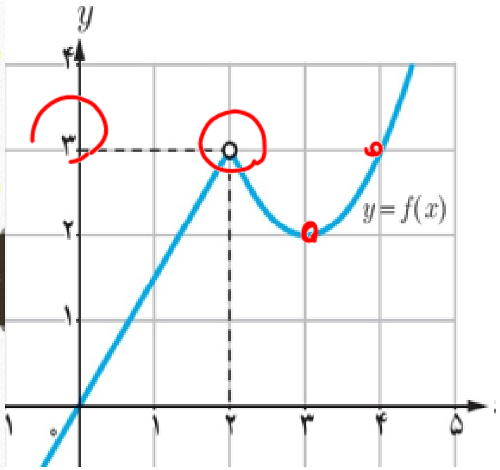
$$g(x)=۶x\ ,\quad g(x)=x+۱۰\ ,\quad g(x)=۴x+۴\ ,\quad g(x)=۳x^۲\ ,\quad g(x)=\frac{۵x+۲}{۳-x}\ ,\ \ldots$$

مثال۸) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد. حاصل حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}(f(x)+\underbrace{۲x}_{۶})$ $= ۸$

ب) $\underbrace{\lim\limits_{x\to ۲} xf(x)}_{۶}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲x+۱}{f(x)}$ $= \dfrac{۹}{۳} = ۳$



توابعی که در آنها لازم است حدود راست و چپ را جداگانه محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم:

در بیشتر توابع برای محاسبه $\lim_{x\to a} f(x)$ با جایگذاری $x = a$ ، حد تابع به دست می‌آید. اما توابعی هستند که لازم است جایگذاری‌های $x = a^+$ و $x = a^-$ برای محاسبه حد آنها انجام شود، که این توابع شامل چهار دسته هستند، سه دستهٔ آن‌ها در این کتاب و دستهٔ چهارم در کتاب سال آینده بررسی خواهند شد.

دستهٔ اول: توابعی که چند ضابطه‌ای بوده و x به سمت نقطه شکستگی جهت‌دار دامنهٔ آنها میل می‌کند.

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{} & x \geq a \\ \boxed{} & x < a \end{cases} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

مثال۹) مقدار حد توابع $f(x)=\begin{cases}5x+1; & x<1\\ 4-x^2; & x>1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}3x-1; & x\neq 1\\ 2x+1; & x=1\end{cases}$ را در $x=1$ در صورت وجود بیابید.

حل:

$\lim_{x\to1^+} f(x)=3$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=6$

حد سمت راست و حد سمت چپ در این نقطه برابر نیستند، این یعنی تابع در $x=1$ حد ندارد.

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(3x-1)=2$

$f(1)=3$

$x=1$ در تابع [illegible]

مثال۱۰) پارامتر a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-۲a\ ; x\geq -۱\\ x^۲+ax\ ; x<-۱\end{cases}$ در $x=-۱$ دارای حد باشد.

حل:

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} f(x)$

$-۳-۲a = ۱-a \longrightarrow a=-۴$

مثال۱۱) مقدار حد تابع $f(x)=\begin{cases} ۴\sin ۲x+۱\,;\, x>\frac{\pi}{۱۲} \\ ۴\tan ۳x-۱\,;\, x<\frac{\pi}{۱۲}\end{cases}$ را در $x=\frac{\pi}{۱۲}$ در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۱۲})^+} f(x) = ۴\sin ۲(\frac{\pi}{۱۲})+۱ = ۳$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۱۲})^-} f(x) = ۴\tan(\frac{\pi}{۴})-۱ = ۳$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۱۲}} f(x) = ۳$$

مثال۱۲) پارامتر a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} a\cos ۲x+۱ \,; x>۰ \\ \sin ۳x-۳a \,; x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ دارای حد باشد.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = a\cos ۰ + ۱ = a+۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \cancel{\sin ۰} - ۳a = -۳a$$

$$\longrightarrow a+۱=-۳a \longrightarrow ۴a=-۱ \longrightarrow \boxed{a=-\frac{۱}{۴}}$$

دستهٔ دوم: توابع کسری که شامل قدرمطلق بوده و با میل x به سمت ریشهٔ قدرمطلق و جایگذاری آن عدد در تابع، صورت و مخرج هر دو صفر شوند. (به شرطی که فقط ریشهٔ قدرمطلق صورت یا مخرج باشد).

مثال۱۳) حد توابع $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$ و $g(x)=\frac{|x-1|}{2x+1}$ را در $x=1$ در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{-(\cancel{x-1})}=-1$$

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{0}{3}=0$$

$|ab|=|a||b|$

مثال۱۴) حد توابع $f(x)=\dfrac{|x+۲|}{x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{|x+۲|}{|x^۲-۴|}$ را در $x=-۲$ در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)}\frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}=1$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{-\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}=-1$$

$$\lim_{x\to(-2)} g(x)=\lim_{x\to(-2)}\frac{\cancel{|x+2|}}{|x-2|\cancel{|x+2|}}=\frac{1}{4}$$

حد توابع به فرم کلی $y=[f(x)]$

دستهٔ سوم: حد توابعی که شامل جزءصحیح می باشند

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ ابتدا حاصل حد عبارت داخل براکت یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، در این صورت حالات زیر را داریم:

حالت اول) اگر این حد موجود نباشد، حاصل $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ ممکن است موجود باشد. مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases} 1/2 \; ; x>0 \\ 1/7 \; ; x<0 \end{cases}$

درنقطهٔ $x=0$ حد ندارد اما تابع $y=[f(x)]=1$ در این نقطه حد دارد.

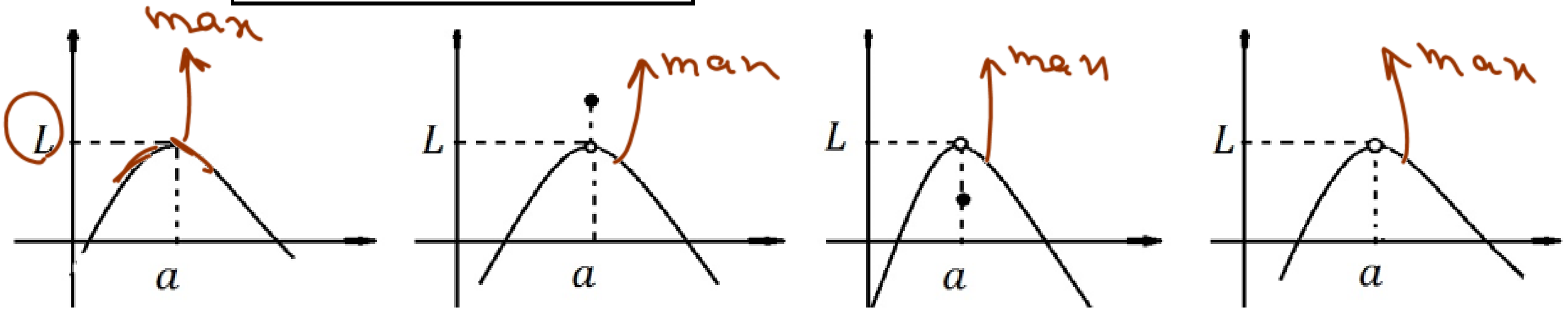
حالت دوم) اگر این حد موجود بوده و برابر عددی ناصحیح باشد. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\notin Z$ در این صورت حاصل $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ موجود بوده وداریم: $\lim\limits_{x\to a} y=\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]=[L]$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}[x^{۲}] = \left[\frac{۱}{۴}\right] = ۰$$

$$\lim_{x\to ۴}\left[\frac{۳x-۱}{x+۲}\right] = \left[\frac{۳(۴)-۱}{۴+۲}\right] = \left[\frac{۱۱}{۶}\right] = ۱$$

حالت سوم) اگر این حد موجود بوده و برابر عددی صحیح باشد. یعنی: $\lim_{x\to a} f(x) = L \in Z$ در این صورت باز سه حالت داریم:

الف) اگر نمودار تابع در یک همسایگی (یا همسایگی محذوف) نقطهٔ $x = a$ به یکی از صورت‌های زیر باشد (حالتی شبیه ماکزیمم و نه لزوماً ماکزیمم)، این حد موجود بوده و داریم: $\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)] = [L^-] = L - 1}$

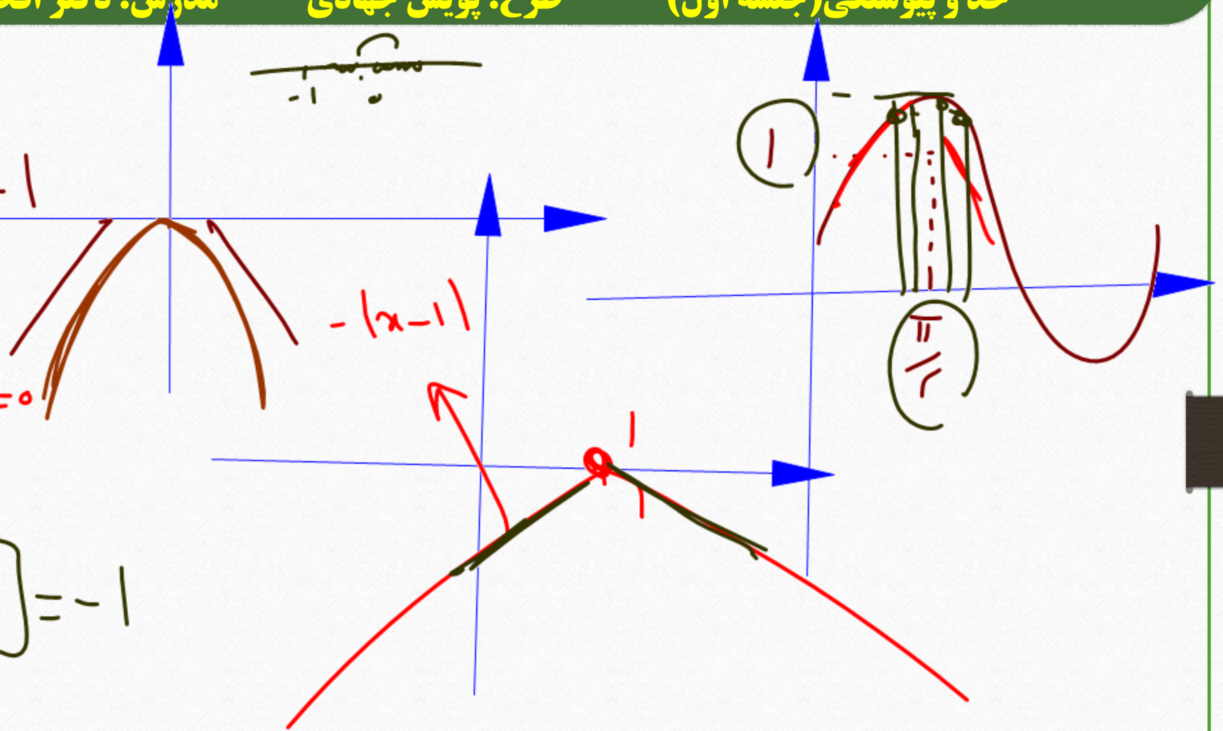


مدرس: دکتر افخمی

$$\lim_{x\to 0}[-x^{2}] = [0^{-}] = -1$$

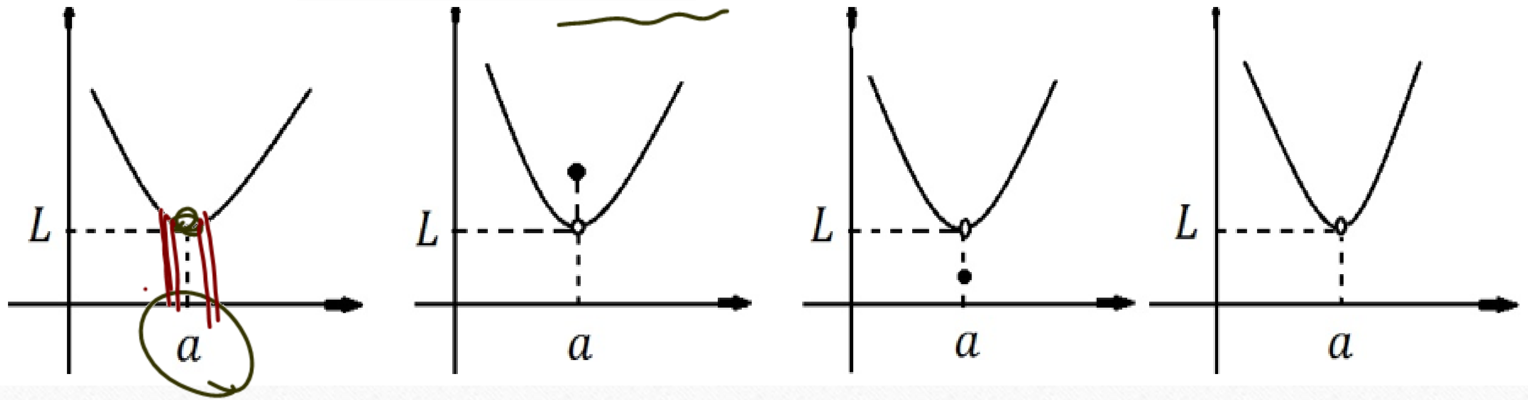
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[\sin x] \to [1^{-}] = 0$$

$$\lim_{x\to 1}[-|x-1|] \to [0^{-}] = -1$$



مدرس: دکتر افخمی

ب) اگر نمودار تابع در یک همسایگی (یا همسایگی محذوف) نقطهٔ $x = a$ به یکی از صورت‌های زیر باشد (حالتی شبیه می‌نیمم و نه لزوماً می‌نیمم)، این حد موجود بوده و داریم: $\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)] = [L^+] = L}$

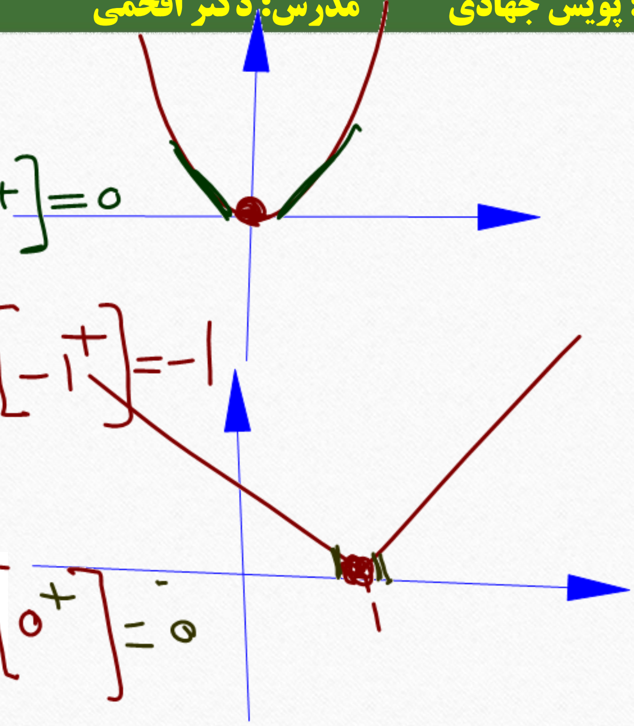


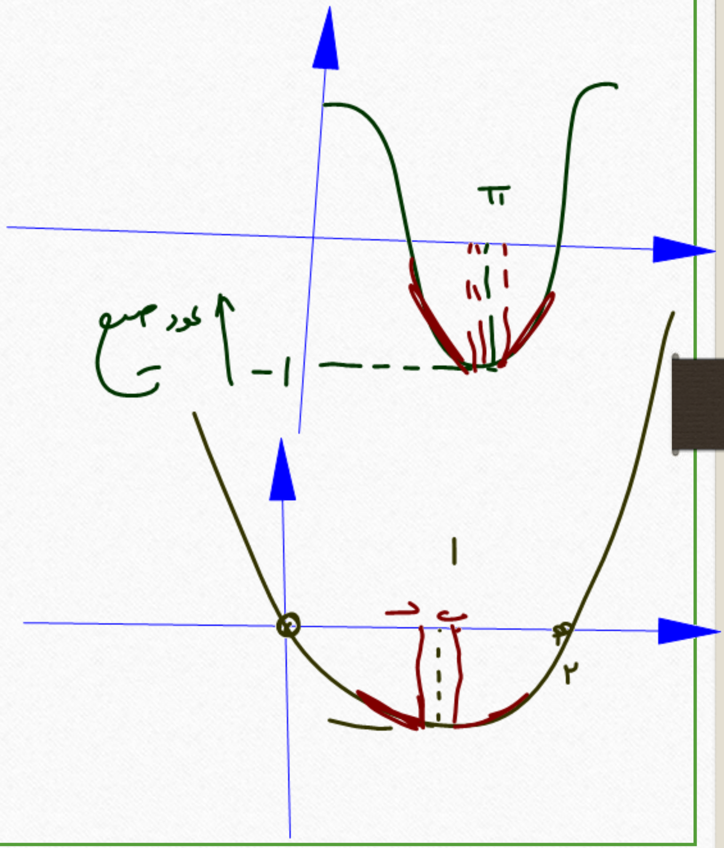
$\lim\limits_{x\to 0}[x^2] \to [0^+] = 0$

$\lim\limits_{x\to \pi}[\cos x] \to [-1^+] = -1$

$\lim\limits_{x\to 1}[|x-1|] \to [0^+] = 0$

$\lim\limits_{x\to 1}[x^2-2x] = [-1^+] = -1$





$$\lim_{x\to ۱}[۲x] =$$

$$\lim_{x\to ۱^+} = [۲(۱,۱)] = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} = [۲(۰,۹)] = ۱$$

$$\lim_{x\to -۱}[-x] =$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+}[-x] = [-(-۰,۹)] = ۰$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-}[-x] = [-(-۱,۱)] = ۱$$

$$\lim_{x\to ۲}[x^۲] =$$

$x\to ۲^+$: $[(۲,۱)^۲] = ۴$

$x\to (۲)^-$: $[(۱,۹۸)^۲] = [۳,...] = ۳$

$$\lim_{x\to -۵}[-۲x+۳] =$$

$x\to (-۵)^+$: $[+۹,۸] + ۳ = ۱۲$

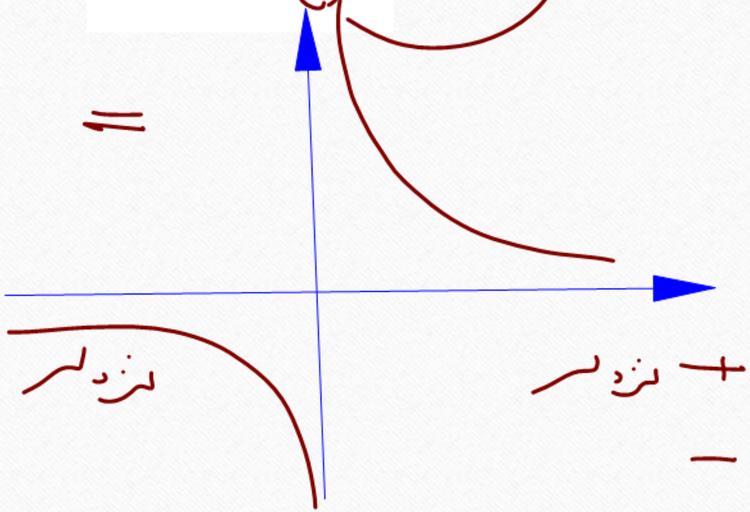
$x\to (-۵)^-$: $[۱۰,۲] + ۳ = ۱۳$

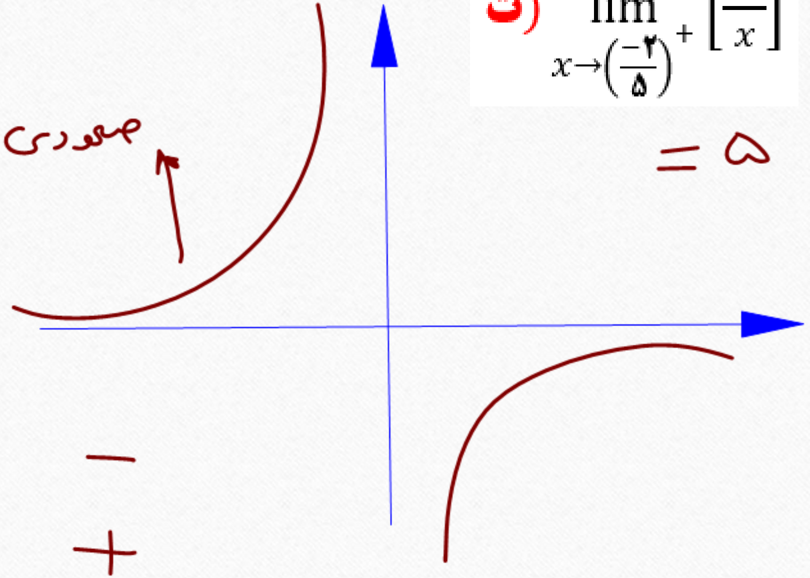
پ) $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{3})^{-}} \left[\frac{1}{x}\right] = \left[3^{+}\right] = 3$

$\frac{1}{\frac{1}{3}}$

ت) $\lim\limits_{x\to(\frac{-2}{5})^{+}} \left[\frac{-2}{x}\right] = 5$

5^{+}





مثال۱۷) مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = a[x-1] + [-x+2]$ در $x = 3$ دارای حد باشد.

$$f(x) = a[x] - a + [-x] + 2$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = a\overset{3}{[\cancel{3^+}]} - a + \underset{-4}{[\cancel{-3^+}]} + 2 = 3a - a - 2 = 2a - 2$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = a\overset{2}{[\cancel{3^-}]} - a + \overset{-3}{[\cancel{-3^-}]} + 2 = a - 1$$

$$a - 1 = 2a - 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$[+0/9]$

مثال۱۸) مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+[x]}{|x|} & ; x < -1 \\ x[-x]+b & ; x > -1 \end{cases}$ در $x = -1$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} f(x)$$

$$(-1)[\bar{1}]+b = \frac{1+(-2)}{1} \rightarrow b = -1$$

مثال۲۰) تابع $f(x) = \left[\frac{2x}{3}\right]$ در بازهٔ $(-۲,۴)$ در چند نقطه حد ندارد؟ آن نقاط را بیابید.

عدد صحیح

$$\frac{2x}{3} = k$$

$$x = \frac{3}{2}k$$

$\frac{3}{2}$ مضارب

$-2 \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 3 \quad 4 \quad \cancel{\frac{9}{2}}$

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) \qquad \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$$

پویش علمی جهاد

محمد حسین

درس ۴: محاسبهٔ حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

مقدمه: در درس قبل به کمک قضایای حد، توانستیم حد یک تابع در $x = a$ را با جایگذاری در صورت وجود محاسبه کنیم (بجز در سه حالت خاص که لازم بود حدود راست و چپ را جداگانه محاسبه و با هم مقایسه کنیم. البته در آن چهار حالت نیز جایگذاریهای $x = a^+$ و $x = a^-$ را انجام می‌دهیم). اما گاهی به حدودی برمی‌خوریم که با این جایگذاری‌ها ممکن است به وضعیتی به صورت $\frac{0}{0}$ برسیم که اصطلاحاً آن‌ها را یک حالت مبهم می‌گوییم. عمل رسیدن به مقدار واقعی حد تابع را عمل رفع ابهام گوییم.

$\frac{0}{0}$

$x=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+6)}=\frac{0}{0}\qquad\frac{4}{8}$$

مدرس: دکتر افخمی

مثال۱) حاصل حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{x^{2}-4}{x-2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=4$$

مدرس: دکتر افخمی

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲ - ۴x + ۴}{x^۲ - ۴} = \dfrac{۰}{۰} \to \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{(x-۲)^{\cancel{۲}}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} = \dfrac{۰}{۴} = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲ - ۹}{x^۲ - ۳x} = \dfrac{۰}{۰} \to \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{x\cancel{(x-۳)}} = \dfrac{۶}{۳} = ۲$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim\frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}}=\frac{-3}{-3}=1$$

$x \to -1$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

ج) $$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}=\frac{0}{0}$$

$$\lim\frac{\overbrace{\sqrt{x+2}}^{a}\;\overbrace{-2}^{b}}{(x-2)(x+2)}\times\frac{\overbrace{\sqrt{x+2}}^{a}\;\overbrace{+2}^{b}}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\lim\frac{\cancel{x+2-4}}{\cancel{(x-2)}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$x\to 2$

$$=\frac{1}{4(4)}=\frac{1}{16}$$

$3(x-3)$

چ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim \frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{3x-5}+2\right)}{\left(\sqrt{3x-5}-2\right)\left(\sqrt{3x-5}+2\right)} = \lim \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)\left(\sqrt{3x-5}+2\right)}{3\,\cancel{3x-5-4}}$$

$x \to 3$

$x \to 3$

$$\frac{6(4)}{3} = 8$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

خ) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt[3]{x}+1)}{x+1} =$

$$\lim \frac{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)(x+1)} = \lim \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$x \longrightarrow -1$

$x \longrightarrow (-1)$

$$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

د) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x^2-2x} =$

$$\frac{\sqrt[3]{8}-2}{4-4}=\frac{0}{0} \rightsquigarrow$$

مبهم

$4x-8$

$$\lim \frac{(\sqrt[3]{4x}-2)(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4)}{x(x-2)(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt[3]{16x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4)} = \frac{4}{2(4+4+4)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

ذ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{\sqrt{1+x}}^{a}-\overbrace{\sqrt{1-x}}^{b}}{x^2+x} \times \dfrac{\overbrace{\sqrt{1+x}}^{a}+\overbrace{\sqrt{1-x}}^{b}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$$= \lim \frac{\overbrace{\cancel{1+x-(1-x)}}^{2}}{\cancel{x}(x+1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{1(1+1)} = 1$$

$x \longrightarrow 0$

ز) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$

$\rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}} = \sqrt{1} = 1$

س) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x}-1} \times \dfrac{(2x+\sqrt{x+3})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(2x+\sqrt{x+3})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(4x^2-x-3)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(2x+\sqrt{x+3})} = \frac{7(3)}{4} = \frac{21}{4}$$

$(4x^2-x-3) = \cancel{(x-1)}(4x+3)$

چاق رلا نحر

چ) $\lim\limits_{x\to -۸} \dfrac{\boxed{۲+\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt{۱-x}-۳} = \dfrac{0}{0} \times \dfrac{\boxed{(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}}{(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})} \times \dfrac{\sqrt{۱-x}+۳}{\sqrt{۱-x}+۳}$

قرزوج

$$= \lim \frac{(۸+x)(\sqrt{۱-x}+۳)}{(\underbrace{\cancel{۱-x-۹}}_{-۱})(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})} = \frac{۶}{-(۴+۴+۴)} = -\frac{۶}{۱۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$x \to -۸$

$(\sqrt{x})^2-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$

ش) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\dfrac{0}{0}\rightsquigarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2\sqrt{x}-1)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

مدرس: دکتر افخمی

مثال۳) مقدار حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x} = \dfrac{0}{0}$

$\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$: $-\ |\ +$

$-\frac{1}{3}$: $-\ |\ +$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x\cancel{+1}-3x\cancel{-1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x}{x} = -6$$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{|x^۲ - x - ۲|}{x^۳ - ۸} = \dfrac{0}{0}$

$x^۲ - x - ۲ = ۰$

جمع ضرب

$(x-۲)(x+۱)=۰$

$-۱ \quad ۲$

$+ \quad - \quad +$

$= \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-\cancel{(x-۲)}(x+۱)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)} = \dfrac{-۳}{۱۲} = -\dfrac{۱}{۴}$

پویش جهادی علمی

پ) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4-[x^2]}{x^2-4} = \dfrac{4-[4^+]}{0} = 0$

صفر مطلق

صفر حدی - یک عدد بسیار بسیار نزدیک صفر

ث) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x-(-1)}{-2x-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

ج) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(3-\overset{2}{\cancel{[x]}})\cancel{\sqrt{x^2-6x+9}}}{x-3}$ $|x-3|$

$x^2-6x+9=(x-3)^2$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)} = -1$$

چ) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2[x]-27}{x[x]-9}$ ✓

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2[x]-27}{x[x]-9} = \lim_{x\to 3} \frac{3(x^2-9)}{3(x-3)} = \frac{3(6)}{3} = 6$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2[x]-27}{x[x]-9} = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-27}{2x-9} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$\Leftarrow$ صورت سوال در $x=3$ وجود ندارد.

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲\cancel{[x]}^{۲} - ۸}{|x^۲ - x - ۲|} =$$

$$(x-۲)(x+۱)=۰$$

-۱		۲	
+		-	+

$$\lim \frac{۲x^۲-۸}{(x+۱)(x-۲)}$$

$$x \longrightarrow ۲$$

$$=\lim \frac{۲\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{(x+۱)\cancel{(x-۲)}} = \frac{۸}{۳}$$

$$x \longrightarrow ۲$$

$1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$

حالت دوم رفع ابهام $\frac{0}{0}$

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cdot}{\cdot}$ و حداقل یکی از دو تابع صورت یا مخرج مثلثاتی باشند، برای رفع ابهام وضعیت‌های زیر را داریم:

الف) اگر بتوانیم به کمک روابط مثلثاتی تابع را ساده کنیم، ابتدا تابع را ساده کرده سپس حد آن را به دست می‌آوریم.

مثال۴) مقدار حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \cdot}\frac{\sin^{۲} x}{۱-\cos^{۳} x} = \frac{0}{0} \longrightarrow \lim \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x+\cos^2 x)} = \frac{۲}{۳}$

$x \longrightarrow 0$

$\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \cos\frac{\pi}{2}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$

$= \lim \frac{(1-\sin^2 x)}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{0}{2} = 0$

$x \to \frac{\pi}{2}$

$\sin\pi = 0 \quad \cos\pi = -1$

پ) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin^2 \pi x}{1+\cos^3 \pi x} = \frac{0}{0}$

$\lim \frac{(1-\cos\pi x)(1+\cos\pi x)}{(1+\cos\pi x)(1-\cos\pi x+\cos^2\pi x)}$

$x \to 1$

$= \frac{0}{2+1} = 0$

$x<\pi \longrightarrow \frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$

چ) $\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$

سوال مخصوص دانش آموزان رشته ریاضی

$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

مثبت

$$=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} U = 0 \longrightarrow \lim_{x \to 0} \sin U = \lim_{U \to 0} U$$

مثال۵) مقدار حدهای زیر را بیابید.

این داستان برای form همه صادق است.

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{10x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{8\cancel{x}}{10\cancel{x}} = \frac{4}{5}$$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|1-\cos x|} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|2\sin^2\frac{x}{2}|} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{2\left(\cancel{\frac{x^2}{4}}\right)} = 2$$

ت) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\cancel{\sin^2 x}^{\,x^2}}{x^2} = 2$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۳\tan^۵ ۲x}{۷x^۴ \sin ۳x} = \lim \dfrac{۳(۲x)^۵}{۷x^۴(۳x)} = \lim \dfrac{۹۶x^۵}{۲۱x^۵} = \dfrac{۹۶}{۲۱}$

$x \to ۰$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin^{۲}\left(\dfrac{۳x}{۲}\right)}{۲x^۲} = \lim \dfrac{\frac{۹\cancel{x^۲}}{۴}}{۲\cancel{x^۲}} = \dfrac{۹}{۸}$

چ) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱ - \cos x}{x^۲}$

$$1 - \cos x = ۲ \sin^۲ \frac{x}{۲}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{۲ \sin^۲ \frac{x}{۲}}{x^۲}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{۲ \left(\cancel{\frac{x}{۲}}\right)^۲}{\cancel{x^۲}} = \frac{۱}{۲}$$

مدرس: دکتر افخمی

خ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲ - ۲\cos ۲x}{x \sin x}$

$1-\cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(2\sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 4$$

س) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{\sqrt{2(2\sin^2 x)}} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|\sin x|}$

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1$

$x \to .$ $\quad \sin u \quad$ یا $\quad \tan u$

پ) اگر تابع داده شده ساده نشده و زاویهٔ مسئله (u) به سمت صفر میل نکند، می‌توان به کمک تغییر متغیر $x - a = t$ رفع ابهام را انجام داد، زیرا اگر $x \to a$ طبق تساوی $x - a = t$ داریم: $t \to 0$ و $x = a + t$. دقت کنید در این حالت رفع ابهام را در واقع به حالت قبلی تبدیل می‌کنیم.

نکته: در بعضی از این مسائل می‌توان فقط با روابط مثلثاتی رفع ابهام را انجام داد.

$x \to a \longrightarrow x - a = t \to 0$

$\cos(-\pi) = \cos\pi = -1$

$\cos(\pi - t) = -\cos t$

ربع دوم

مثال۶) مقدار حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \frac{-1+1}{0}$ مبهم

$x - (-\pi) = t \to 0$

$x + \pi = t \to 0$

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos(t-\pi)+1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{2t^2/4}{t} = 0$

ب) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}=\dfrac{0}{0}$

$x-\pi=t \longrightarrow 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3(\pi+t)}{\tan 2(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3\pi+3t)}{\tan(2\pi+2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{\tan 2t}=-\frac{3}{2}$$

ت) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cot 3x}{6x-\pi}$

ج) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin ۲x - ۱}{۴x - \pi} =$

درس۵: پیوستگی

مقدمه: در درس اول دیدیم که برای آنکه حد یک تابع در $x = a$ موجود باشد، لزومی ندارد که تابع در خود این نقطه تعریف شده و اگر هم تعریف شده باشد نیازی نیست که حد تابع در این نقطه با مقدارش برابر باشد. در این درس وضعیتی را بررسی می‌کنیم که نه تنها تابع در این نقطه تعریف شده است، بلکه حدش در این نقطه با مقدارش برابر است. این وضعیت را پیوستگی گوییم. از دید شهودی، یک تابع را پیوسته گوییم اگر نمودار آن، فاقد هر گونه حفره، پرش یا جهش باشد یعنی به هنگام رسم آن، دستمان را از روی کاغذ برنداریم. مانند توابع چندجمله‌ای، توابع سینوس و کسینوس، توابع نمایی و لگاریتمی و ...، اما بعضی از توابع کسری، چندضابطه‌ای، براکتی و ... ممکن است این ویژگی را نداشته باشند.

تعریف پیوستگی:

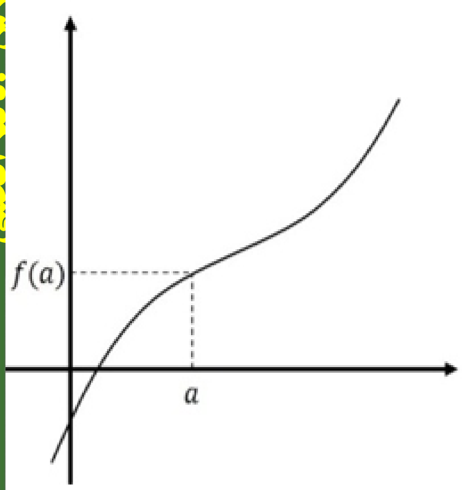
می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد.

بنابر این، برای پیوسته بودن تابع f در نقطهٔ a، باید سه شرط زیر برقرار باشند:

الف) تابع f در نقطهٔ a تعریف شده باشد.

ب) حد تابع f در a، موجود باشد.

ج) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.



نکته: هنگامی که تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته نیست، گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است و این زمانی است که اقلاً یکی از سه شرط اخیر برقرار نباشد.

مثال۱) پیوستگی توابع زیر را در $x=0$ بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2-x}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x^2-x} & ;x\neq 0\\ 4 & ;x=0\end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}+|x|}{x^{2}-2|x|} & ; x\neq 0\\[2ex] \dfrac{-1}{2} & ; x=0\end{cases}$

مثال۲) با توجه به اطلاعات داده شده، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید:

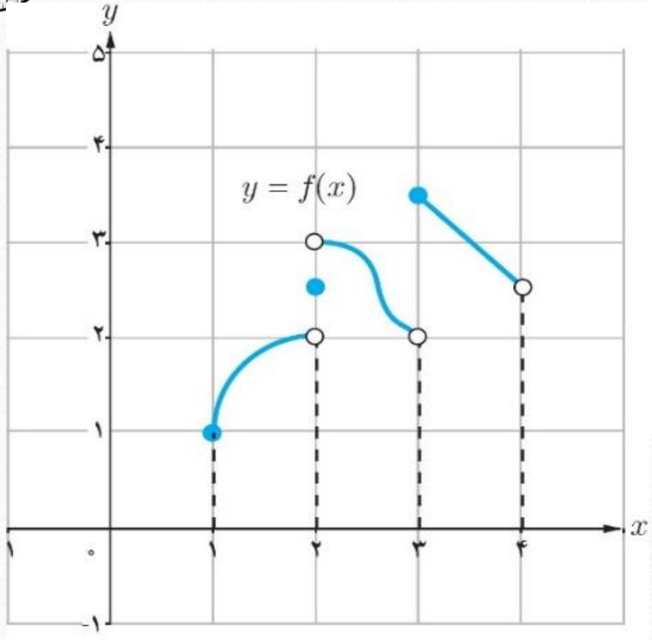
۱) نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x = ۳$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x = ۳$ پیوسته نیست).

۲) نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطهٔ a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

۴) نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دونقطه.

مثال۳) مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}+x-۲}{x-۱} & ; x\neq ۱\\ a & ; x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد.



مثال۴) نمودار تابع f به صورت روبرو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعهٔ $\{۴ , ۳ , ۲/۵ , ۲ , ۱\}$ ناپیوسته است.

ب) آیا تساوی $\lim_{x \to ۳^+} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟

پ) آیا تساوی $\lim_{x \to ۳^-} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟

پیوستگی راست و چپ:

در بعضی از توابع ممکن است مقدار تابع فقط با حد راست و یا حد چپ تابع برابر باشد در این صورت داریم:

تعریف:

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هر گاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هر گاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

بنابر این هرگاه تابع f در یک همسایگی (دو طرفهٔ) a تعریف شده باشد:

تابع f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از رست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال۵) پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.کدامیک از راست یا چپ پیوسته است؟

الف) $f(x) = \begin{cases} |x+۳| & ; \quad x \neq -۳ \\ ۲ & ; \quad x = -۳ \end{cases} \quad , x = -۳$

ب) $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۳ & ; \quad x \geq ۱ \\ x^۲ & ; \quad x < ۱ \end{cases} , x = ۱$

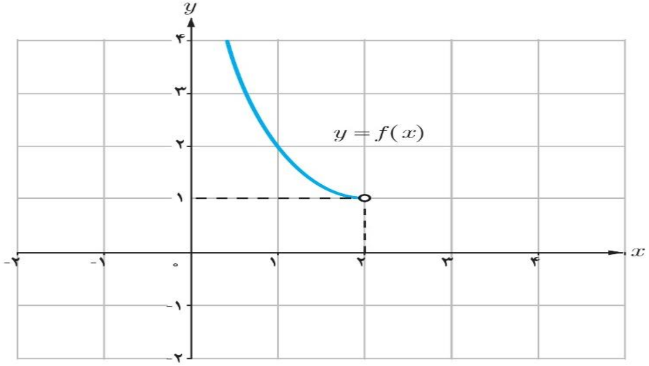
ت) $f(x) = [\cos x]\ , x = \pi$

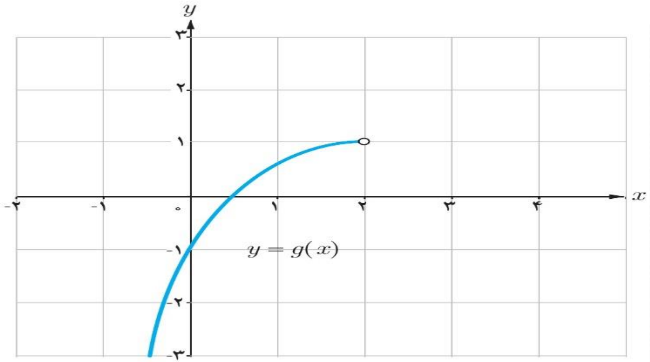
پ) $f(x) = [\sin x]\ , x = \pi$

مثال۷) در شکل زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطهٔ ۲ رسم شده‌اند. در نقطهٔ ۲ = x و در طرف راست نقطهٔ ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

الف) تابع f در نقطهٔ ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

ب) تابع g در نقطهٔ ۲ پیوسته باشد.





مثال۸) با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کرده و بگویید که تابع در این نقاط پیوستگی راست دارد یا چپ و یا هیچکدام.

الف) $y = |x - ۱| + ۲$ ب) $y = x - [x]$

پ) $y = [x] + [-x]$

ت) $y = \begin{cases} x(x-۱) & ; x \leq ۱ \\ -x+۲ & ; x > ۱ \end{cases}$

مدرس: دکتر افخمی

مثال۹) در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ \;; x < ۱ \\ a \qquad ; x = ۱ \\ -x + ۲ \;; x > ۱ \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} [-x] + ۲ \;; x \le ۱ \\ \dfrac{a|x^۲ - ۱|}{x - ۱} \;; x > ۱ \end{cases}$