

تابع مقدماتی و مرکب

استاد اشرفی

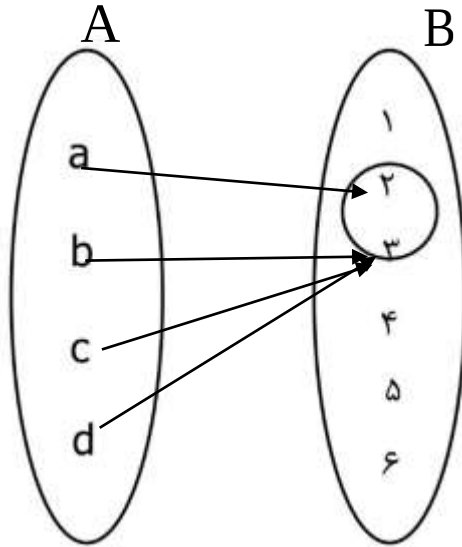
www.mathtest.ir



تعریف تابع:

یک تابع از مجموعه A

به مجموعه B رابطه ای بین دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود. به مجموعه A دامنه و به مجموعه B هم دامنه می گوئیم.



نکته:



از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک فلش خارج می شود.

نکته:



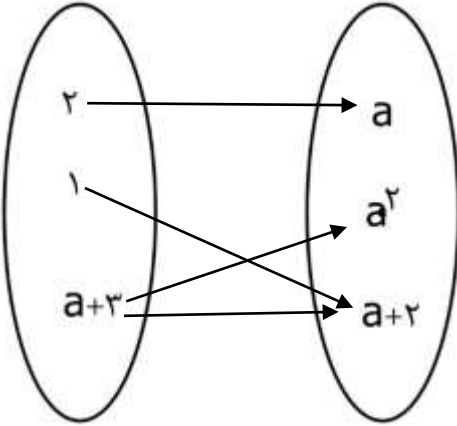
تعداد اعضای مجموعه برد با تعداد اعضای مجموعه دامنه برابر یا از آن کوچکتر است.



تست



۱- با توجه به نمودار پیکانی زیر، رابطه F تابع است. a کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) -۲

نکته:



مجموعه ای از زوج های مرتب تابع است که هیچ دو ایکس یکسانی نداشته باشد یا اگر داشت y های آنها یکسان شوند.

۲- رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m

یک تابع است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) صفر



تابع و رابطه به زبان فارسی:

در این گونه تست ها عبارتی بعد از «به» قرار می گیرد X و عبارتی دیگر Y فرض می شود.
در صورت عدم وجود «به» اولین عبارت را X و عبارت دوم را Y فرض می کنیم. اگر به ازای یک X چند Y وجود داشته باشد آن رابطه تابع نیست.

تست



۳- چه تعداد از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(الف) رابطه ای که به هر داوطلب، درصد کسب شده توسط وی را در یک آزمون خاص در درس ریاضی نسبت می دهد.

(ب) رابطه ای که به هر فرد ایرانی، کدملی وی را نسبت می دهد.

(پ) رابطه ای که به فرد، شماره های تلفن همراه او را نسبت می دهد.

(ت) رابطه ای که به هر سبک موسیقی، طرفداران وی را نسبت می دهد.

۴ (۴)

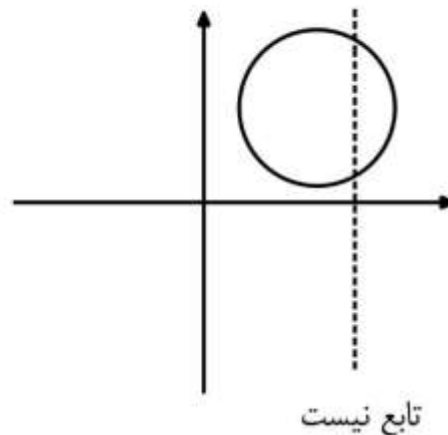
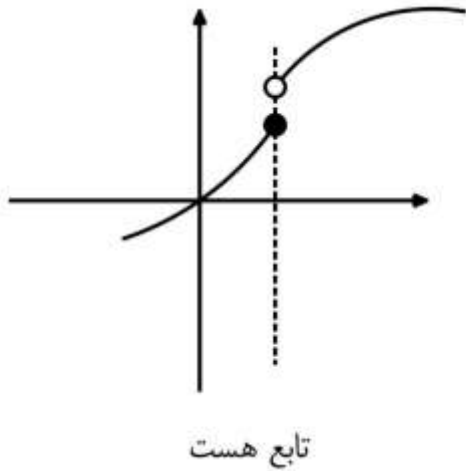
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

نمودار تابع:

هر خط عمودی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند، یعنی یا قطع نمی کند یا فقط در یک نقطه قطع می کند.



ضابطه تابع:

ضابطه یک رابطه، فرمول بین x و y آن است و اگر y آن ها توان زوج، قدر مطلق، براکت، $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$ ، $\cot$ بگیرد معمولاً تابع نیستند.

برای نمونه $|y| = x + 1$ یا $y^2 = x + 1$ یا $[y] = x + 1$ و $\sin = x + 1$ هیچ کدام ضابطه یک تابع نیستند.
در حالیکه تابع $y^2 = -x^2$ علی رغم این که y توان زوج دارد ولی چون $x^2 + y^2 = 0$ است x و y فقط صفر هستند.
 $f = \{(0, 0)\}$ این رابطه یک تابع است.



۴- در کدام یک از گزینه های زیر رابطه برقرار شده تابع نیست؟

$$(1) \quad y = \sqrt{x-3} \pm \sqrt{3-x}$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$$

$$(3) \quad (x+1)^2 + |y-4| = 0$$

$$(4) \quad \cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

نکته: اگر شرط های رابطه چند ضابطه ای اشتراک نداشته باشند به شرط تابع بودن هر ضابطه، تابع است.



اگر اشتراک یک نقطه باشد باید عرض ضابطه ها با هم برابر باشند که رابطه قابله تابع باشد.

۵- اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} a - \sqrt{x+7} & x \geq 2 \\ |x-3| - 2 & x \leq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، حاصل $f(9)$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

۱) -۱

۲) -۲

۳) -۳

۴) -۴



انواع تابع ها:

تابع ثابت: تابع $f(x) = c$ را تابع ثابت می نامیم.

تابع همانی: تابع $f(x) = x$ را تابع همانی می نامیم.

تابع خطی: تابع $f(x) = ax + b$ را تابع خطی می نامیم.

۶- نمودار تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(0, 2)$, $(-1, -1)$ می گذرد. حاصل $f(1)^2 - 4f(2)$ کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

۱۷ (۱)

۲۱ (۲)

-۷ (۳)

-۲۷ (۴)

۷- اگر دامنه تابع $f(x) = 2x - 1$ ، بازه $[3, +\infty)$ و دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$ بازه $(-\infty, 3]$ باشد،

اجتماع برد توابع f, g کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$\mathbb{Z}$ (۱)

$\mathbb{R}$ (۲)

$\mathbb{R} - \{5\}$ (۳)

$\mathbb{R} - (4, 5)$ (۴)



۸- تابع همانی $f(x)$ و خطی $g(x)$ به شکلی مفروض هستند که $g(x)$ از مبدأ نگذرد. اگر

$$h(x) = \left(\frac{f+g}{f-g} \right)(x) \text{ تابعی خطی باشد، آنگاه عرض از مبدأ تابع } h(x) \text{ کدام است؟}$$

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۹- در تابع خطی f با دامنه $[-21, 4]$ برد $[-3, 7]$ مقدار $[3f(1)]$ کدام است؟

(۱) -۴

(۲) -۵

(۳) -۶

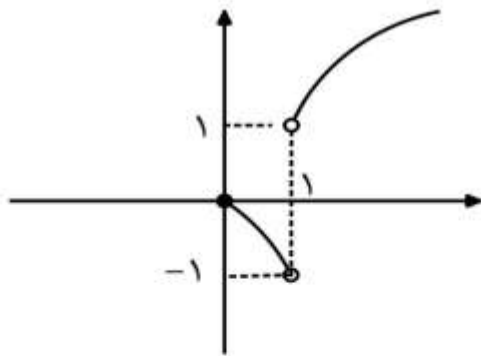
(۴) -۷

تابع های قطعه ای (چند ضابطه ای):

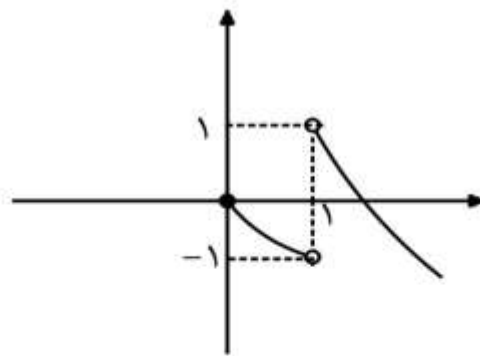
اگر ضابطه تابع به ازاء X های متفاوت ، تغییر کند، تابع را چند ضابطه ای می نامیم.



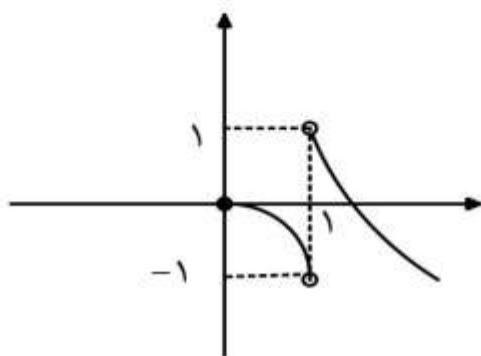
۱۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x}}{x-1}$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



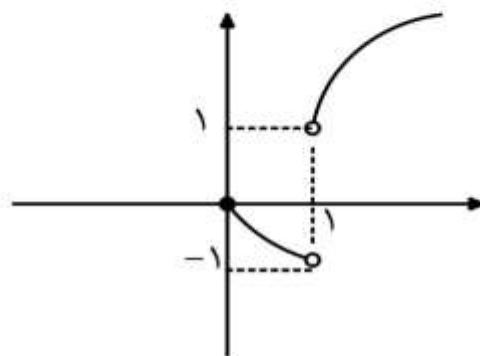
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

دامنه:

برای یافتن دامنه توابع به نکات زیر توجه کنید.



(الف) دامنه‌های چند جمله‌ای (مانند $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + x + 1$)، قدر مطلق (مانند $f(x) = |3x - 1| + 2$)، برآکتی (مانند $f(x) = 2[3x] + 1$)، نمایی (مانند $f(x) = 2^{3x+1} - 5$) و سینوسی (مانند $f(x) = 2\sin 3x + 1$) و کسینوسی (مانند $y = \cos \pi x + 2$) در بزرگ‌ترین حالت برابر $\mathbb{R}$ است.

(ب) توابع گنگ به دو بخش با فرجه فرد و زوج تفکیک می‌شوند. تابع‌های فرجه فرد مانند تابع‌های قسمت الف دامنه‌ای برابر $\mathbb{R}$ دارند برای نمونه دامنه $f(x) = \sqrt{x-1}$ برابر $\mathbb{R}$ است. ولی توابع فرجه زوج به ازاء مقادیری تعریف شده‌اند که عبارت زیر رادیکال نامنفی (مثبت یا صفر) شود. برای نمونه به دامنه توابع زیر توجه کنید.

$$f(x) = \sqrt{2x-3} \quad 2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \rightarrow D_f = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{3-|x|} \quad 3-|x| \geq 0 \rightarrow |x| \leq 3 \rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$D_f = [-3, 3]$$

(پ) توابع گویا به ازاء همه مقادیر تعریف شده‌اند مگر مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند. برای نمونه

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-1} \quad x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$



$$f(x) = \frac{1}{2x-1} \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

ت) توابع لگاریتمی به ازای مقادیری که آرگومان (عبارت جلوی لگاریتم) و مبنا را مثبت کند و مبنا را یک نکند تعریف شده اند به طور خلاصه:

$$\log_B^A \rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ B \neq 1 \end{cases}$$

برای نمونه:

$$f(x) = \log_{1-x}^{x+1} \rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 1-x > 0 \\ 1-x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \cap$$

$$D_f = (-1, 1) - \{0\}$$

ث) در توابع چند ضابطه ای اجتماع شرط ها (دامنه هر ضابطه) دامنه تابع کل است. برای نمونه دامنه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 5 & 0 < x < 1 \end{cases} \text{ بازه } (0, +\infty) = \{x < 1\} \cup \{x \geq 1\} \text{ است.}$$

نکته: دامنه تابع های تانژانت و کتانژانت را در فصل مثلثات خواهیم دید.





۱۱- عبارت $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

(۲) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(۳) $(-1, 1) - \{0\}$

(۴) $(-1, 0)$

۱۲- اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 - ax + b - 5}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۲۱

(۳) -۵

(۴) ۱۳



۱۳- بزرگ ترین دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{4-|x+3|}{x^2+x+1}}$ برابر $[a, b]$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) -۵

(۳) -۴

(۴) -۳

۱۴- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x-x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟
(تجربی خارج ۹۶)

(۱) $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$

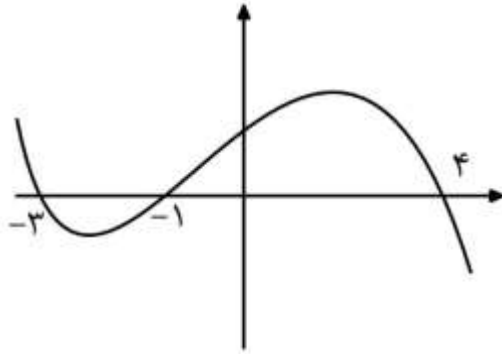
(۲) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

(۳) $(0, 2] \cup \left[-\frac{2}{3}, 0\right)$

(۴) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$



۱۵- شکل رو به رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



(۱) $[0, 2]$

(۲) $[-3, -2]$

(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴) $[-3, -1] \cup [0, 4]$

برد تابع به کمک رسم:

یکی از روش های خوب برد یابی بخصوص تابع های خطی، درجه دوم، درجه سوم و چند ضابطه ای رسم نمودار است.

۱۶- برد تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1$ در بازه $[0, 3]$ کدام است؟

(۱) $[-2, 1]$

(۲) $[-3, 1]$

(۳) $[-4, 1]$

(۴) $[-5, 1]$



۱۷- برد تابع $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{x+4}$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) $(-2, 0] \cup (2, +\infty)$

(۲) $(-2, +\infty)$

(۳) $[-4, -2) \cup (2, +\infty)$

(۴) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

۱۸- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq 0 \\ a + x & x < 0 \end{cases}$ مجموعه اعداد حقیقی است. کمترین مقدار a کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) ۳



۱۹- برد تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 7 & x \geq 0 \\ 4 - 2x & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱) $\mathbb{R} - [2, 4)$

(۲) $\mathbb{R} - (2, 4]$

(۳) $\mathbb{R} - [-7, 4)$

(۴) $\mathbb{R} - (-7, 4]$

تساوی دو تابع:

دو تابع f, g را مساوی می گوئیم هر گاه :

الف) دامنه دو تابع با هم برابر باشند

ب) به ازای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم $f(x) = g(x)$ یعنی ضابطه های دو تابع هم برابر باشند.

اشتباه های متداول در تساوی دو تابع عبارتند از :

الف) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$

ب) $\sin^2 x + \cos^2 x = \tan x \cdot \cot x$

پ) $\log x^2 = 2 \log x$

ت) $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$

در همه موارد بالا، دامنه های تابع ها با هم برابر نیستند.

در حالت (الف) دامنه تابع $\sqrt{x^2}$ برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع $(\sqrt{x})^2$ برابر $[0, +\infty)$ است.

در حالت (ب) تابع $\sin^2 x + \cos^2 x$ دامنه ای برابر $\mathbb{R}$ دارد درحالی که به تابع $\tan x \cdot \cot x$ نمی توان اعدادی

مانند $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ داد.

در حالت (پ) دامنه تابع $\log x^2$ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ و دامنه تابع $2 \log x$ برابر $(0, +\infty)$ است.

در حالت (ت) به تابع $\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ می توان عددی مانند $x = -1$ داد ولی به تابع $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ نمی توان این عدد را داد.



۲۰- کدام دو تابع زیر مساوی هستند؟

الف) $g(x) = x + 1$ و $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$

پ) $g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

ت) $g(x) = \sqrt{x} \sqrt{1-x}$, $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

ث) $g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱



چهار عمل اصلی روی توابع:

به ازای دامنه مشترک می توان چهار عمل اصلی روی تابع ها را به شکل های زیر تعریف نمود.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

برای نمونه اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - x + 3$ باشند:

$$(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + x^2 - x + 3$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - (x^2 - x + 3)$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} (x^2 - x + 3)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x + 3}$$

دامنه تابع های $f \pm g$ و $f \cdot g$ همان اشتراک دامنه های دو تابع f, g است و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه های دو

تابع f, g به جز طول هایی است که g را صفر می کنند.



$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

به مثال زیر توجه کنید: 

اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ و $g(x) = \sqrt{x}-2$ باشند دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید.

دامنه تابع های g, f را می یابیم.

$$D_f : x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$D_g : x \geq 0$$

ایکس هایی که تابع g را صفر می کنند می یابیم:

$$g(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4$$

اکنون دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را می یابیم.

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{x \geq -3\} \cap \{x \geq 0\} - \{x = 4\} \\ &= \{x \geq 0\} - \{4\} \end{aligned}$$



نکته: اگر ضابطه تابع ها را داشته باشیم، بهتر است ضابطه تابع خواسته شده را بسازیم و بعد دامنه



آن را بیابیم. برای نمونه ضابطه $\frac{f}{g}$ را در سوال قبل می سازیم.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$$

حال دامنه تابع را می سازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x-2} \neq 0 \rightarrow \sqrt{x} \neq 2 \rightarrow x \neq 4 \end{array} \right. \xrightarrow{\cap} \{x \geq 0\} - \{4\}$$

چهار عمل اصلی زوج ها:

ایکس های مشترک را می یابیم و اعمال خواسته شده را بر روی y های هر x مشترک پیاده می کنیم. زوج مرتب جدیدی با مولفه دوم عدد حاصل می سازیم.



به مثال زیر توجه کنید:



اگر $f = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 5), (2, 4)\}$ و $g = \{(-1, 2), (0, 1), (1, -1), (3, -1)\}$ باشند، تابع $\frac{2f}{g+1}$ را بیابید.

ایکس های مشترک $\{-1, 0, 1\}$ هستند. به ازای این ایکس ها مقدار تابع را می یابیم.

$$\left(\frac{2f}{g+1}\right)(-1) = \frac{2f(-1)}{g(-1)+1} = \frac{2(1)}{2+1} = \frac{2}{3} \rightarrow \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2f}{g+1}\right)(0) = \frac{2f(0)}{g(0)+1} = \frac{2(2)}{1+1} = 2 \rightarrow (0, 2)$$

$$\left(\frac{2f}{g+1}\right)(1) = \frac{2f(1)}{g(1)+1} = \frac{2(5)}{-1+1} = \text{تعریف نشده}$$

تابع مورد نظر برابر است با:

$$\frac{2f}{g+1} = \left\{ \left(-1, \frac{2}{3}\right), (0, 2) \right\}$$



تست



۲۱- اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ باشند، آنگاه دامنه تابع $h(x) = \frac{3g(x)-2f(x)}{5f^2(x)}$

کدام است؟

(۱) $[0, 2)$

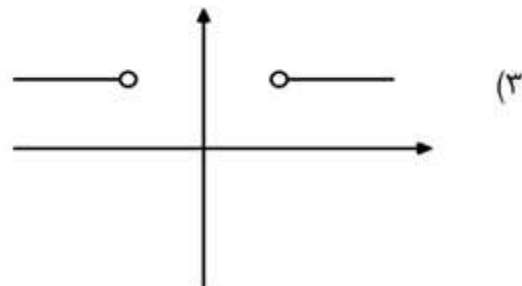
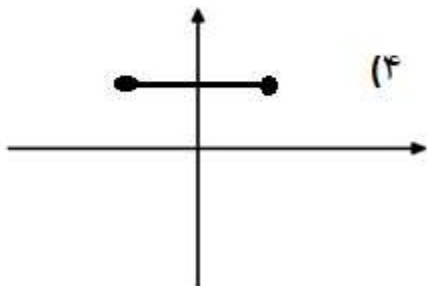
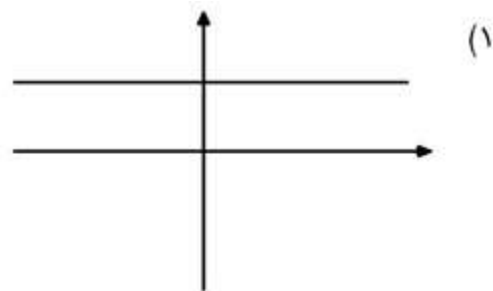
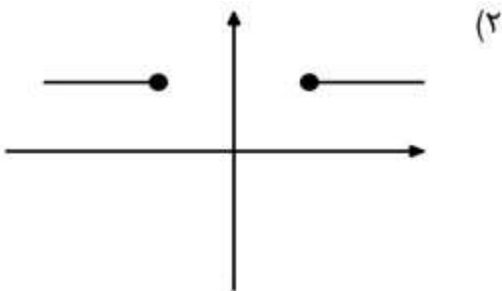
(۲) $[-2, 2) - \{1\}$

(۳) $(-, 2)$

(۴) $[0, 2) - \{1\}$

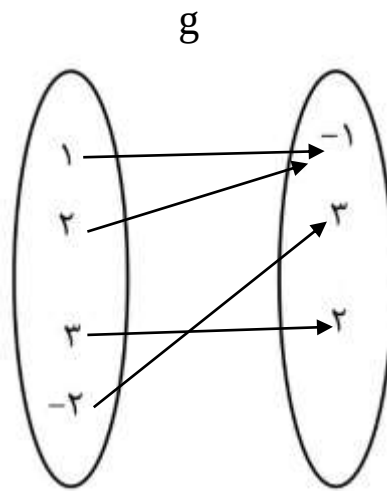
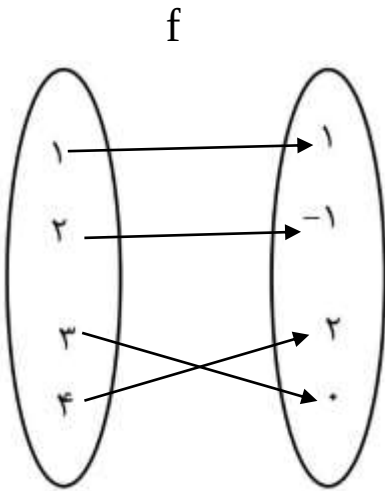
۲۲- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2-4}$ و $g(x) = x - \sqrt{x^2-4}$ باشند، نمودار تابع $y = (f \cdot g)_{(x)}$

کدام است؟





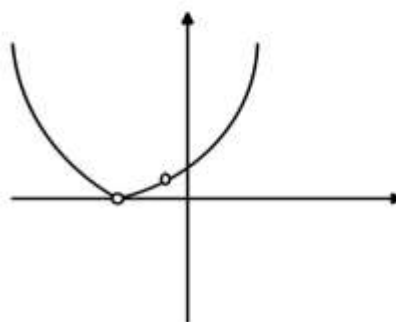
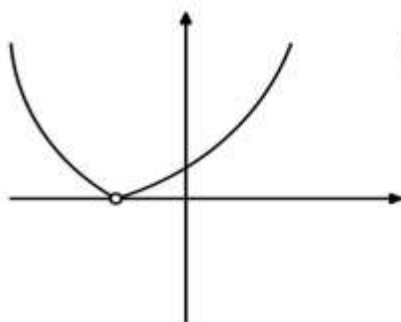
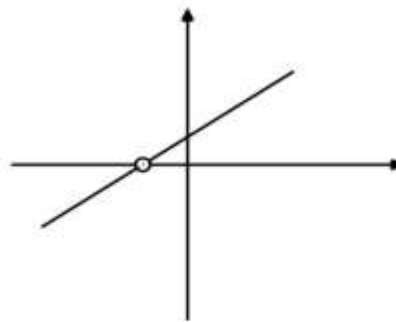
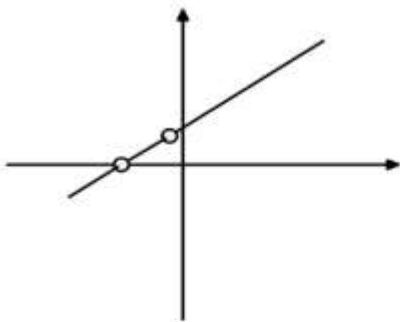
۲۳- با توجه به نمودارهای پیکانی دو تابع f, g ، مجموع اعضای برد تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $-\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $-\frac{2}{3}$

۲۴- اگر $f(x) = (x+1)(x+2)$ و $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ، نمودار تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)





۲۵- اگر g, f دو تابع با دامنه های $D_f = [3, 6]$ و $D_g = [-2, 1]$ باشند، دامنه تابع

$$h(x) = f\left(\frac{3x}{2}\right) - g(x-3)$$

کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) $[2, 4]$

(۲) $[1, 4]$

(۳) $[-2, 6]$

(۴) $[1, 6]$

۲۶- اگر ضابطه های دو تابع $g(x), f(x)$ به صورت های زیر باشند. ضابطه $f(x) + 2g(x)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3x & x > 0 \\ x+1 & x \leq 0 \end{cases}$$

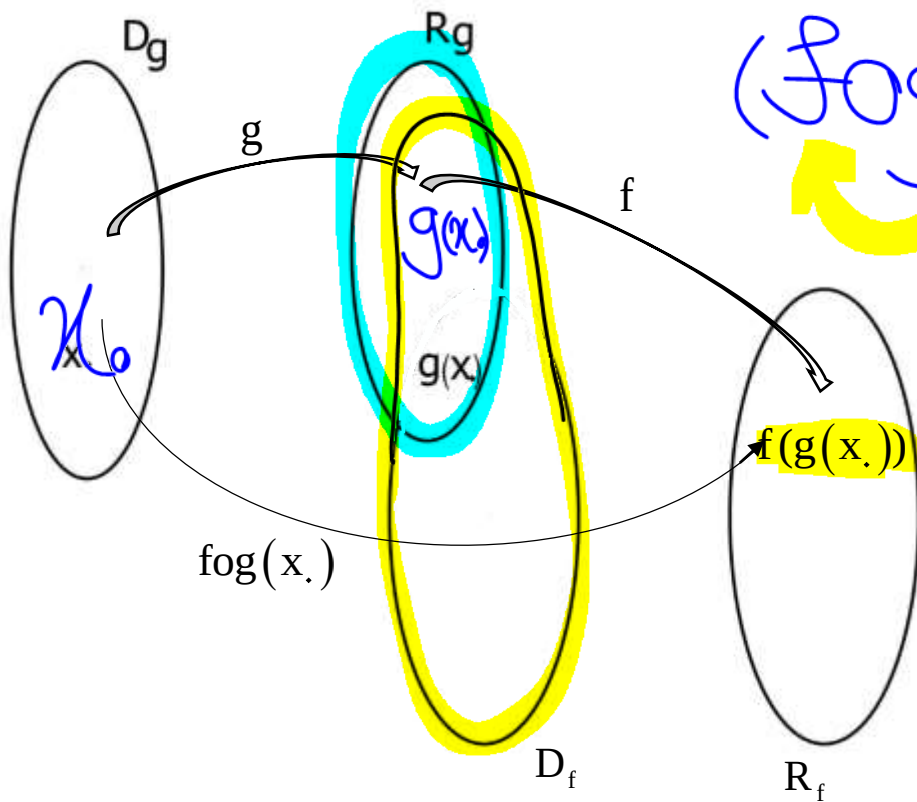
$$(f+2g)(x) = \begin{cases} 2x^2+6x & x \geq 1 \\ 10x & 0 < x < 1 \\ 6x+2 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2) \quad (f+2g)(x) = \begin{cases} x^2+6x & x \geq 1 \\ 8x & 0 < x < 1 \\ 4x+2 & x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(f+2g)(x) = \begin{cases} 2x^2+6x & x > 1 \\ 10x & 0 \leq x \leq 1 \\ 6x+2 & x < 0 \end{cases} \quad (4) \quad (f+2g)(x) = \begin{cases} x^2+6x & x > 1 \\ 8x & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x+2 & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$



تابع مرکب :

اگر f, g دو تابع باشند به طوری که اشتراک برد g و دامنه f غیر تهی باشد، تابع $f(g(x))$ را به صورت $f \circ g(x)$ نمایش می دهیم و آن را ترکیب f با g می نامیم.



$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset$$

به طور کلی تابع $f \circ g(x)$ یعنی به جای x های تابع $f, g(x)$ را جای گذاری کنیم. برای نمونه اگر $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ و $g(x) = 2x-3$ باشند آنگاه:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \frac{(2x-3)+1}{(2x-3)+2} = \frac{2x-2}{2x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{(2x-3)+1}{(2x-3)+2} = \frac{2x-2}{2x-1}$$



به نمونه های زیر توجه کنید:

$$۱) f(x) = \sqrt{3x-1} \quad g(x) = x^2 + x$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x) = \sqrt{3(x^2 + x) - 1}$$

$$(fog)(x) = \sqrt{3(x^2 + x) - 1}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{3x-1})^2 + \sqrt{3x-1}$$

$$g(f(x)) = (3x-1) + \sqrt{3x-1}$$

$$۲) f(x) = \sin \pi x \quad g(x) = \frac{x+3}{x}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{x}\right) = \sin \pi \left(\frac{x+3}{x}\right)$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin \pi x + 3}{\sin \pi x}$$

$$۳) f(x) = \sqrt[3]{2-x} \quad g(x) = \log_r^{(x-1)} + 1$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\log_r^{(x-1)} + 1) = \sqrt[3]{r^{\log_r^{(x-1)} + 3} - 5}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \log_r^{(\sqrt[3]{2-x})} - 1 + 1$$

$$۴) f(x) = |x-1| \quad g(x) = |x|-2$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(|x|-2) = ||x|-2|-1 = ||x|-3|$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = ||x-1|-2 = |x-1|-2$$

$$۵) f(x) = [x-2] \quad g(x) = x - [x]$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x - [x]) = [(x - [x]) - 2] = [x - [x] - 2]$$

$$fog(x) = f(g(x)) = [(x - [x]) - 2] = [x] - [x] - 2 = -2$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = [x-2] - [x-2] = [x-2] - [x-2] = 0$$



ممکن است در ترکیب تابع ها ضابطه $g \circ f(x)$ یا $f \circ f(x)$ یا $g \circ g(x)$ خواسته شود.

$$\begin{aligned}
 1) f(x) &= \frac{2x}{x-1} & g(x) &= \frac{x-1}{x+1} & \Rightarrow & (g \circ f)(x) = \frac{\frac{2x}{x-1} - 1}{\frac{2x}{x-1} + 1} \\
 g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{\frac{2x}{x-1} - 1}{\frac{2x}{x-1} + 1} & (g \circ g)(x) &= \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} \\
 f \circ f(x) &= f(f(x)) = f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x}{x-1}\right)}{\frac{2x}{x-1} - 1} & (f \circ f)(x) &= \frac{2\left(\frac{2x}{x-1}\right)}{\frac{2x}{x-1} - 1}
 \end{aligned}$$

$$g \circ g(x) = g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1}$$

در صورت نیاز تابع ها را ساده می کنیم.



تابع مرکب و زوج های مرتب:

برای نمونه اگر $f = \{(\cdot, 2), (1, -1), (3, 2), (4, 0)\}$ و $g = \{(5, 0), (2, 1), (-3, 3), (7, 5)\}$ باشند fog را به روش زیر می یابیم.

$$fog(x) = f(g(x))$$

$$fog = f \circ g = \left\{ (5, 2), (2, -1), (-3, 2) \right\}$$

X های g را یکی، یکی در ضابطه جای گذاری میکنیم و حاصل تابع را می یابیم.

$$fog(5) = f(g(5)) = f(\cdot) = 2$$

$$fog(2) = f(g(2)) = f(1) = -1$$

$$fog(-3) = f(g(-3)) = f(3) = 2$$

$$fog(7) = f(g(7)) = f(5) = \text{وجود ندارد}$$

$$g \circ f(x) = \{(0, 1), (3, 1)\}$$

زوج های مرتبی می نویسیم که از اولین و آخرین اعداد داده شده و حاصل شده تشکیل شده باشند.

$$fog\{(5, 2), (2, -1), (-3, 2)\}$$



دامنه تابع مرکب :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

برای یافتن دامنه تابع $g \circ f$ به روش کلی می توان دامنه تابع های g, f را یافت و از فرمول زیر استفاده نمود:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

اگر از این روش استفاده می کنید دامنه ها را به صورت بازه ننویسید و به صورت نامعادله بنویسید. برای نمونه به جای

$$D_{f \circ f}(x) = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

این که بنویسید $[-1, 1]$ بنویسید $-1 \leq x \leq 1$

سخت ترین بخش حل سوال ها به این روش حل $g(x) \in D_f$ است. در این بخش باید به جای x های دامنه

تابع $f(x)$ ضابطه تابع $g(x)$ را قرار دهیم.

برای نمونه اگر دامنه تابع f برابر $-1 \leq x \leq 1$ است:

$$g(x) \in D_f \rightarrow g(x) \in -1 \leq x \leq 1 \rightarrow -1 \leq g(x) \leq 1$$

حالا نا معادله را حل می کنیم و با بخش اول فرمول (یعنی $x \in D_f$) اشتراک می گیریم.

برای نمونه اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = 3x-7$ باشند دامنه تابع $f \circ g(x)$ عبارتست از:

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D_f : x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in x \geq -1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in x \geq -1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}\} \cap \{x \geq 2\} = \{x \geq 2\}$$

$$x \geq 2$$



$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \overbrace{3x-7}^{g(x)} \geq -1 \right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \geq 6\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

$$= \{x \geq 2\}$$

نکته:



در توابع کسری به جای این که دامنه را به صورت $\mathbb{R} - \{a\}$ بنویسیم آن را به صورت $x \neq a$ می نویسیم. برای نمونه

اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند:

$$D_f = x \neq 2, \quad D_g : x \geq 0$$

$$D_g = x \geq 0$$

$$2x-4 \neq 0$$

$$D_f = x \neq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \mid g(x) \in x \neq 2\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \geq 0 \mid g(x) \neq 2\}$$

$$= \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \neq 2\}$$

$$= \{x \geq 0 \mid x \neq 4\}$$

$$= x \geq 0 - \{4\}$$

$$\sqrt{x} \neq 2$$

$$x \neq 4$$



$$x \geq 0 - \{4\}$$



نکته:



گاهی اوقات می توان بدون ساده کردن، ضابطه تابع fog را ساخت و دامنه آن تابع را یافت. برای نمونه در مثال

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-2} \text{ و } g(x) = \sqrt{x} \rightarrow f \circ g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-2}$$

$$f \circ g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-2} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2\sqrt{x}-2 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ 2\sqrt{x}-2 &\neq 0 \rightarrow 2\sqrt{x} \neq 2 \\ \sqrt{x} &\neq 1 \rightarrow x \neq 1 \end{aligned}$$

اشتراک دو مجموعه جواب بالا دامنه تابع fog است.

$$\{x \geq 0\} \cap \{x \neq 1\} = \{x \geq 0\} - \{1\}$$

دقت کنید که در مخالف ها هم مانند مساوی ها اجازه طرفین وسطین و توان رساندن طرفین و... را داریم.

برون یابی :

هر گاه حاصل تابع مرکبی را بدهند و تابع بیرونی (اولی) را به کمک ضابطه تابع درونی بخواهند مراحل زیر را طی می کنیم.

(الف) کل عبارت داخل پرانتز را t فرض می کنیم.

(ب) x را بر حسب t تنها می کنیم.

(پ) در ضابطه تابع مرکب داده شده، همه جا t می گذاریم.

$$\text{اگر } f(x-2) = x^2 + 2x \text{ آنگاه ضابطه } f(x) \text{ را بیابید.}$$

$$(کام اول) \quad x-2 = t \Rightarrow x = t+2$$

$$\begin{aligned} (کام بعدی) \quad f(x-2) &= x^2 + 2x \Rightarrow f(t) = (t+2)^2 + 2(t+2) \\ f(x) &= (x+2)^2 + 2(x+2) \end{aligned}$$



به مثال زیر توجه کنید:



اگر $f\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \sqrt{x-3}$ باشد ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید.

الف) $\frac{2x}{x-1} = t \rightarrow 2x = xt - t \rightarrow 2x - xt = -t \rightarrow x(2-t) = -t \rightarrow$

$$x = \frac{-t}{2-t}$$

ب) $\frac{2x}{x-1} = t \rightarrow 2x = xt - t \rightarrow 2x - xt = -t \rightarrow$

$$x(2-t) = -t \rightarrow x = \frac{-t}{2-t}$$

پ) $f(t) = \sqrt{\frac{-t}{2-t}} - 3$

$$f(t) = \sqrt{\frac{-t}{2-t}} - 3$$

در نتیجه ضابطه تابع $f(x)$ به صورت زیر پیدا می شود.

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x}{2-x}} - 3$$

برای حل تست های برون یابی به شدت روش عدد گذاری توصیه می شود که در تست ها به آن ها می پردازیم.



درون یابی:

برای یافتن ضابطه $g(x)$ در تابع $f \circ g(x)$ ، $g(x)$ را در ضابطه تابع f قرار می دهیم و آن را مساوی طرف راست تساوی داده شده در صورت سوال می گذاریم.
با حل معادله، ضابطه $g(x)$ به دست می آید.



به مثال زیر توجه کنید:

 $g(x)$

اگر $f \circ g(x) = x^2 - 3x$ و $f(x) = \frac{x}{x+1}$ باشند ضابطه $g(x)$ را بیابید.

$$f(g(x)) = x^2 - 3x$$

$$\frac{g(x)}{g(x)+1} = x^2 - 3x$$

$$f \circ g(x) = x^2 - 3x \rightarrow f(g(x)) = x^2 - 3x \rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+1} = x^2 - 3x$$

$$g(x) = (x^2 - 3x)(g(x) + 1) \rightarrow g(x) = x^2 g(x) + x^2 - 3x g(x) - 3x$$

$$\rightarrow g(x) = x^2 g(x) - 3x g(x) + x^2 - 3x \rightarrow g(x) + 3x g(x) + x^2 g(x) = x^2 - 3x$$

$$g(x) - x^2 g(x) + 3x g(x) = x^2 - 3x$$

$$\rightarrow g(x)(1 + 3x + x^2) = x^2 - 3x \rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 3x}{1 + 3x + x^2}$$

$$g(x)(1 - x^2 + 3x) = x^2 - 3x \rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 3x}{1 - x^2 + 3x}$$

دقت کنید که در هر دو روش برون یابی و درون یابی در قسمت سمت راست تساوی ها چیزی را جای گذاری نمی کنیم.



تست



$$2 \frac{\text{cloud}}{\text{cloud}} = 2 \frac{\text{cloud}}{\text{cloud}} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

۲۷- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)}$$

(۱) $x-1$
(۲) $x+1$
(۳) x

$$= \frac{\frac{4x-2}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2(x+1)}{x+1}}{\frac{2(x+1)-(2x-1)}{x+1}} = \frac{4x}{2x+2-2x+1} = \frac{4x}{3} = \frac{4}{3}x$$

(۴) $2x$

۲۸- اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ باشند، نمودارهای دو تابع $f \circ g$ با کدام طول

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2(x+2) - 3)^2 = (2x+4-3)^2 = (2x+1)^2$$

مقاطع اند؟ (تجربی ۹۶)

(۱) $(2x+1)^2 - 1$

$$(f \circ g)(x) = (2x+1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(x) \Rightarrow (2x+1)^2 = (2x-3)^2$$

$2x+1 = 2x-3 \Rightarrow 1 = -3$ (غیرممکن)
 $2x+1 = -(2x-3) \Rightarrow 2x+1 = -2x+3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) 1
(۴) $\frac{3}{2}$

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = \pm B \quad \text{!} \quad \text{cloud}^2 = \text{cloud}^2 \Rightarrow \text{cloud} = \pm \text{cloud} \quad x = \frac{2}{2} = 1$$



۲۹- اگر $x > 0$ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \\ 3x - 2 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{[2x+1]}{2}$ باشند، آن گاه حاصل $f \circ g$ به ازای $x = -\frac{5}{3}$ $[-2, 3] = -1$ $[-\frac{1}{3}, 3] = -1$ $[-2, 5] = -3$ $[2, 7] = 2$ $[5, 3] = 5$ $[-\frac{1}{3}, 7] = -1$ کدام است؟

$$[2, 7] = 2 \quad [5, 3] = 5 \quad [-2, 5] = -3 \quad [-\frac{1}{3}, 7] = -1$$

$$(f \circ g)\left(-\frac{5}{3}\right) = f\left(g\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = f\left(\frac{[2(-\frac{5}{3})+1]}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{[-\frac{10}{3}+1]}{2}\right) = f\left(\frac{[-\frac{7}{3}]}{2}\right) = f\left(-\frac{7}{6}\right) = 3\left(-\frac{7}{6}\right) - 2 = -\frac{9}{2} - 2 = -\frac{9-4}{2} = -\frac{13}{2}$$

۳۰- اگر $f(x) = x^2 + ax + b$ و $g(x) = [x] + [-x]$ و حاصل $f \circ g(x) = 2$ باشند آنگاه $2a + b$

$$g(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} f(0) = 0^2 + a(0) + b = b = 2 & x \in \mathbb{Z} \\ f(-1) = (-1)^2 + a(-1) + b = 1 - a + b = 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1 - a + 2 = 2 \rightarrow a = 1$$

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow 2a + b = 4$$

کدام است؟

۱ (۱)

-۱ (۲)

صفر (۳)

۴ (۴) ✓

$$\begin{aligned} [5] + [-5] &= 0 \\ [2] + [-2] &= 0 \\ [2, 5] + [-2, -5] &= 2 + (-2) = 0 \\ [2, 7] + [-2, -7] &= 2 + (-2) = 0 \end{aligned}$$

آبکش



۳۱- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ و $a < 1$ باشد، حاصل $f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$ عدد دلخواهی از بازه $a < 1$ انتخاب می‌کنیم. کدام است؟

$$a = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2} + 2\right) + g\left(\frac{1}{2} - 2\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) + g\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} + \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{25}{4} - 4} + \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$= \sqrt{\frac{25-16}{4}} + \sqrt{\frac{9+16}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\times 2a \quad (1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\checkmark \frac{2}{a} \quad (2) = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\times \frac{a}{2} \quad (3) = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\times -\frac{2}{a} \quad (4) = -\frac{2}{\frac{1}{2}} = -4$$

زوج های مرتب:

تست



۳۲- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(0, 1), (-1, 2), (5, -3)\}$ باشند تعداد اعضای متمایز برد تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$f \circ g = f(g(x)) = \{(0, 2), (-1, 3)\}$$

$$\text{دامنه} = \{0, -1\}$$

$$\text{بردار} = \{2, 3\}$$

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲ ✓

۴) ۳



۳۳- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(0, 1), (1, -1), (2, 1), (3, -2)\}$ آنگاه $fo(f+g)$ از چند زوج مرتب متمایز تشکیل شده است؟

$$f+g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 2)\}$$

$$fo(f+g) = \{(1, 2), (2, 5), (3, 3)\}$$

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳ ✓

۳۴- اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند.

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$g \circ f^{-1} = g(f^{-1}(1)) = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(5, \frac{4}{3}), (4, \frac{2}{1})\}$$

تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ ✓

۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$

۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$

۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$



۳۵- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشند آن گاه عدد a کدام است؟ (تجربی ۹۱)

$$g(f(a)) = 5 \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 4$$

$$4 + \sqrt{4} = 4$$

۹ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۳۶- اگر $f(x) = \{(2, 6), (4, 5), (6, 4), (8, -1)\}$ و $g(x) = 2 + \sqrt{x+3}$ باشند، آن گاه مقدار a از معادله $g(f(a)) = f(4)$ کدام است؟

$$g(f(a)) = 5 \Rightarrow g(?) = 5 \Rightarrow 2 + \sqrt{?+3} = 5$$

$$\sqrt{?+3} = 3$$

$$? = 6$$

$$f(a) = 4 \Rightarrow a = 2$$

۲ (۱)
۴ (۲)
۶ (۳)
۸ (۴)



نکته:



در تست هایی که تابع وارون و تابع مرکب با یک تساوی آمده باشند، با انتقال تابع به طرف دیگر مساویف اینورس تابع گرفته می شود یا اگر ندارد، اینورس می گیرد برای نمونه:

$$f(x) = y \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$f(g(x)) = y \leftrightarrow g(x) = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(g(x)) = y \leftrightarrow g(x) = \underline{f(y)}$$

۳۷- اگر f تابعی باشد و g تابعی وارون پذیر باشد و f تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد و $f^{-1}(2x+3) = g(x+1)$ باشد و

حاصل $f \circ g(2)$ کدام است؟

$$f(g(2))$$

$$5(2)$$

$$-1(3)$$

$$-2(4)$$

$$f^{-1}(2x+3) = g(x+1)$$

$$2x+3 = f(g(x+1)) \quad x=1$$

$$2(1)+3 = f(g(2))$$

$$5 = f(g(2))$$



۳۸- دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر

$f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow g(2a) = f(6)$$

$$g(2a) = 3 \rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 \rightarrow 2a = 6a - 3$$

$$3 = 4a \xrightarrow{\div 4} \frac{3}{4} = a$$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{3}{4}$ ✓

(۳) $\frac{4}{2}$

(۴) $\frac{5}{2}$

۳۹- دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{5x+9}{5(x)+9}} = \sqrt{\frac{5x+9}{5x+9}} = 1$ مفروض اند. اگر

$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

$$g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \Rightarrow f^{-1}(a) = g(8)$$

$$f^{-1}(a) = 1$$

$$a = f(1)$$

$$a = 4$$

(۱) ۲

(۲) ۳ ✓

(۳) ۶

(۴) ۷



۴۰- اگر $g(x) = \frac{x}{x+3}$ و $(g^{-1} \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$ باشند، آنگاه $f(3)$ کدام است؟ (سنگش ۱۴۰۰)

$$\begin{aligned}
 (g^{-1} \circ f)^{-1}(x) &= \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = (g^{-1} \circ f)\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
 g(x) &= f\left(\frac{1}{x+1}\right) \Rightarrow g\left(-\frac{1}{3}\right) = f(3) \Rightarrow \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+3} = f(3) \\
 \frac{1}{x+1} &= 3 \rightarrow 1 = 3x+3 \rightarrow -2 = 3x \xrightarrow{\div 3} -\frac{2}{3} = x
 \end{aligned}$$

$-\frac{2}{3}$ (۱)
 $-\frac{2}{3}$ (۲)
 $\frac{3}{4}$ (۳)
 $\frac{3}{5}$ (۴)
 $-\frac{1}{3}$
 $-\frac{2}{3}$

دامنه تابع مرکب



تذکره:

اگر تعیین علامت را بلد نیستید قبل از حل این تست ها ، درس نامه جزوه نامعادله را بخوانید.

تست



۴۱- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = |x| + 1$ باشند دامنه $f \circ g(x)$ به صورت بازه $[a, b]$ است. حداکثر

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$3-x \geq 0 \rightarrow 3 \geq x$$

$b-a$ کدام است؟

$$D_f = \{x \leq 3\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = -1 \leq x \leq 2 = [-1, 2]$$

$$x \in \mathbb{R} \cap g(x) \leq 3$$

$$g(x) \leq 3$$

$$|x| + 1 \leq 3$$

$$|x| \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$b-a = 2 - (-1) = 3$$

۸ (۴)

$$|x| \leq k \rightarrow -k \leq x \leq k$$

$$D_g = \{x \neq 0\}$$

۴۲- اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ باشد، آنگاه دامنه $\text{fog}(x)$ کدام است؟

$$2-x-x^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{منفی } x} -2+x+x^2 \leq 0 \rightarrow x^2+x-2 \leq 0 \rightarrow [-1, 0] \quad (1)$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|ccc|c} & -2 & & 1 & \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \\ & & & \text{ج.} & & \end{array} \quad -2 \leq x \leq 1 \quad \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right] \quad (2)$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid g(x) \in [-2, 1]\} \quad (3)$$

$$\frac{2x+1}{x} = 1 \rightarrow 2x+1=x \rightarrow x=-1$$

$$\frac{2x+1}{x} = -2 \rightarrow 2x+1=-2x \rightarrow 4x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{4}$$

$$-2 \leq \frac{2x+1}{x} \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$$

$$\left[-1, -\frac{1}{4}\right] \quad (4) \quad \checkmark$$

۴۳- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2^{x^2+2x}$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟ (تجربی ۹۴)

$$[-4, 2] \quad (1)$$

$$[-4, -1] \cup (1, 2] \quad (2)$$

$$[-2, 0] \quad (3)$$

$$[-4, -2) \cup (0, 2] \quad (4)$$



نکته:



تست های دامنه و نامعادله که گزینه های آن به صورت بازه است را حتماً به روش رد گزینه حل می کنیم . به این ترتیب که عددی دلخواه از بین گزینه ها انتخاب می کنیم به شرطی که این عدد در برخی گزینه ها باشد و در برخی گزینه ها نباشد. عدد را در نامعادله جای گذاری می کنیم اگر درست بود گزینه های فاقد آن حذف می شوند و اگر نادرست بود گزینه های شامل آن حذف می شوند. در صورت لزوم با تکرار این کار همه گزینه های نادرست حذف می شوند.

۴۴- اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع gof کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۶)

(۱) $[0, 1)$

(۲) $\{0\}$

(۳) $(-1, 1)$

(۴) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$



۴۵- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد، دامنه تابع $f \circ \left(\frac{1}{f} - 1\right)(x)$ کدام است؟ (مدارس برتر ۹۹)

(۱) $(0, +\infty)$

(۲) $(0, 1)$

(۳) $[1, +\infty)$

(۴) $(0, 1]$

۴۶- اگر $f(x) = \{(1, 2), (3, 5), (-1, 0), (-2, 4)\}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ آنگاه مجموع اعضای غیر

تکراری دامنه $f \circ g$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵



۴۷- اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = \{(-2, 3), (-1, 1), (0, 4), (2, 3)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضا

متمايز D_{gof} چند است؟ (قلم چی ۹۹)

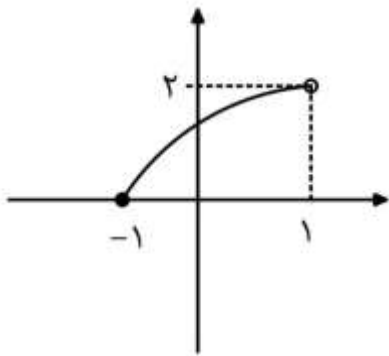
۱ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۴ بی نهایت

۴۸- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به شکل مقابل باشد D_{gof} کدام است؟



(۱) $(-\infty, -1)$

(۲) $(-\infty, 1)$

(۳) $(2, 10]$

(۴) $[0, 1]$



درون یابی و برون یابی

۴۹- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

$$(1) x^2 - x + 3$$

$$(2) x^2 - 2x - 1$$

$$(3) x^2 - 2x + 1$$

$$(4) x^2 - x + 1$$

نکته:



برای تست های برون یابی بهترین روش (در صورت امکان) استفاده از x آزاد است. یعنی با دادن مقداری دلخواه به جای x مقدار تابع را در نقطه ای پیدا می کنیم، سپس در ضابطه تابع خواسته شده آن مقدار را ایجادو با گزینه ها مقایسه می کنیم و گزینه درست را می یابیم.

۵۰- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $fog(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

(تجربی خارج ۹۵)

$$(1) 2x^2 + 3x + 1$$

$$(2) 2x^2 - 2x + 3$$

$$(3) 2x^2 - x + 4$$

$$(4) 2x^2 + x + 3$$



۵۱- اگر $\text{fog}(x) = 4x^2 - 4x + 7$ و $f(x) = -4x - 13$ ضابطه تابع g کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱) $y = x^2 - x + 7$

(۲) $y = x^2 - x + 5$

(۳) $y = -x^2 + x - 5$

(۴) $y = -x^2 + x - 7$

۵۲- اگر $\text{fog}(x) = 4x^2 + 4x$ و $f(x) = x^2 - 2x$ باشند، ضابطه $g(x)$ کدام می تواند باشد؟

(۱) $2x + 2$

(۲) $2x + 1$

(۳) $2x$

(۴) $2x - 1$